

DAİRESEL DELİKLİ DİKDÖRTGEN LEVHANIN H-TİPİ SONLU ELEMANLAR İLE UYARLAMALI ANALİZİ

Bahadır ALYAVUZ

İnşaat Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Gazi Üniversitesi, 06570, Maltepe, Ankara
balvavuz@gazi.edu.tr

(Geliş/Received: 08.11.2005; Kabul/Accepted: 03.03.2006)

ÖZET

H-tipi elemanlar kullanılarak dairesel bir boşluk içeren levhaların gerilme analizi uyarlamalı sonlu elemanlar metoduyla MATLAB® ortamında yazılan bir programla yapılmıştır. Yük etkisindeki levhanın uyarlamalı sonlu elemanlarla iteratif çözümünde iki tip yaklaşım kullanılmıştır. Bunlardan ilkinde sisteme ait başlangıç çözüm ağı teşkil edilip gerilme analizi yaptıktan sonra, Zienkiewicz ve Zhu tarafından oluşturulmuş olan hızlı yakınsayan yama düzeltmesi (HYD) kullanılmakta ve sonlu elemanlar çözümünden elde edilen gerilmeler iyileştirilmektedir. İkinci yaklaşımda, seçilen bir gerilme bileşeninin komşu noktalar arasındaki değişimini dikkate alarak sonlu elemanlar ağı sıklaştırılmaktadır. Sonlu elemanlar çözüm ağının oluşturulmasında Delaunay kriteri kullanılmıştır. HYD iyileştirmesi kullanarak optimum sayıda sonlu elemanla uyarlamalı analiz yapılmıştır. İkinci yöntemde elde edilen üçgen eleman sayısı birinci yöntemdekine göre yaklaşık yüzde 50 daha fazla olmaktadır.

Anahtar Kelimeler: H-tipi sonlu elemanlar, uyarlamalı çözüm, HYD.

H-VERSION ADAPTIVE FINITE ELEMENT ANALYSIS OF PLATE WITH CIRCULAR HOLE

ABSTRACT

Stress analysis of rectangular plates with a circular hole is carried out by a program written in MATLAB® environment and iterative h-version adaptive finite element method. Two different approaches were used in the adaptive solution of loaded plate. In the first one, stress calculation was made using initial course mesh and superconvergent patch recovery technique (SPR) proposed by Zienkiewicz ve Zhu was employed to refine the stress values. In second approach, finite element mesh was refined considering the variation of a chosen stress component between adjacent nodes. Triangular mesh was obtained using Delaunay criterion. Adaptive analyses were carried out using SPR technique with optimum number of finite elements. Number of triangular elements obtained from second approach was about 50 percent greater than the number of elements in the first approach.

Keywords: H-version finite elements, adaptive solution, SPR.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Sonlu elemanlar metodu sonuçlarının tutarlılığı, mühendislik problemlerinin analiz sürecindeki en önemli faktördür. Tutarlılık kavramı, problemin kesin sonuçları ile hesaplanan yaklaşık sonuçlarının arasındaki farkın yani kesin hatanın az olduğu duruma karşılık gelir. Çözümde oluşan hata, sonlu elemanlar metodu çözüm ağının problem sınırlarıyla tam olarak örtüşmemesi, enterpolasyon, integrallerin sayısal olarak hesaplanması ve oluşan denklem takımının çözümündeki yaklaşıklıktan dolayıdır ve bu hataları azaltmak elimizdedir.

Literatürde uyarlamalı analiz yöntemleri olarak adlandırılan h -, p -, r - ve h - p -tipi sonlu elemanlarla standart sonlu elemanlar çözümünden elde edilen sonuçların tutarlılığı artırılmaya çalışılır. p -tipi uyarlamalı sonlu elemanlarda, kullanılan şekil fonksiyonunun derecesi (p) artırılır [1]. Şekil fonksiyonları değiştirilmeden eleman sayısını (h) değiştirerek daha fazla serbestlik sayısı elde edilen yöntem h -tipi uyarlamalı sonlu elemanlardır. Burada eleman formülasyonu aynı kalır. Şekil fonksiyonlarının derecesini ve çözüm ağındaki eleman sayısını değiştirmeden var olan çözüm ağını hareket ettirerek bazı bölgelerde daha küçük sonlu elemanlar

oluşturmayı hedefleyen yöntem r -tipi uyarlamalı sonlu elemanlardır [2]. h -tipi ve p -tipi sonlu elemanların birlikte kullanıldığı karma yöntem ise h - p -tipi uyarlamalı sonlu elemanlardır [3].

Sonlu elemanlarda yapılacak uyarlamanın bölgesel veya genel olması söz konusudur. Böylece homojen ve homojen olmayan uyarlamalı sonlu elemanlar analizleri olmak üzere iki ana grup oluşur. Homojen uyarlamalı analizlerde, çözüm ağındaki sonlu elemanların polinom şekil fonksiyonlarının mertebesi veya boyutu, beklenen doğruluk derecesi elde edilene kadar problem sınırları içerisindeki bütün sonlu elemanlarda artırılır. Bu yöntem, çok sayıda denklem içeren bir sistem ortaya çıkarmakta ve bu denklem takımının çözümü için büyük bilgisayar hafızasına ve zamana ihtiyaç duyulmaktadır [4]. Bilgisayar hafızasını ve zamanı etkili ve ekonomik kullanmayı sağlayan homojen olmayan uyarlamalı analiz yöntemlerinde polinom şekil fonksiyonlarının mertebesi veya sonlu eleman sayısı sadece yüksek mertebede hata içeren elemanların olduğu bölgelerde artırılır.

Uyarlamalı analiz için gereken ana unsur, başlangıç (*ilk*) çözüm ağındaki düğüm noktalarının koordinatlarını, eleman yerleşimlerini ve sayısını ne kadar değiştireceğimizi bize söyleyecek bir göstergedir. Bazı yaklaşımlara göre, sonlu elemanların farklı yönlerdeki boyut değişimleri bir metrik tansör ile tanımlanır veya sonlu elemanların iç açı, alan ve yükseklik gibi geometrik özelliklerinin optimizasyonu kullanılarak çözüm ağı yenilenir [5-7]. Bunların genel özelliği sonlu elemanlar çözümünden elde edilen deplasman veya gerilme değerlerinin uyarlama sürecinde kullanılmasıdır. Diğer bir yaklaşımsa hata kontrolü yapmaktır. Bu kontrolü yapabilmek için çözümdeki hataların belirlenmesi, çoğu zaman tahmin edilmesi gerekir. Ekseriyetle kullanılan hata tahmin metotları, residüel metotlar (artık değer metotları) ve düzeltme metotlarıdır. Artık değer hata tahmini ilk olarak Babuska ve Rheinboldt [8] tarafından seksenli yılların başında verilmiştir. Burada hata tahmininde, problemin yönetici diferansiyel denkleminde bulunan artık değer kullanılır. Sonlu elemanlar metodu yaklaşık bir yöntem olduğu için yönetici denklemi sağlayacak sonuçlar her zaman elde edilemez ve artık bir değer ortaya çıkar. Problemin yönetici diferansiyel denklemini $\mathbf{Lu}+\mathbf{f}=\mathbf{0}$ olarak alacak olursak, $\mathbf{Lu}^h+\mathbf{f}=\mathbf{R}$ sonlu elemanlar metodu için geçerli olacak diferansiyel denklem olur. Residüel tipi hata tahmininde hata, \mathbf{R} artık değeri cinsinden yazılır. Düzeltme metotlarındaysa, standart sonlu elemanlar çözümünden bulunan sonuçların kullanımıyla elde edilecek ve kesin sonuçlara daha yakın değerlerin bulunması amaçlanır [9-11]. Bu tür hata tahmininde etkili sonuçlar elde edebilen bir yöntem Zienkiewicz ve Zhu [12,13] tarafından oluşturulan gerilmelerin iyileştirilmesi tekniğidir. Hızlı yakınsayan yama düzeltmesi (*HYD*) olarak adlandırılan yöntemde hata düzeltilmiş gerilme ile sonlu elemanlar çözümü arasındaki fark olarak alınmaktadır. Bölüm 2.1'de bu yöntemle yapılan hata tahmini ayrıntılarıyla açıklanmaktadır. Yöntemin matematik ispatı [14]'de bulunabilir.

Uyarlamalı olmayan sonlu elemanlar yazılımlarında h -tipi elemanlar ile bölgesel sıklaştırma kullanıcı tarafından geometrik süreksizliklerin görüldüğü bölgelerde yapılmaktadır. Bu süreksizlikler problem sınırlarının eğimindeki süreksizlikler veya iç bölgelerdeki boşluklardır. Analizi yapan kullanıcı görsel olarak veya komut satırından sıklaştırma bölgelerini ve kullanılacak sıklaştırma algoritmasını belirterek h -tipi bölgesel sıklaştırmayı sürekli ortama uygular [15]. Arka arkaya yapacağı analizler sonucunda, bir önceki adımda yaptığı analizden elde ettiği sonuçlarla olan görelî değişimi inceler. Bu analiz bütünüyle kullanıcı tecrübesine dayanmaktadır [16].

Bu çalışmada kullanıcı tecrübesine ve müdahalesine ihtiyaç duymayan ve h -tipi uyarlamalı sonlu elemanlar metodu kullanan bir bilgisayar yazılımı oluşturulması amaçlanmıştır. Kullanıcının problem geometrisini ve malzeme özelliklerini belirlemesinden sonra ilk çözüm ağının oluşumu, uyarlamalı analizin yapılması ve yeni çözüm ağının oluşturulması ile problem çözümünün grafik gösterimine kadar olan ve kullanıcı müdahalesine gerek duymayan işlemler otomatik olarak tanımlanmaktadır. h -tipi sonlu elemanlar, var olan sonlu elemanlar kodu üzerinde bir değişiklik yapma ihtiyacı duymadan uyarlamının eklenebilmesi nedeniyle tercih edilmiştir. Standart sonlu elemanlar kodumuzun üzerine böylesi bir ekleme yapmak için gereken temel öğe ise güvenilir bir hata göstergesidir. MATLAB® ortamında yapılan uyarlamalı sonlu elemanlar programında, çözüm sonrası tekniği olan hızlı yakınsayan yama düzeltmesi tekniği kullanılmakta ve bulunan değer yaklaşık bir hata parametresi oluşturulmasında kullanılmaktadır. Bu makalenin ilerleyen kısımlarında, Bölüm 2'de hata parametresinin oluşturulması için gereken formülasyonlar Zienkiewicz ve Zhu çerçevesinde gözden geçirilmektedir. Sonlu elemanlar ağının sıklaştırılması Bölüm 3'de ve dairesel delikli levha için yapılan sayısal analiz örneği Bölüm 4'de verilmektedir. Bölüm 5'te ise algoritmanın farklı delik tipleri için çalışması test edilmektedir. Son olarak elde edilen sonuçlar yorumlanmaktadır.

2. UYARLAMALI SE ANALİZİ (ADAPTIVE FE ANALYSIS)

Eşitliklerde kullanılan kalın büyük harfler matrisleri, kalın küçük harfler ise vektörleri temsil etmektedir. $\mathbf{a}=\{a_1 \ a_2 \ a_3\}^T$ ve $\mathbf{b}=\{b_1 \ b_2 \ b_3\}^T$ iki vektör ise, bunların skaler ve diyalik çarpımı sırasıyla

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i \quad (1)$$

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2)$$

\mathbf{e}_i ve \mathbf{e}_j birim vektörlerdir ve tekrar eden indisler üzerinde toplama anlamı vardır. Bu çarpımlar matris notasyonu ile sırasıyla,

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (3)$$

$$\mathbf{ab}^T = a_i b_j = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

olarak yazılır. Bu aşamadan sonra sadece matris notasyonu kullanılacaktır.

2.1. HYD: Gerilme İyileştirmesi (SPR: Stress Recovery)

Kesin çözümün bilinmediği durumlarda sonuçlardaki hata miktarının tahmin edilmesi için çeşitli yöntemler vardır. Bunlardan biri de hızlı yakınsayan yama düzeltmesi tekniğidir. Zienkiewicz ve Zhu [12,13], bu yöntemde bir düğüm noktası etrafında teşkil edilen ve adına yama denilen sonlu elemanlar ağı parçası üzerinde ayrık en küçük kareler kullanan bir düzeltme tekniği uygulamışlardır. Burada elemanda hesaplanan gerilmeden yola çıkılarak, sürekli bir gerilme alanı oluşturulmaktadır. Bu gerilmenin doğruluğunun daha fazla olduğu düşünülerek sonlu elemanlar çözümü için yaklaşık bir hata değeri hesaplanmıştır. Zienkiewicz ve Zhu, yöntem için Eşitlik 5'de verilen lineer eliptik problemi kullanmışlardır.

$$\mathbf{Lu} = \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{Su} = \mathbf{f} \quad (5)$$

Burada \mathbf{L} , \mathbf{u} değişkeni üzerine etkiyen lineer diferansiyel operatör, \mathbf{S} gradyan operatörü, \mathbf{C} bünye özelliklerinin bulunduğu elastisite matrisi ve \mathbf{f} yük vektörüdür. \mathbf{u} değişkeni yer değiştirme olarak alınırsa bu problem bir elastisite problemine dönüştürülebilir. Şöyle ki, toplam dış kuvvetin sıfır olması durumunda hareket denklemi,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \quad (6a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \quad (6b)$$

Eşitlik 6a-6b matris formunda,

$$\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (7)$$

olarak yazılabilir. Burada \mathbf{S} gradyan operatörünün elemanları,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T$$

ve $\boldsymbol{\sigma}$ düzlem gerilme bileşenleri vektörü ile \mathbf{f} kuvvet vektörüdür. Düzlem gerilme durumu için birim deformasyon yer değiştirme ilişkileri,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{ve} \quad 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (8)$$

Bu bağlntılar matris formunda,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Su} \quad (9)$$

olarak yazılabilir. Burada birim deformasyon vektörü $\boldsymbol{\varepsilon} = \{ \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_{xy} \}^T$ ve yer değiştirme vektörü, $\mathbf{u} = \{ u \ v \}^T$ dir. Birim deformasyon ile gerilme arasındaki bağıntıyı sağlayan bünye denklemleri,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

veya

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (11)$$

Burada \mathbf{C} matrisi elastisite matrisidir ve yukarıdaki haliyle iki boyutlu problemler için geçerlidir. Katsayıların değerlerini yazarak aşağıdaki formu alır.

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Burada E elastisite modülü ve ν Poisson oranıdır. Eşitlik 5'de verilen eliptik problem Eşitlik 9 ve 11'in 7'de yerine yazılmasıyla elde edilir. Bu diferansiyel denklemlerde \mathbf{u} değişkeni gerçek yer değiştirme değeridir. Sonlu elemanlar metodu ile hesaplanacak yaklaşık yer değiştirme alanını \mathbf{u}^h ile gösterip, düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler ile şekil fonksiyonları cinsinden,

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}}^h \quad (13)$$

olarak yazabiliriz. Burada şekil fonksiyonları matrisi,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

ve $\bar{\mathbf{u}}^h$ eleman düğümlerindeki yer değiştirme değerleridir. Lineer üçgen sonlu eleman için bu şekil fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$$N_1(x, y) = \frac{1}{2A_e} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) - (y_3 - y_2)x + (x_3 - x_2)y] \quad (15a)$$

$$N_2(x, y) = \frac{1}{2A_e} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) - (y_1 - y_3)x + (x_1 - x_3)y] \quad (15b)$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{2A_e} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) - (y_2 - y_1)x + (x_2 - x_1)y] \quad (15c)$$

Burada x_i ve y_i , alt indis ile belirtilen düğümün koordinatları ve A_e eleman alanıdır. Sonlu elemanlar metodunda standart Galerkin yöntemi kullanılarak düğüm noktalarındaki yer değiştirme değerleri, aşağıdaki lineer denklem sisteminin çözümüyle bulunur.

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{u}}^h = \bar{\mathbf{f}} \quad (16)$$

Burada $\bar{\mathbf{f}}$ eleman düğümlerine taşınan yüklerin oluşturduğu vektörü, \mathbf{K} ise rijidlik matrisidir ve lineer üçgen sonlu eleman için,

$$\mathbf{K} = A_e t (\mathbf{SN})^T \mathbf{C} (\mathbf{SN}) \quad (17)$$

olarak tanımlıdır. Yer değiştirmelerin bulunmasının ardından, sonlu elemanlar çözümüne ait gerilme değerleri Eşitlik 18 ile hesaplanacaktır.

$$\boldsymbol{\sigma}^h = \mathbf{C} \mathbf{S} \mathbf{u}^h \quad (18)$$

Düzeltilme tekniğinin amacı Eşitlik 18 ile bulunan gerilme değerinden daha doğru ve belirli bir bölgede tanımlı sürekli bir gerilme alanı, $\boldsymbol{\sigma}^*$, oluşturmaktır. Bu gerilme alanı, sonlu elemanlar formülasyonunda da kullandığımız şekil fonksiyonları ve düğüm gerilmeleri cinsinden Eşitlik 19'daki gibi ifade edilir.

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{N} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \quad (19)$$

veya

$$\sigma_x^*(x, y) = N_1(x, y) \bar{\sigma}_{x1}^* + N_2(x, y) \bar{\sigma}_{x2}^* + N_3(x, y) \bar{\sigma}_{x3}^* \quad (20a)$$

$$\sigma_y^*(x, y) = N_1(x, y) \bar{\sigma}_{y1}^* + N_2(x, y) \bar{\sigma}_{y2}^* + N_3(x, y) \bar{\sigma}_{y3}^* \quad (20b)$$

$$\sigma_{xy}^*(x, y) = N_1(x, y) \bar{\sigma}_{xy1}^* + N_2(x, y) \bar{\sigma}_{xy2}^* + N_3(x, y) \bar{\sigma}_{xy3}^* \quad (20c)$$

Burada $\bar{\sigma}_{xi}^*$, $\bar{\sigma}_{yi}^*$ ve $\bar{\sigma}_{xyi}^*$ ($i=1,2,3$) üçgen sonlu elemanların ilgili düğüm noktalarındaki gerilme değerleridir. HYD tekniğinde bu düğüm gerilmeleri birer polinom açılımdan, $\boldsymbol{\sigma}_p^*$ 'den elde edilirler. Bu polinom fonksiyonlar, sonlu elemanlar formülasyonunda kullanılan şekil fonksiyonları ile aynı derecede olacaktır.

$\boldsymbol{\sigma}_p^* = \{\sigma_{px}^*, \sigma_{py}^*, \sigma_{p,xy}^*\}^T$ vektörünün bileşenleri,

$$\sigma_{px}^* = \mathbf{p}^T \mathbf{a}_x \quad (21a)$$

$$\sigma_{py}^* = \mathbf{p}^T \mathbf{a}_y \quad (21b)$$

$$\sigma_{p,xy}^* = \mathbf{p}^T \mathbf{a}_{xy} \quad (21c)$$

Burada \mathbf{p} şekil fonksiyonlarımız ile aynı derecede olan polinom fonksiyonlarının terimlerini içeren vektördür. İki boyutlu lineer üçgen eleman kullandığımız için \mathbf{p} vektörünün bileşenleri,

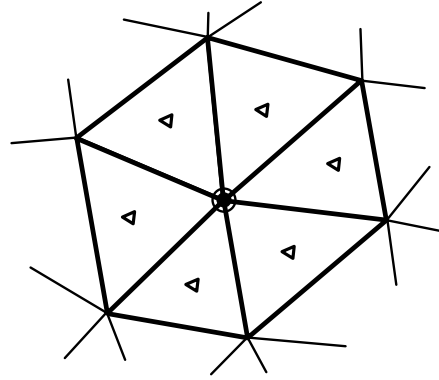
$$\mathbf{p} = \{1 \quad x \quad y\}^T \quad (22)$$

Eşitlik 21a-21c'de yer alan \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y , \mathbf{a}_{xy} vektörleri polinom açılım için gereken katsayı vektörleridir. Bu katsayı vektörlerinin belirlenmesi için hızlı yakınsayan noktalarda sonlu elemanlar çözümüyle hesaplanan gerilmeler ve HYD iyileştirmesi ile bulunmak istenen gerilmeler arasındaki farkların karelerinin toplamının minimum yapılması prensibi kullanılmaktadır. Bu işlem sonucunda katsayı vektörlerini bulmak için gereken eşitlikler elde edilir.

$$\sum_n \mathbf{p} \mathbf{p}^T \mathbf{a}_x = \sum_n \mathbf{p} \sigma_{px} \quad (23)$$

$$\sum_n \mathbf{p} \mathbf{p}^T \mathbf{a}_y = \sum_n \mathbf{p} \sigma_{py} \quad (24)$$

$$\sum_n \mathbf{p} \mathbf{p}^T \mathbf{a}_{xy} = \sum_n \mathbf{p} \sigma_{p,xy} \quad (25)$$



Şekil 1. Lineer üçgen elemanların oluşturduğu yama (Patch for linear triangle)

● yama merkez düğümü (patch center node)

◀ gerilmeler için hızlı yakınsayan noktalar (superconvergent points for stress values)

Burada n yama içerisinde bulunan hızlı yakınsayan noktaların sayısıdır (Şekil 1). Katsayı vektörleri,

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}_j, \quad (j = x, y, xy) \quad (26)$$

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}(x_i, y_i) \mathbf{p}^T(x_i, y_i) \quad (27)$$

$$\mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}(x_i, y_i) \sigma_j^h(x_i, y_i) \quad (28)$$

ve x_i, y_i hızlı yakınsayan noktaların koordinatlarıdır.

$\boldsymbol{\sigma}_p^* = \{\sigma_{px}^*, \sigma_{py}^*, \sigma_{p,xy}^*\}^T$ gerilme bileşenleri ve iyileştirilmiş düğüm gerilme değerleri, \mathbf{a}_j ($j=x,y,xy$) vektörlerinin bileşenlerinin bulunması ile elde edilmiş olur. Çözüm adımında herhangi bir elemanda oluşan hata veya bölgesel hata değeriye,

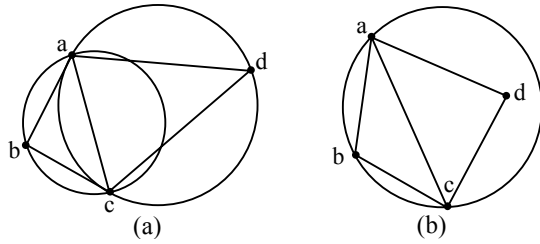
$$\mathbf{e} \cong \mathbf{e}^* = |\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h| \quad (29)$$

olarak hesaplanmıştır. Burada σ_x^*, σ_y^* ve σ_{xy}^* HYD tekniği ile düzeltilmiş gerilme değerleri, σ_x^h, σ_y^h ve σ_{xy}^h standart sonlu elemanlar metodundan bulunan gerilme değerleridir.

3. ELEMAN AĞI VE SIKLAŞTIRILMASI (ELEMENT MESH AND REFINEMENT)

3.1 Üçgenleştirme (Triangulation)

Üçgen çözüm ağı oluşturulması öncesinde gerekli adımlar, sınır ve iç alan düğüm noktalarının oluşturulmasıdır. Geometrik alanının karmaşık olması ve iç bölgede boşlukların bulunması düzenli dağılmış noktalar kümesi ve ağ yapısı oluşumunu kısıtlayıcı faktörlerdir. Bu durumda üçgenleştirme için gereken noktaların oluşturulmasında rastgele üretilen noktalardan yararlanılabilir. Bunun için problem geometrisi alt bölgelere bölünmüş, her bir alt bölgede rastgele bir nokta oluşturulmuştur. Bu alt bölgeler genellikle kare olmakta, boyutları ise nokta yoğunluğuna bağlı olmaktadır. Geometrik



Şekil 2. a. Boş çember kuralına uyan üçgenleştirme b. Kurala aykırı üçgenleştirme (a. Triangulation obeying empty circle rule b. Triangulation which does not obey the rule)

alan içinde oluşturduğumuz numaralandırılmış noktalar ilk noktadan son noktaya kadar taranarak üçgen oluşturacak üç nokta seçimi yapılır. Bu taramada üçgen köşelerini oluşturacak üç nokta için üç adet *for* döngüsü gerekir. Üçgen elemanlar birbirlerine girişim yapmayacak şekilde oluşmalıdır. Yani eleman kenarları birbirlerini kesmemelidir. Seçilen noktaların oluşturduğu üçgen Delaunay üçgeniyse başka bir ifadeyle boş çember kuralına uyuyorsa kesişim veya girişim yapma olasılığı ortadan kalkar. Boş çember kuralına göre s_i , s_j , s_k noktalarının oluşturduğu üçgene ait çevre çemberin içinde herhangi bir düğüm noktasının bulunmaması gereklidir (Şekil 2a) [18]. Bu işlem için de ek olarak bir adet *for* döngüsü gereklidir.

3.2. HYD Hata Göstergesi Kullanarak Sıklaştırma (Refinement Using SPR Error Indicator)

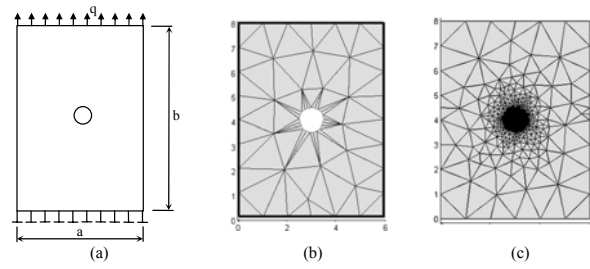
İteratif çözümlemede bir hesap adımında belirlenen hata seviyesi elde edilemediği takdirde, yüksek hata değeri olan bölgelerde üçgen elemanlar silinerek daha küçük sonlu elemanlar ile çözüm ağı oluşturmak gerekmektedir. Bu bölümde Eşitlik 29'da verilen ve elemanlarda hesaplanacak olan hata değerleri kullanılacaktır. Hata değerinin aşılması durumunda eleman içerisine Delaunay noktası eklenerek yeni düğüm noktası teşkil edilecektir [17]. Bu yöntemde, yeni oluşturulacak düğüm noktasının yeri için üçgen çevre çemberin merkez noktası esas alınmaktadır. Yeni eklenecek düğüm noktalarının hepsi oluşturulduktan sonra, çözüm ağı tekrar teşkil edilecektir.

3.3. Gerilme Değişimi Kullanarak Sıklaştırma (Refinement Using Stress Change)

Yeni çözüm ağı için nokta oluşumunda ikinci bir yöntem olarak, birbirlerine komşu düğümler arasındaki gerilmelerin değerlerini karşılaştırma sonucunda, üçgen kenarı üzerine nokta ekleme kullanılmıştır. İki komşu düğüm arasında gerilme gradyanı parametrik bir değer haline getirilir ve kullanıcının belirleyeceği değerden fazla olması durumunda eleman kenarında yeni bir düğüm noktası oluşturulur. Bu düğüm noktası, kenar orta noktasına yerleştirilebileceği gibi bir ağırlık fonksiyonu kullanarak farklı mesafelere de yerleştirilebilir.

4. SAYISAL ANALİZLER (NUMERICAL ANALYSIS)

Dairesel delikli levhaya $y=0$ ve $y=b$ sınırlarında, y eksenine doğrultusunda q düzgün yayılı yükü etkilediği düşünül-

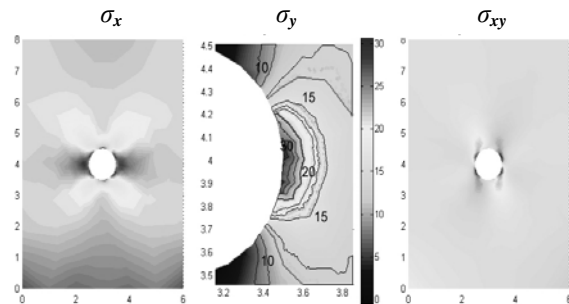


Şekil 3. a. Levha geometrisi b. Başlangıç çözüm ağı c. Sonuç çözüm ağı (a. Geometry of the plate, b. Initial mesh, c. Final mesh)

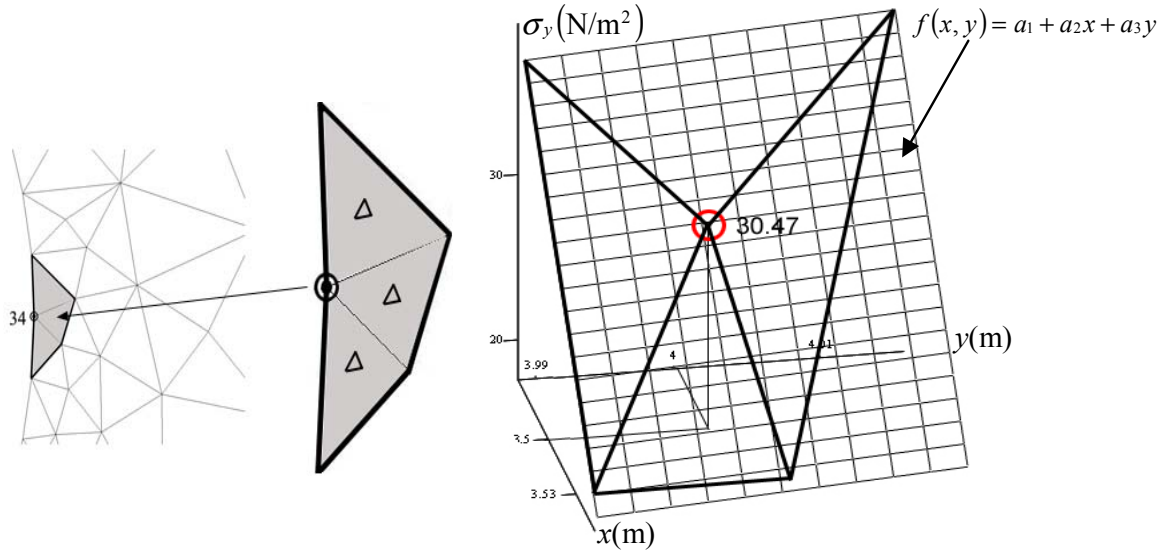
müştür (Şekil 3-a). Bölüm 3.1'de verilen yöntemle oluşturulan başlangıç sonlu elemanlar ağında delik etrafında oluşan üçgen elemanlar çok küçük iç açılı üçgenler olarak oluşmaktadır. Bu tip elemanlar katılar mekaniğinde sonlu elemanlar analizi için istenilmeyen elemanlardır. Ancak ilerleyen iterasyonlarda bu üçgenler otomatik olarak eşkenar üçgenlere yakın üçgenler ile sıklaşacaktır. Probleme ait geometrik sabitler, $a = 6$ m, $b = 8$ m, $r = 0.5$ m'dir ve birim genişlik düşünülmüştür.

Levha $q = 10$ N/m çekme etkisi altında bulunmaktadır. HYD tekniği ve gerilme değişimi ile arka arkaya dört iterasyon gerçekleştirilmiştir. Bu iterasyonlar sırasında oluşan başlangıç üçgen eleman ağı ve HYD tekniği sonucunda oluşan sonuç üçgen eleman ağı ile elde edilen gerilme grafikleri sunulmaktadır (Şekil 3 ve 4).

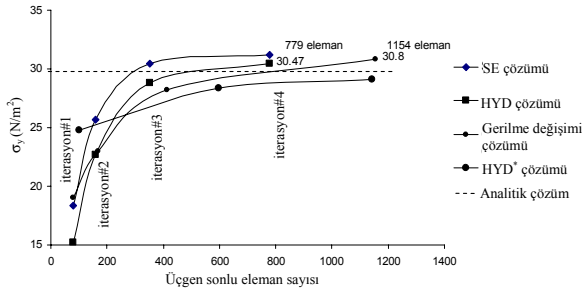
34 nolu düğüm için oluşturulan yama için Eşitlik 24'de verilen a_y katsayıları hesaplanmış ve bu yamada geçerli olan bir polinom fonksiyon $\sigma_{py}^* = \mathbf{P}^T \mathbf{a}_y$ olarak elde edilmiştir. Bu fonksiyon $\sigma_{py}^*(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y$ şeklinde bir yüzeyi gösterir (Şekil 5). Fonksiyon yardımıyla eleman düğümlerinde veya başka bir noktada gerilmeler HYD tekniği kullanılarak hesaplanmış olur. Arka arkaya yapılan dört iterasyon ile birinci yöntemde 779 üçgen elemanla, ikinci yöntemde 1155 üçgen elemanla analitik çözüme yaklaşılmıştır. Bu düğüm noktası için oluşturulan yama HYD tekniğiyle hesaplanan hata göstergesine göre yapılan iteratif çözüm ile gerilme değişimi iteratif çözümü sonucu elde edilen normal gerilmenin üçgen eleman sayısı ile değişimi Şekil 6'da sunulmaktadır. Burada [19] da yer alan hata tahmini yöntemiyle çözülmüş benzer bir problem HYD* çözümü olarak görülmektedir.



Şekil 4. HYD tekniği kullanarak uyarımlı sonlu elemanlar analizi gerilme değişimleri (Stresses obtained from results of adaptive finite element analysis using SPR)



Şekil 5. $x,y = 3.5,4$ koordinatlarında bulunan 34 nolu düğüm için oluşturulan yama ve *HYD* gerilmesi grafiği (Recovery patch and *SPR* stress graph for the point $x,y = 3.5,4$)



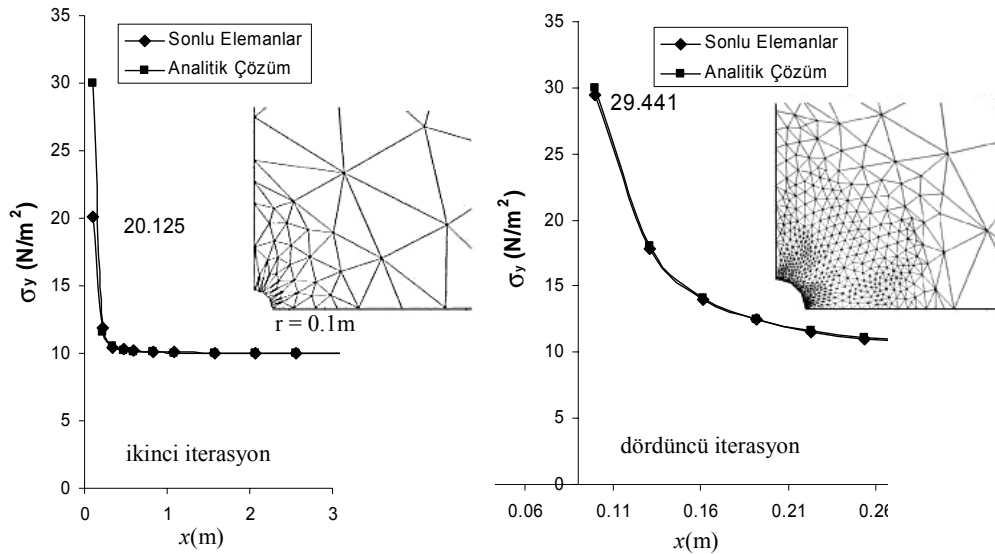
Şekil 6. 34 nolu düğüm için normal gerilmenin sonlu eleman sayısı ile değişimi (Normal stress variation versus element number for the point 34)

Ayrıca plak içerisinde σ_y normal gerilmesinin delik kenarından itibaren mesafe ile değişimini elde etmek amacıyla örnek bir delikli levhannın $1/4$ 'lük alanı modellenmiştir. Bu örnek için alınan delik geometrisi ile *HYD* uyarımlı çözümü ve analitik çözümün [20] karşıla-

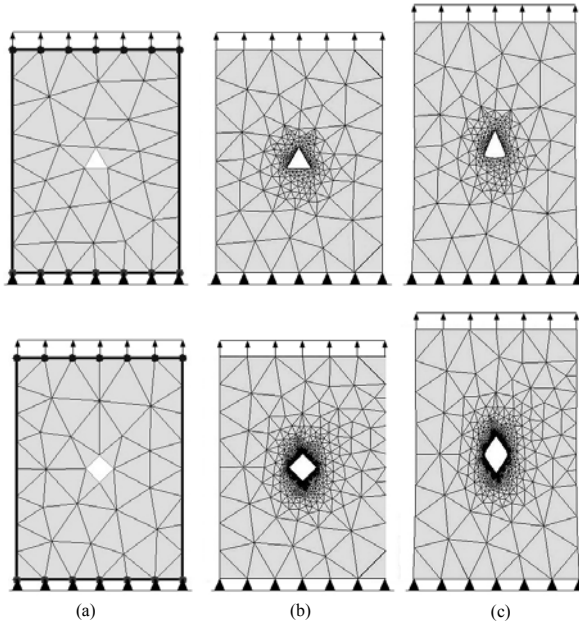
tırmalı grafikleri ikinci ve dördüncü iterasyonlar için elde edilmiştir (Şekil 7). Bu grafiklerin oluşturulmasında $y=4$ sınırında bulunan düğümler kullanılmıştır.

5. ALGORİTMA İÇİN TEST (TEST FOR THE ALGORITHM)

Bu testin amacı Bölüm 4'de yer alan dairesel delikli levhada oluşturulan başlangıç üçgen eleman ağında bulunan çok küçük iç açılı üçgenlerin sonlu elemanlar sıklaştırmasına hâkim olup olmadığını anlamaktır. Bu tür elemanlar problemin dış sınırlarındaki düğüm noktası aralığının, delik sınırlarındaki noktaların aralığından çok fazla olmasından kaynaklanır. Bu nedenle, en basit geometriye sahip boşluk olan üçgen ve dörtgen boşluklar oluşturularak, boşluk sınırlarında başlangıç nokta üretiminde en az sayıda sınır düğümü elde edilmiş ve nokta aralıkları birbirlerine yakın olmuştur (Şekil 8). Elde edilen çözüm ağında hiçbir çok küçük iç



Şekil 7. $y=4$ sınırındaki σ_y normal gerilmesinin değişimi ve çözüm ağları (σ_y normal stress variation at $y=4$ boundary and finite element meshes)



Şekil 8. Test örnekleri: a. Başlangıç eleman ağı, b. Sonuç eleman ağı, c. Deformasyonlar (Test examples: a. Initial mesh, b. Final mesh, c. Deformations)

açılı iğne olarak tabir edilen eleman bulunmamaktadır. Yapılan iterasyonlar sonucunda uygulanan yük ve boşluklar dikkate alındığında beklenen eleman sıklaştırması algoritma tarafından başarıyla gerçekleştirilmiştir.

6. SONUÇLAR (RESULTS)

H-tipi sonlu elemanlar ile iteratif çözümle yapılmış ve yöntem hakkında gerekli bilgiler sunulmuştur. İteratif çözümleme yapmak için iki ayrı yöntem seçilmiştir. Bu yöntemlerden birincisinde *HYD* tekniği kullanılarak hataların kontrolü ile birlikte yüksek hatalı elemanlara Delaunay noktası ekleme suretiyle çözüm ağı yenilenmiştir. Seçilen bir nokta etrafında oluşturulan yama üzerinde geçerli olan *HYD* tekniğinin kullanılması ile sonlu elemanlar çözümünde gerçek değere daha yakın sonuçlar elde edilmektedir. Genellikle elde bulunmayan kesin çözümün yerine gerçeğe sonlu elemanlar çözümünden daha yakın olan *HYD* gerilme değerleri kullanılarak hatalar hesaplanmıştır. İkinci yöntemde ise hata kontrolü yapılmaksızın düğümler arası gerilme değişimleri kontrol edilerek yeni çözüm ağı oluşturulmuştur. Bu yöntemde sisteme eklenecek yeni düğüm noktaları üçgen sonlu elemanların kenarları üzerinde bulunmaktadır.

HYD tekniği lineer üçgen sonlu elemanda başarıyla kullanılmıştır. Bu yöntem sayesinde sadece geometrik sınır bilgilerinin bilgisayar verilmesiyle otomatik olarak çözüm yapılabilir. Yapısal düzensiz üçgen elemanlar ağı kullanımı ile sıklaştırma daha az sayıda üçgen elemanla gerçekleşmiştir. Yapılan karşılaştırma sonucunda *HYD* tekniği ile iteratif çözümün, gerileme değişimi algoritmasına göre daha az sayıda üçgen eleman kullandığı görülmüştür. 77 adet üçgen sonlu eleman ile başlayan iterasyonlar dördüncü iterasyonun

sonucunda *HYD* tekniğinde 779, gerilme değişim algoritmasında ise 1154 üçgen eleman ile sonuca yaklaşmıştır. Üretilen sonlu elemanlar gerilme değişim algoritmasında *HYD* tekniğine göre yaklaşık %50 daha fazla sayıda olmuştur.

Her iki yöntem de iterasyon zamanları açısından yaklaşık olarak aynı sürede çalışmaktadır. Bu açıdan da bakıldığında eşit sürelerde daha az üçgen eleman üretebilen *HYD* tekniği daha avantajlı görülmektedir. Çok daha fazla serbestlik derecesine sahip problemlerde elde edilecek denklem takımı sayısının en az seviyede olması çözüm için gereken bilgisayar hafızası problemini de azaltacaktır.

İlk bakışta, oluşturulan başlangıç çözüm ağındaki bulunan çok küçük açılı üçgen elemanların iterasyonları etkileyeceği ve eşkenar üçgenlerden çok uzak olan bu elemanlardaki hata seviyesinin yüksek olmasının eleman geometrisinden kaynaklanabileceği düşünülmüştür. Ancak dördüncü bölümde yer alan ve bütünüyle eşkenar sonlu elemanlara yakın elemanlardan oluşan test geometrileri sonucunda boşluklar etrafında sıklaşma gerçekleşmiş ve sıklaşmada üçgen elemanların çok küçük açılı veya eşkenar üçgene yakın olmasının etkisinin olmadığı sonucuna varılmıştır. Burada yüklü levhada bulunan geometrik süreksizlikler rol oynamaktadır.

Uyarlamalı olan çözümlerin mantığında daha az sayıda sonlu elemanla doğru sonuca ulaşma isteği bulunmaktadır. Bu da *HYD* tekniği ile elde edilebilmektedir. Verilen algoritmalar ile içerisinde istenilen şekilde ve sayıda boşluk içeren yüklü levhaların gerilme analizleri kullanıcının geometrik süreksizlikleri belirlemesine gerek kalmaksızın gerçekleştirilebilmektedir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Basu, P.P., Peano, A., "Adaptivity in p-Version Finite Element Analysis", **Journal of Structural Engineering**, Cilt 109, 2310-2324, 1983.
2. Baker, T.J., "Mesh Adaptation Strategies for Problems in Fluid Dynamics", **Finite Elements in Analysis and Design**, Cilt 25, 243-273, 1997.
3. Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z., Gong, N.G., "Effective and Practical h-p Adaptive Analysis Procedure for the Finite Element Method", **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, Cilt 28, 879-891, 1989.
4. Carnevali, P., Morris, R.B., Tsuji, Y., Taylor, G., "New Basis Functions and Computational Procedures for p-Version Finite Element Analysis", **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, Cilt 36, 3759-3779, 1993.
5. Berger, M.J., Jameson, A., "Automatic Adaptive Grid Refinement for Euler Equations", **AIAA J.**, Cilt 23, 561-568, 1985.
6. Rivara, M.C., "A 3-D Refinement Algorithm Suitable for Adaptive and Multi-Grid Techniques", **Commun. Appl. Numer. Meth.**, Cilt 8, 281-290, 1992.
7. Borouchaki, H., Frey, P.J., "Adaptive Triangular-Quadrilateral Mesh Generation", **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, Cilt 41, 915-934, 1998.

8. Babuska, I., Rheinboldt, W.C., "A Posteriori Error Estimates of the Finite Element Method", **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, Cilt 12, 597-1615, 1978.
9. Hinton, E., Campbell, J.S., "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using Least Squares Method", **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, Cilt 8, 461-480, 1974.
10. Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z., "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, Cilt 24, 333-357, 1987.
11. Grosse, I.R., Katragadda, P., Benoit, J., "An Adaptive Accuracy-Based a Posteriori Error Estimator", **Finite Elements in Analysis and Design**, Cilt 12, 75-90, 1992.
12. Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z., "The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimate. Part 1. The Recovery Technique", **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, Cilt 33, 1331-1364, 1992.
13. Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z., "The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimate. Part 2. Error Estimates and Adaptivity", **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, Cilt 33, 1365-1382, 1992.
14. Zhu, Q., Zhao, Q., "SPR Technique and Finite Element Correction", **Numer. Math.**, Cilt 96, 185-196, 2003.
15. ANSYS Online Help, SAS IP, 1999.
16. Paulino, G.H., Menezes, I.F.M., Cavalcante Neto, J.B., Martha, L.F., "A Methodology for Adaptive Finite Element Analysis: Towards an Integrated Computational Environment", **Computational Mechanics**, Cilt 23, 361-388, 1999.
17. Frey, W.H., "Selective Refinement: A New Strategy for Automatic Node Placement in Graded Triangular Meshes", **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, Cilt 24, 2183-2200, 1987.
18. Bern, M., Plassmann, P., "Mesh Generation", **Handbook of Computational Geometry**, Sack J.R., Urrutia J. (editors), North Holland, 320-323, 2000.
19. Wiberg, N.-E., Abdulwahab, F., "Error Estimation with Postprocessed Finite Element Solutions", **Computers and Structures**, Cilt 64, 113-137, 1997.
20. Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., **Theory of Elasticity**, McGraw-Hill, New York, 1969.