Gazi Üniv. Müh. Mim. Fak. Der.
Cilt 23, No 2, 305-308, 2008

J. Fac. Eng. Arch. Gazi Univ.
Vol 23, No 2, 305-308, 2008

KONİK REZİSTANSIN SELF, HACİM VE YAYILIM DİRENÇLERİ

Osman GÜRDAL
Elektrik Eğitimi Bölümü, Teknik Eğitim Fakültesi, Gazi Üniversitesi, 06500, Ankara
ogurdal@gazi.edu.tr

(Geliş/Received: 30.04.2007; Kabul/Accepted: 28.12.2007)

ÖZET

Temel düzeydeki fizik kitaplarının çoğunda, direncin hesaplanmasında zorluk düzeyi normalin üzerinde bir problem olarak - homojen öziletkenlikte malzemeden yapılmış konik rezistansın direncinin analitik standart çözümünün (seri bağlı ince dilimler) yanlış olduğu iyi bilinmektedir. Uygun literatürün incelenmesi, sayısal çözüm için sınır koşulları konularının çok iyi irdelendiğini ve standart çözümün uyabileceği geçerli bir problemin olup olmadığını öneren bir girişimi göstermektedir. Ne yazık ki, standart çözümün uyabileceği geçerli ve doğru bir problem önerisi literatürde gözükmemektedir. Bu çalışmada, konik rezistansın bazı yeni özelliklerine ek olarak standart çözümün uyabileceği geçerli bir problem önerilmektedir. Yeni özellikler, konik rezistansın self, hacim ve yayılım dirençleri olarak önerilmektedir. Konunun değerlendirilmesi iyi bilinen mühendislik ve pedagojik yönünün dikkate alınması ile kolaylıkla yapılabilir.

Anahtar kelimeler: konik direnç, self direnç, hacimsel direnç, yayılım direnci, yayılım/daralma direnci

THE SELF, THE BULK AND THE SPREADING RESISTANCES OF THE CONICAL RESISTOR

ABSTRACT

The analytical standard solution (the stack of slabs added in series) of the resistance of the conical resistor -made of material of uniform conductivity given in many introductory physics texts as a nontrivial problem in the computation of resistance- is well known as incorrect. A survey of the relevant literature shows that the issues of boundary conditions for the numerical solution have very well been considered including an attempt proposing whether any valid problem exists to which the standard solution applies. Unfortunately, a proposition of a valid and correct problem to which the standard solution applies does not seem to appear in the literature. In this study, a valid problem is proposed in addition to providing some new extra properties of the conical resistor. The new properties are proposed as the self, the bulk and the spreading resistances of the conical resistor. The assessment of the subject can easily be performed by considering its well known engineering and pedagogical value.

Keywords: the conical resistor, the self resistance, the bulk resistance, the spreading resistance, spreading & constriction resistance.

1. GIRIŞ (INTRODUCTION)

Temel düzey fizik kitaplarının çoğunda direncin hesaplanmasında zorluk düzeyi normalin üzerinde bir problem olarak - homojen öziletkenlikte bir malzemeden yapılmış konik rezistansın direncinin analitik standart çözümünün yanlış olduğu iyi bilinmektedir [1-2]. Uygun literatürün incelenmesi, sayısal çözüm için sınır koşulları konularının çok iyi irdelendiğini ve standart çözümün uyabileceği geçerli bir problemin olup olmadığını öneren bir girişimi göstermektedir [1]. Ne yazık ki, standart çözümün uyabileceği geçerli ve doğru bir problem önerisi literatürde gözükmemektedir. Bu çalışmada, konik rezistansın bazı yeni ekstra özelliklerinin tanıtılmasına ek olarak standart çözümün uyabileceği geçerli bir problem önerilmektedir. Akımın geçtiği yol boyunca kesiti sabit olmayan bir iletken olan konik direnç, gerçekte self, hacim ve yayılım dirençleri olarak adlandırılan üç bileşeni üzerinde barındırmaktadır.

Bunun nedeni, potansiyellerin uygulandığı elektrotlar (terminaller) ve iletkenin sonlu boyutlarından kaynaklanan, akımın akış çizgilerinin paralelliklerini sürdürmeyerek bükülmesidir [3]; bu durum herhangi bir kesit daralması (constriction) oluşturmayan geleneksel silindirik (çubuk) rezistansta görülmemektedir. Self, hacim ve yayılım dirençleri ile ilgili hesaplamalar ve açıklamalar sonraki kısımda verilmektedir.

2. KONİK REZISTANSIN SELF, HACİM VE YAYILIM DİRENÇLERİ (THE SELF, THE BULK AND THE SPREADING RESISTANCES OF THE CONICAL RESISTOR)

Fizik kitaplarında konik rezistansın iyi bilinen standart çözümü $R = L/\sigma\pi ab$ dir [1]. Bu, gerçekte aşağıda kolaylıkla doğrulanabildiği gibi konik rezistansın hacim (bulk) direncine karşılık gelmektedir.

Şekil 1'de görüldüğü gibi konik dirençte, yönü z ekseninde ve yoğunluğu yarıçap ile değişen bir akım yoğunluğu,

$$\vec{\mathbf{J}} = \frac{I}{\pi r^2}\vec{\mathbf{a}}_z = \frac{I}{\pi f(z)^2}\vec{\mathbf{a}}_z \tag{1}$$

bulunduğunda homojen öziletkenliğe, σ sahip konik dirençteki güç yoğunluğu,

$$\frac{dP}{dv} = \vec{\mathbf{J}}\cdot\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{J}}^2}{\sigma} = \frac{I^2}{\sigma\pi^2 f(z)^4} \tag{2}$$

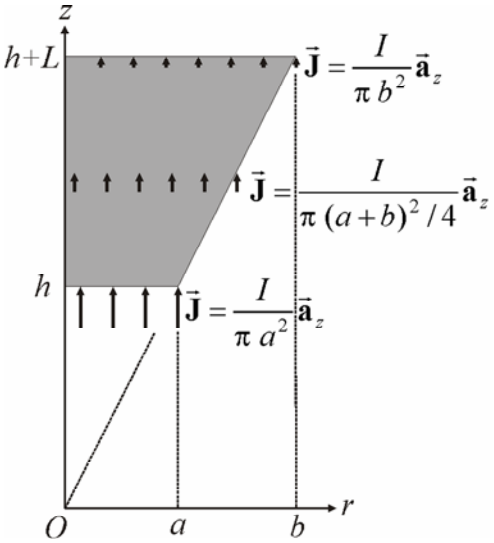
ile ifade edilir. Burada, $f(z) = z(b-a)/L$ ifadesi z ekseninde dönüşü ile kesik koni (konik direnç) yüzeyini oluşturan eğrinin eşitliğidir.

Konik rezistansta güç kaybı (statik alanlar için Poynting eşitliği)

$$\begin{aligned} P &= \pi\int_h^{h+L}\frac{dP}{dv}f(z)^2\,dz \\ P &= \pi\int_h^{h+L}\frac{I^2}{\sigma\pi^2 f(z)^4}f(z)^2\,dz \\ P &= I^2 R \end{aligned} \tag{3}$$

ile verilir. Burada, $\pi\int_h^{h+L} f(z)^2\,dz$ konik rezistansın, dönerek hacim oluşturma (volume of revolution) yöntemi ile elde edilen hacmidir. I^2 dışındaki terimler bir dirence karşılık gelir. Böylece,

$$R_b = \frac{1}{\sigma\pi}\int_h^{h+L}\frac{dz}{[z(b-a)/L]^2} = \frac{L}{\sigma\pi ab} \tag{4}$$



Şekil 1. Silindirik geometriye yerleştirilmiş konik direnç (rz düzleminin birinci çeyreği); şekilde $h = aL/(b-a)$'dir. Okların uçları eşpotansiyel yüzeyleri temsil ederler (bunlar sonsuz derecede küçük kalınlıkta ard arda silindir paketlerini andırmaktadır [1]). Okların uzunlukları, öğretici olması bakımından, $z = h$ disk yüzeyindeki akım yoğunluğuna, $J = I/\pi a^2$ normalleştirilmiş ve uyarlanmıştır. (The conical resistor placed in the cylindrical geometry (the first quarter of rz plane), where $h = aL/(b-a)$. Tips of the arrows represent equipotential surfaces (resembling the stack of slabs in infinitesimal thickness [1]). Length of the arrows are scaled and normalized to the current density, $J = I/\pi a^2$ at $z = h$ disk surface.)

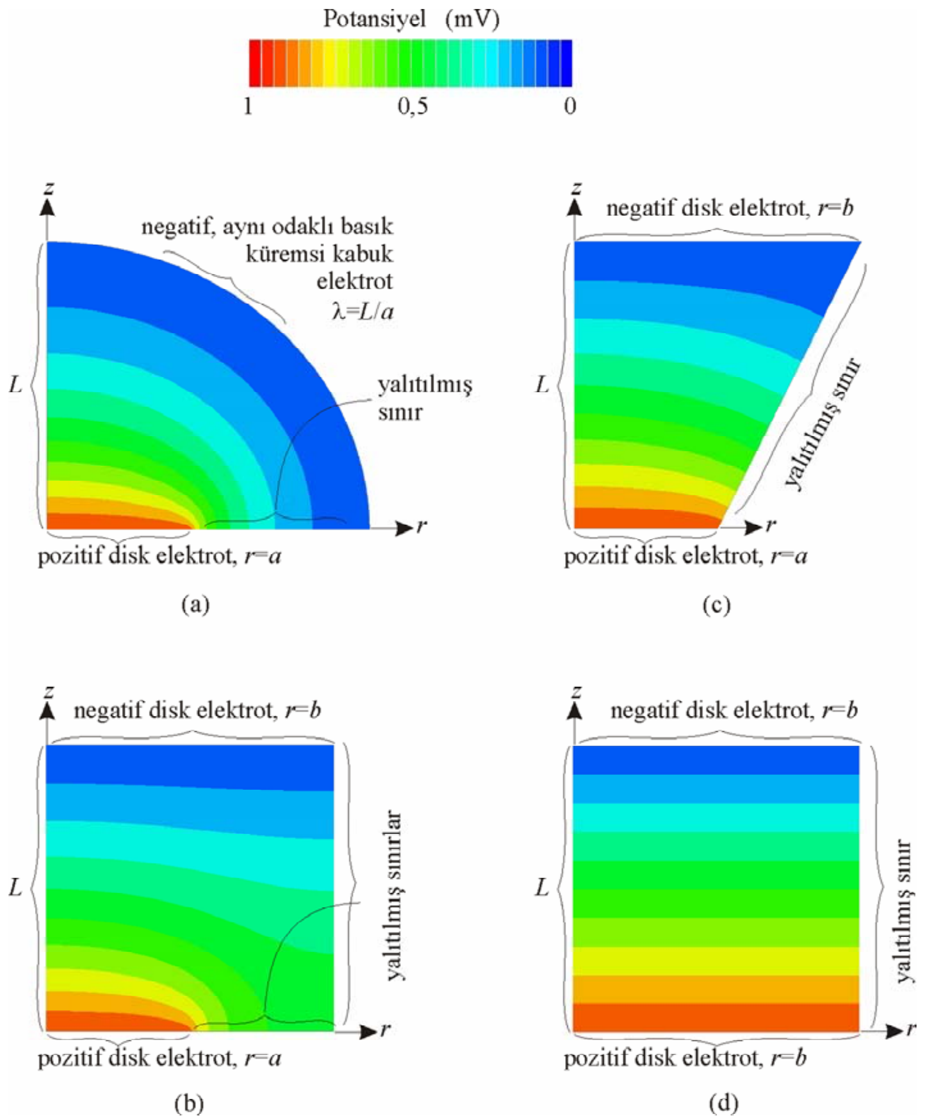
olarak elde edilen direnç, a ve b yarıçaplarındaki eşpotansiyel elektrot yüzeylere daima dik ve bulunduğu kesitteki yarıçapta yoğunluğu sabit ($I/\pi r^2$) akım yoğunluğundan kaynaklanan, hacim direnci olarak adlandırılır.

Önerilen önceki yöntemle,

$$\vec{\mathbf{J}} = \frac{I}{\pi r^2}\vec{\mathbf{a}}_z = \frac{I}{\pi b^2}\vec{\mathbf{a}}_z \tag{5}$$

ile tanımlanan sabit bir akım yoğunluğu dağılımı varsayımı ile konik rezistansın self direnci,

$$\begin{aligned} R_{\text{self}} &= \frac{1}{\sigma\pi b^4}\int_h^{h+L} f(z)^2\,dz \\ R_{\text{self}} &= \frac{L}{3\sigma\pi}\left(\frac{a^2+b^2+ab}{b^4}\right) \end{aligned} \tag{6}$$



Şekil 2. Gerekli sınır koşulları uygulanarak, Ansoft Maxwell SV Conduction Solver (AMCS) ile elde edilen sayısal çözüm potansiyel spektrumları: Homojen öziletkenlikte bir malzemeden yapılmış (a) aynı odaklı (eşpotansiyel) basık küremsi geometri, $[r^2/(a^2+L^2)]+(z^2/L^2)=1$ [6], (b) azaltılmış elektrot yüzeyi, πa^2 ile silindirik geometri, (c) πa^2 elektrot yüzeyi ile konik direnç ve (d) azaltılmamış elektrot yüzeyi, πb^2 ile geleneksel silindirik geometri. (b) ve (c)'de verilen geometrilerin uzak elektrotlar arası dirençleri (deforme tek kanatlı hiperboloidal akım tabakalarına karşılık gelen aynı odaklı olmayan deforme basık küremsi potansiyel spektralarından dolayı) bir miktar hacim ve yayılım dirençleri içerirken, (a)'da verilen geometri içsel doğallığından dolayı (mükemmel tek kanatlı hiperboloidal akım tabakalarına karşılık gelen aynı odaklı mükemmel basık küremsi potansiyel spektralarından dolayı) sadece yayılım direncine sahiptir ve bu $R_s=(1/2\pi\sigma a)\tan^{-1}(L/a)$ ile kolaylıkla tam olarak hesaplanabilmektedir. Bu değer $b=\infty,\ L=\infty$ için $R_s=1/4\sigma a$ olup Holm (veya Maxwell) yayılım direnci olarak bilinmektedir [3]. (An instructive potential spectras obtained from Ansoft Maxwell SV Conduction Solver (AMCS) by providing necessary boundary conditions: (a) confocal (equipotential) oblate spheroid [6], $[r^2/(a^2+L^2)]+(z^2/L^2)=1$, (b) the cylinder with reduced electrode surface, πa^2, (c) the conical resistor with electrode surface, πa^2 and (d) cylinder with electrode surface, πb^2 made of material of uniform conductivity. While the resistances of the geometries given in (b) and (c) include some amount of the bulk and the spreading resistances (due to perturbed non-confocal oblate spheroidal potential spectras corresponding to perturbed one sheet of hyperboloidal current sheets), the geometry given in (a) has only the spreading resistance due to its spontaneous nature (due to perfect equipotential oblate spheroidal potential spectras corresponding to perfect one sheet of hyperboloidal current sheets) which can be easily and exactly calculated by $R_s=(1/2\pi\sigma a)\tan^{-1}(L/a)$ and it is $R_s=1/4\sigma a$ for $b=\infty,\ L=\infty$, which is well known Holm (or Maxwellian) spreading resistance [3])

daima hacim direncinden küçük $(R_b > R_{\text{self}})$ ve anılanın içindedir.

Konik rezistansın tam direncinin bulunması sayısal bir yöntemin kullanılmasını gerektirmektedir [1]. Konik rezistansın toplam direnci hacim ve yayılım dirençlerinin toplamıdır. Böylece yayılım direnci [3-5] için uygun bir açıklama aşağıdaki paragraftaki gibi yapılabilir.

Şekil 2b'de görülen silindirik geometrinin yayılım direnci, sayısal yöntem ve self direnç $(R = L/\sigma\pi b^2)$ farkından elde edilebilirken aynı zamanda

$$\begin{aligned} R_s = (1/4\sigma a)[1 - 1{,}41581(a/b) \\ + 0{,}06322(a/b)^2 + 0{,}15261(a/b)^3 \\ + 0{,}19998(a/b)^4] \end{aligned} \quad (7)$$

eşitliği ile de elde edilebilmektedir [5]. (7) eşitliği $L/b < 1$ için geçerli ve sabitlerinin $L/b \geq 1$ için yeniden hesaplanmasına gerek duyulmaktadır. Konik direnç, daralma (constriction) içeren silindirik geometrinin yayılma direncinden daha küçük yayılma direnç değerine sahiptir çünkü silindirik direncin yayılım direncinin bir kısmı kendisini hacim direncine (z'ye parallel akım akış hatlarına) dönüştürerek hacim direncinin büyüklüğünü artırmaktadır. Bunun nedeni akım akış vektörlerinin yönlerinin değişmesidir. Öğretici olabilecek ekstra yorumlar şekil 2 alt yazısında eklenmiştir.

Konik rezistans anisotropik öziletkenlikte, $\sigma(\rho, \phi, z)$ bir malzemeden yapıldığında direnci koni eksenine (z) parallel öziletkenlik, $\sigma(z)$ ile $R = L/\sigma\pi a^2$ olur çünkü kenardaki eğik kısmın altında kalan bölge akımın geçmesine katkı sağlamaz ve enine (yarıçap doğrultusunda) yönlerdeki öziletkenlikte, $\sigma(\rho)$ direnç sonsuz (∞) olur. Bu sonuç, standart çözümün uyabileceği geçerli ve doğru bir öneri olarak sunulan [1] nolu referansta verilen (en son paragraf) ile kolaylıkla karşılaştırılabilir.

3. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Konik rezistansın standart çözümünün uyabileceği geçerli bir problem önerilmiş ve ek olarak self ve yayılım dirençleri olarak adlandırılan diğer bazı yeni özellikleri tanıtılmıştır. Bunların tanıtımında, direncin hesaplanmasında varsayıma dayalı akım yoğunlukları içeren yeni bir yöntem kullanılmıştır. Akım yolunda sabit kesit yerine bir daralma içeren iletkenlerin dirençlerine verilen adlar olarak self ve hacim terimleri literatürde ilk olarak kullanılmıştır (yayılım adı literatürde iyi bilinmektedir). Konunun değerlendirilmesi iyi bilinen mühendislik ve pedagojik değerlerinin dikkate alınması ile kolaylıkla yapılabilir. Bu makalenin tam olarak anlaşılması ve kavranılması için okuyucuların [1] referansındaki çalışmayı incelemeleri önerilir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Romano, J D ve Price, R H, "The conical resistor conundrum: a potential solution", **Am. J. Phys.**, 64 p.1150-1153, 1996.
2. Efthimiou, C J ve Llewellyn, R A, "Addition laws in introductory physics", **Eur. J. Phys.**, p. 441-456, Vol. 26 Issue 3, 2005.
3. Holm, R., **Electric Contacts - Theory and Applications**, Springer-Verlag, Berlin, Germany, p.1-26, 1976.
4. Greenwood, J. A., "Constriction resistance and the real area of contact", **Brit. J. Appl. Phys.**, vol. 17, pp. 1621–1632, 1966.
6. Rosenfeld, A. M. ve Timsit R. S., "The potential distribution in a constricted cylinder: An exact solution", **Quart Appl. Math.**, vol. 39, p. 405, 1981.
6. Moon, P. ve Spencer, D. E., **Field Theory Handbook**, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin, 1988.