

FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ KAPLAMALARDA SÜRTÜNMELİ RİJİT ZIMBA ETKİSİYLE OLUŞAN YÜZEYALTI TEMAS GERİLMELERİ

Tunç APATAY*, **Serkan DAĞ****, **Mehmet Ali GÜLER***** ve **Müfit GÜLGEÇ***

*Makina Müh. Böl., Mühendislik Fakültesi, Gazi Üniversitesi, Maltepe, 06570, Ankara

**Makina Müh. Böl., Mühendislik Fakültesi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, 06531, Ankara

***Makina Müh. Böl., Mühendislik Fakültesi, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, 06560, Ankara

tapatay@gazi.edu.tr, sdag@metu.edu.tr, mguler@etu.edu.tr, mgulgec@gazi.edu.tr

(Geliş/Received: 22.10.2009 ; Kabul/Accepted: 03.05.2010)

ÖZET

Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme (FDM)'den yapılan bir kaplamada yüzey altında, temas yüzeyindeki düzgün profilli sürtünmeli rijit zimba etkisiyle oluşan, gerilme dağılımlarını hesaplamak için tekil integral denklemlerine dayalı bir yöntem geliştirilmiştir. Düzlem elastisite durumu ele alınmış ve Poisson oranının, homojen gövde ve FDM kaplama için aynı olduğu kabul edilmiştir. Problem, bir tekil integral denkleminde indirgenmiş ve bu denklem bir açılım – sıralama tekniği kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Tekil integral denkleminin çözümünde kullanılan seriler Jacobi polinomları kullanılarak ifade edilmiştir. Zimba genişliği, zimba konumu, sürtünme katsayısı ve malzeme parametrelerinin, kaplama derinliği boyunca oluşan gerilme dağılımlarına etkileri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Temas mekaniği, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM), kaplama, sürtünme.

SUBSURFACE CONTACT STRESSES IN FUNCTIONALLY GRADED COATINGS LOADED BY A FRICTIONAL FLAT STAMP

ABSTRACT

In this study, a method has been developed in order to calculate the subsurface contact stresses in a functionally graded coating loaded by a frictional flat stamp on the contact surface. Plane elasticity is considered; Poisson's ratio is taken to be constant for the FGM coating and the substrate is taken to be homogeneous. The problem is reduced to a singular integral equation which is solved numerically by means of an expansion collocation technique. The series expansions utilized in the solution of the singular integral equation are expressed in terms of Jacobi polynomials. Effects of punch length, punch location, coefficient of friction and material properties on the subsurface stresses are investigated.

Keywords: Contact mechanics, functionally graded materials (FGM), coating, friction.

1.GİRİŞ (INTRODUCTION)

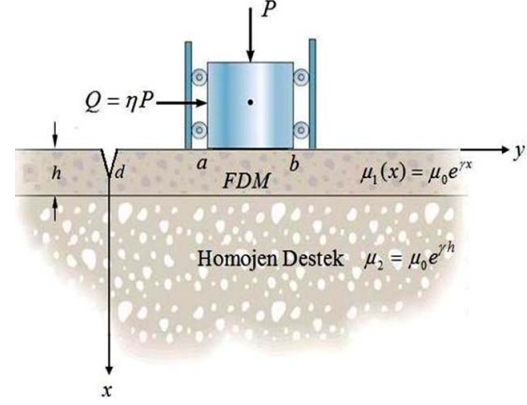
Makina elemanlarında ve yapılarında kullanılan parçaların hasara uğramasındaki en temel nedenler yorulma ve kırılmadır. Parçalarda kırılmaya neden olan çatlak başlangıcı ve ilerlemesi, gerilmelerin yüksek olduğu bölgeler ile sürtünmenin ve aşınmanın olduğu bölgelerde meydana gelir. Bu nedenle tasarım sırasında, yüzeyler arasındaki temastan dolayı meydana gelen temas gerilmeleri ile temasa bağlı

olarak çatlak ucunda oluşan gerilme dağılımlarının belirlenmesi önemlidir. Diğer taraftan malzeme biliminin ilerlemesiyle birlikte malzeme özelliklerinin malzeme içerisinde konuma bağlı olarak değiştirilebildiği üretim yöntemleri geliştirilmiştir. Bu şekilde üretilen malzemeler genel olarak FDM (Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler) olarak isimlendirilmektedirler ve çoğunlukla aşınmaya karşı direnç ve yüksek sıcaklıklara dayanabilme özelliği sağlamları için rulmanlarda, dişlilerde, kesici uçlarda

ve bunun gibi makine elemanlarında kaplama olarak kullanılmaktadırlar [1-3].

FDM'lerde temas gerilmeleriyle ilgili literatürde pek çok çalışma yer almaktadır. Giannakopoulos ve Suresh [4,5], sürtünmesiz düz, konik ve küresel rijit batıcı uçlarla yüklenmiş aksel simetrik FDM'lerde temas gerilmelerini incelemişlerdir. Giannakopoulos ve Pallot [6], sürtüneli silindirik rijit zimba etkisindeki FDM gövde için yaklaşık bir çözüm elde etmiştir. Bu çalışmalarda malzemenin elastisite modülünün, çözümde kolaylık sağlaması açısından $E = E_0 y^k$ şeklinde üstel bir fonksiyonla temsil edildiği kabul edilmiştir. Fakat bu fonksiyonda temas yüzeyinde ($y = 0$ için) elastisite modülü sıfır olmaktadır; bu da fiziksel olarak anlamlı değildir. Dağ ve Erdoğan [7], herhangi bir profile sahip sürtüneli rijit zimba etkisindeki yarı sonsuz FDM düzlemdeki temas ve yüzey çatlağı problemlerini çözmüştür. Güler ve Erdoğan [8] ise homojen gövde üzerindeki FDM kaplama için temas problemini çözmüştür. Bu çalışmalarda FDM malzeme için kayma modülünün derinlik boyunca $\mu = \mu_0 e^{\gamma x}$ şeklinde üstel bir fonksiyonla temsil edildiği kabul edilmiştir. Yüzeydeki temas kuvvetlerinden dolayı iç kısımlarda oluşan gerilme dağılımları ile ilgili olarak Yang ve Ke [9]'nin çalışmasında sürtünmesiz silindirik rijit zimba ile uygulanan normal kuvvetten kaynaklanan gerilme dağılımları elde edilmiştir. Bu çalışmada FDM'den yapılmış ara tabaka, homojen bir kaplama ve gövde arasına yerleştirilmiştir. FDM'lerde yüzeyaltı gerilmeleri ile ilgili literatürde bu çalışma dışında bir çalışma bulunmamaktadır.

Bu çalışmanın başlıca amaçları, düzgün profile sahip rijit bir zimbanın etkisinde olan FDM'den yapılan kaplamada, yüzeyden ölçülen belli bir d derinliği boyunca ($0 < d < h$) oluşan gerilme dağılımlarını elde etmek; ve malzeme parametresi, zimba genişliği, zimba konumu ve sürtünme katsayısı gibi parametrelerin gerilme dağılımlarına etkilerini incelemek olarak özetlenebilir. FDM kaplamanın kayma modülünün üstel bir formda, $\mu_1(x) = \mu_0 e^{\gamma x}$ şeklinde değiştiği kabul edilmiştir. Burada μ_0 , $x = 0$ 'da kayma modülünün referans değeri, γ ise malzeme heterojenlik sabitidir. FDM kaplama ve homojen gövde arasında mükemmel bir bağ olduğu; ve zimba ile yüzey arasında Coulomb sürtünme yasasının geçerli olduğu kabul edilmiştir. Problem geometrisi Şekil 1'de gösterilmiştir. Burada, P birim uzunluğa etki eden dik kuvvet; Q ise yatay kuvvettir. Sürtüneli kayma teması kabulü nedeniyle $Q = \eta P$ olarak ifade edilir; η ise sürtünme katsayısıdır.



Şekil 1. Problem Tanımı (Description of the Problem)

2. TEMEL DENKLEMLER (BASIC EQUATIONS)

Problem için düzlem elastisite durumu ele alındığında denge denklemleri aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (1a,b)$$

Bünye denklemleri ise

$$\sigma_{xxj}(x, y) = \frac{\mu_j}{\kappa - 1} \left\{ (\kappa + 1) \frac{\partial u_j}{\partial x} + (3 - \kappa) \frac{\partial v_j}{\partial y} \right\}, \quad (2a)$$

$$\sigma_{yyj}(x, y) = \frac{\mu_j}{\kappa - 1} \left\{ (3 - \kappa) \frac{\partial u_j}{\partial x} + (\kappa + 1) \frac{\partial v_j}{\partial y} \right\}, \quad (2b)$$

$$\sigma_{xyj}(x, y) = \mu_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} \right), \quad j = 1, 2, \quad (2c)$$

şeklinde. Bu ifadelerde u_1, v_1, μ_1 , FDM kaplamada sırasıyla x, y -doğrultusundaki deplasmanları ve malzemenin kayma modülünü; u_2, v_2, μ_2 ise homojen malzemede sırasıyla x, y -doğrultusundaki deplasmanları ve malzemenin kayma modülünü ifade etmektedir. κ ise Kolosov sabitidir. Kolosov sabiti ve Poisson oranı arasındaki ilişki düzlem gerinim durumu için $\kappa = 3 - 4\nu$, düzlem gerilme durumu için ise $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ olarak ifade edilir. Poisson oranındaki değişimin sayısal sonuçlar üzerinde çok etkili olmadığı bilindiğinden, bu oran FDM kaplamada da sabit olarak alınmıştır. 1 ve 2 indisleri ise sırasıyla FDM ve homojen malzemeyi temsil etmektedir.

Yer değiştirme bileşenleri cinsinden yazılan gerilme ifadelerinin denge denklemlerinde kullanılmasıyla FDM kaplama için Navier Denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} (\kappa-1)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \gamma(\kappa-1)\frac{\partial u_1}{\partial y} + \gamma(\kappa-1)\frac{\partial v_1}{\partial x} \\ + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + (1+\kappa)\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < h, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \gamma(1+\kappa)\frac{\partial u_1}{\partial x} + (1+\kappa)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \gamma(3-\kappa)\frac{\partial v_1}{\partial y} \\ + 2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + (\kappa-1)\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < h. \end{aligned}$$

$\gamma = 0$ alındığında (3) numaralı denklemler homojen gövde için ($h < x < \infty$) geçerli olan denklem sistemine indirgenir. Söz konusu denklemler;

$$(1+\kappa)\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + (\kappa-1)\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

$$(\kappa-1)\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + (1+\kappa)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0$$

şeklinde elde edilebilir. Bu denklem sistemlerinin çözümü için yer değiştirme ifadeleri aşağıdaki şekilde ters Fourier dönüşümleri olarak ifade edilir:

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_1(\rho, x) e^{i\rho y} d\rho, \quad (5a)$$

$$v_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V_1(\rho, x) e^{i\rho y} d\rho, \quad (5b)$$

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_2(\rho, x) e^{i\rho y} d\rho, \quad (5c)$$

$$v_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V_2(\rho, x) e^{i\rho y} d\rho. \quad (5d)$$

3. TEMAS PROBLEMİNİN FORMÜLASYONU (FORMULATION OF THE CONTACT PROBLEM)

Bu bölümde gerilme ve yer değiştirmeler aşağıda tanımlanan $f_3(y)$ fonksiyonu cinsinden elde edilecektir:

$$\sigma_{xx}(0, y) = \begin{cases} f_3(y), & a < y < b, \\ 0, & -\infty < y < a, \quad b < y < \infty. \end{cases} \quad (6)$$

Coulomb sürtünmesi geçerli olduğundan temas yüzeyinde kayma gerilmesi,

$$\sigma_{xy}(0, y) = \begin{cases} \eta f_3(y), & a < y < b \\ 0, & -\infty < y < a, \quad b < y < \infty \end{cases} \quad (7)$$

şeklinde ifade edilebilir. Süreklilik şartları ise şu şekilde yazılabilir:

$$u_1(h, y) = u_2(h, y), \quad (8a)$$

$$v_1(h, y) = v_2(h, y), \quad (8b)$$

$$\sigma_{xx1}(h, y) = \sigma_{xx2}(h, y), \quad (8c)$$

$$\sigma_{xy1}(h, y) = \sigma_{xy2}(h, y). \quad (8d)$$

(3) ve (4) ile verilen Navier denklemlerinin Fourier dönüşümlerinin alınması ve elde edilen denklem sistemlerinin çözülmesiyle FDM kaplama ve homojen gövde için gerilme ve yer değiştirme ifadeleri elde edilir (Ek A):

Bu ifadelerde M_j, S_j, R_j terimleri ρ 'nun fonksiyonudur ve (8) ile verilen süreklilik şartları yardımıyla $f_3(y)$ cinsinden elde edilir. N_j ise;

$$N_j = i \frac{(\kappa+1)(s_j \gamma + s_j^2) + (1-\kappa)\rho^2}{\rho[2s_j + (3-\kappa)\gamma]}, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (9)$$

şeklinde tanımlanmıştır. s_j , diferansiyel denklem sisteminin karakteristik denkleminin kökleridir. Karakteristik denklem ve kökleri aşağıdaki gibidir;

$$(s^2 + \gamma s - \rho^2)^2 + \rho^2 \gamma^2 \left(\frac{3-\kappa}{1+\kappa} \right) = 0, \quad (10)$$

$$s_1 = -\frac{1}{2} \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\rho^2 + 4i|\rho|\delta} \right), \quad \Re(s_1) < 0, \quad (11a)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2} \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\rho^2 - 4i|\rho|\delta} \right), \quad \Re(s_2) < 0, \quad (11b)$$

$$s_3 = -\frac{1}{2} \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4\rho^2 + 4i|\rho|\delta} \right), \quad \Re(s_3) > 0, \quad (11c)$$

$$s_4 = -\frac{1}{2} \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4\rho^2 - 4i|\rho|\delta} \right), \quad \Re(s_4) > 0. \quad (11d)$$

Burada $\delta = |\gamma| \sqrt{\frac{3-\kappa}{1+\kappa}}$ şeklinde tanımlanmıştır.

4. TEKİL İNTEGRAL DENKLEMİ VE ÇÖZÜMÜ (SINGULAR INTEGRAL EQUATION AND ITS SOLUTION)

Temas probleminin çözümünde sağlanması gereken sınır şartları ve denge denklemleri aşağıda verilmiştir:

$$\sigma_{xx}(0, y) = 0, \quad -\infty < y < a, \quad b < y < \infty \quad (12a)$$

$$\sigma_{xy}(0, y) = 0, \quad -\infty < y < a, \quad b < y < \infty, \quad (12b)$$

$$\sigma_{xy}(0, y) = \eta \sigma_{xx}(0, y), \quad a < y < b, \quad (13a)$$

$$\frac{4\mu_0}{\kappa + 1} \frac{\partial}{\partial y} u(0, y) = f(y), \quad a < y < b, \quad (13b)$$

$$\int_a^b \sigma_{xx}(0, y) dy = -P. \quad (14)$$

(12) ve (13a) ile verilen sınır şartları bilinmeyen fonksiyonların bulunmasında kullanılmıştır. Geri kalan sınır şartları ise tekil integral denkleminin oluşturulmasında ve çözümünde kullanılacaktır.

Ek A6 ile verilen yer değiştiririnin türevini genel olarak

$$\frac{4\mu_0}{\kappa + 1} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) = \int_a^b k_{33}(x, y, t) f_3(t) dt, \quad (15)$$

formunda yazılabilir. Burada,

$$k_{33}(x, y, t) = \frac{2}{\pi(\kappa + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{33}(\rho, x) e^{-i\rho(t-y)} d\rho, \quad (16)$$

$$\phi_{33}(\rho, x) = i\rho \sum_{j=1}^4 \psi_j(\rho) e^{s_j x}, \quad (17)$$

şeklinde tanımlanmıştır. İntegral sınırları $0 - \infty$ olarak değiştirilirse

$$k_{33}(x, y, t) = \frac{2}{\pi(\kappa + 1)} \left\{ \int_0^{\infty} K_{331}(\rho, x) \cos(\rho(y-t)) d\rho + \int_0^{\infty} K_{332}(\rho, x) \sin(\rho(y-t)) d\rho \right\} \quad (18)$$

şeklinde elde edilir. Burada:

$$K_{331}(\rho, x) = \phi_{33}(\rho, x) + \phi_{33}(-\rho, x) \quad (19)$$

$$K_{332}(\rho, x) = i \{ \phi_{33}(\rho, x) - \phi_{33}(-\rho, x) \} \quad (20)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu ifadelerin $\rho \rightarrow \infty$ için asimtotik açılımları

$$K_{331}^{\infty}(\rho, x) = \left\{ c_{10} + \frac{c_{11}}{\rho} + \frac{c_{12}}{\rho^2} + \dots \right\} e^{-\rho x} \quad (21)$$

$$K_{332}^{\infty}(\rho, x) = \left\{ c_{20} + \frac{c_{21}}{\rho} + \frac{c_{22}}{\rho^2} + \dots \right\} e^{-\rho x} \quad (22)$$

şeklinde elde edilmiştir ve ilk terimler

$$c_{10} = -\frac{1}{2} \eta(\kappa - 1), \quad c_{11} = \frac{\eta(\kappa + 1)\gamma}{4}, \quad (23a,b)$$

$$c_{20} = \frac{1}{2}(\kappa + 1), \quad c_{21} = -\frac{(\kappa + 5)}{4}\gamma, \quad (24a,b)$$

şeklinde dir. İlk terimlerin $K_{331}(\rho, x)$ ve $K_{332}(\rho, x)$ ifadelerinden çıkartılıp eklenmesiyle; $x \rightarrow 0$ limit alınmasıyla ve bazı integrallerin kapalı form ifadelerinin (Ek B) kullanılmasıyla;

$$k_{33}(0, y, t) = -\frac{\eta(\kappa - 1)}{(\kappa + 1)} \delta(t - y) - \frac{1}{\pi} \frac{\text{sign}(t - y)}{(t - y)} + \frac{2}{\pi(\kappa + 1)} \int_0^{\infty} [K_{332}(0, \rho) - c_{20}] \sin(\rho(y - t)) d\rho + \frac{2}{\pi(\kappa + 1)} \int_0^{\infty} [K_{331}(0, \rho) - c_{10}] \cos(\rho(y - t)) d\rho \quad (25)$$

şeklinde elde edilir. Bundan sonra asimtotik açılımdan gelen diğer terimler $k_{33}(0, y, t)$ 'den çıkarılabilir. İlk olarak (25) ifadesini, $0 - \infty$ aralığını kosinüs içeren integraller için $0 - A_1$ ve $A_1 - \infty$, sinüs içeren integraller için $0 - A_2$ ve $A_2 - \infty$ şeklinde bölerek; aşağıdaki gibi tekrar yazarak daha sonra da diğer terimleri yeni elde edilen integrallerden çıkarıp ekleyerek ve bazı integrallerin değerlerini (Ek B) yerine yazarak, aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$k_{33}(0, y, t) = -\frac{\eta(\kappa - 1)}{(\kappa + 1)} \delta(t - y) - \frac{1}{\pi} \frac{\text{sign}(t - y)}{(t - y)} + \frac{2}{\pi(\kappa + 1)} \left\{ \int_0^{A_1} [K_{331}(0, \rho) - c_{10}] \cos(\rho(y - t)) d\rho + \int_{A_1}^{\infty} [K_{331}^{\infty}(0, \rho) - c_{10} - c_{11}/\rho] \cos(\rho(y - t)) d\rho + \int_0^{A_2} [K_{332}(0, \rho) - c_{20} - c_{21}/\rho] \sin(\rho(y - t)) d\rho + \int_{A_2}^{\infty} [K_{332}^{\infty}(0, \rho) - c_{20} - c_{21}/\rho] \sin(\rho(y - t)) d\rho - c_{11} \text{Ci}(A_1(t - y)) - c_{21} \frac{\pi}{2} \text{sign}(t - y) \right\} \quad (26)$$

Burada Ci kosinüs integralidir ve açılımı:

$$\text{Ci}(A_1(t - y)) = \gamma_0 + \ln |A_1(t - y)| + \int_0^{|A_1(t-y)|} \frac{\cos \alpha - 1}{\alpha} d\alpha \quad (27)$$

şeklinde dir, γ_0 ise Euler sayıdır.

($\gamma_0 = 0.5772156649$).

$a < y < b$ aralığını $-1 < r < 1$ şeklinde normalize etmek için;

$$y = \frac{b-a}{2}r + \frac{b+a}{2}, \quad -1 < r < 1, \quad (28a)$$

$$t = \frac{b-a}{2}s + \frac{b+a}{2}, \quad -1 < s < 1, \quad (28b)$$

$$l = \frac{b-a}{2}, \rho = \frac{\rho^*}{l}, \gamma = \frac{\gamma^*}{l}, A = \frac{A^*}{l}, h = l h^* \quad (29a,e)$$

değişken değiştirmeleri yapılabilir. $k_{33}(0, y, t)$ ifadesini (15) denkleminde yerine yazıldığında aşağıdaki tekil integral denklemi elde edilir:

$$\omega \phi(r) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(s)}{s-r} ds + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(s, r) \phi(s) ds = 0. \quad (30)$$

Bu form 2. tip tekil integral denklemi (singular integral equation of 2nd kind)'nin genel ifadesidir. Düzgün profilli rijit zımba için kaplama yüzeyinde u yer değiştirme bileşeni sabittir dolayısıyla

$$f(r) = 0, \quad -1 < r < 1 \quad (31)$$

olarak alınmıştır. (30) ile ifade edilen tekil integral denkleminin nümerik çözümü için Jacobi polinomları kullanılabilir. (30) nolu denklemde

$$\omega = -\frac{\eta(\kappa-1)}{(\kappa+1)}, \quad (32a)$$

$$\begin{aligned} k(s, r) = & \int_0^{A_1^*} [K_{331}^*(0, \rho^*) - c_{10}] \cos(\rho^*(r-s)) d\rho^* \\ & - c_{11}^* \left(\gamma_0 + \ln |A_1^*(s-r)| + \int_0^{|A_1^*(s-r)|} \frac{\cos \alpha - 1}{\alpha} d\alpha \right) \\ & + \int_{A_1^*}^{\infty} \left[\frac{C_{12}^*}{\rho^{*2}} + \frac{C_{13}^*}{\rho^{*3}} + \dots \right] \cos(\rho^*(r-s)) d\rho^* \\ & + \int_0^{A_2^*} \left[K_{332}^*(0, \rho^*) - c_{20} - \frac{c_{21}^*}{\rho^*} \right] \sin(\rho^*(r-s)) d\rho^* \\ & + \int_{A_2^*}^{\infty} \left[\frac{C_{22}^*}{\rho^{*2}} + \frac{C_{23}^*}{\rho^{*3}} + \dots \right] \sin(\rho^*(r-s)) d\rho^* \\ & - c_{21}^* \frac{\pi}{2} \text{sign}(s-r), \end{aligned} \quad (32b)$$

$$\phi(s) = f_3^*(s), \quad f_3^*(s) = f_3 \left(\frac{b-a}{2}s + \frac{b+a}{2} \right) \quad (32c)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu eşitliklerde ise;

$$c_{11}^* = \frac{\eta(\kappa+1)\gamma^*}{4}, \quad c_{21}^* = -\frac{(\kappa+5)}{4}\gamma^*, \quad (33)$$

$$K_{331}^*(0, \rho^*) = K_{331}(0, \rho^*/l) \quad (34)$$

$$K_{332}^*(0, \rho^*) = K_{332}(0, \rho^*/l) \quad (35)$$

şeklinde ifade edilir. A_1^*, A_2^*, ρ^* ve γ^* ise (29) numaralı eşitlikler ile verilmiştir.

İntegral denkleminin temel fonksiyonu ve indeksi aşağıdaki gibidir:

$$w(s) = (1-s)^\alpha (1+s)^\beta, \quad \kappa_0 = -(\alpha + \beta), \quad (36)$$

$$\alpha = \frac{\theta}{\pi} + N_0, \quad \beta = -\frac{\theta}{\pi} + M_0, \quad \theta = \arctan \frac{1}{\omega \eta}. \quad (37)$$

Burada N_0 ve M_0 tamsayılarıdır ve problemin fiziği ile ilgilidirler [10]. Düzgün profilli rijit zımba için $\kappa_0 = 1$ 'dir.

$w(s)$ 'nin Jacobi polinomlarının ağırlık fonksiyonu olduğu dikkate alınırsa tekil integral denklemin çözümü aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \phi(s) &= G(s)w(s), \\ G(s) &= \sum_0^\infty c_n P_n^{(\alpha, \beta)}(s), \quad -1 < s < 1. \end{aligned} \quad (38)$$

(38) ifadesinin integral denkleminde yerine yazılmasıyla;

$$\begin{aligned} \sum_0^\infty c_n \left[-2^{-\kappa_0} \frac{-1}{\sin \pi \alpha} P_{n-\kappa_0}^{(-\alpha, -\beta)}(r) + \right. \\ \left. \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_n(r) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) w(s) ds \right] = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

elde edilir. (39) denkleminde yazılırken Jacobi polinomlarının aşağıdaki özelliği kullanılmıştır [10] :

$$\begin{aligned} \omega P_n^{(\alpha, \beta)}(r) w(r) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(s) \frac{w(s)}{s-r} ds \\ = -2^{-\kappa_0} \frac{-1}{\sin \pi \alpha} P_{n-\kappa_0}^{(-\alpha, -\beta)}(r). \end{aligned} \quad (40)$$

Problemin indeksi $\kappa_0 = 1$ olduğundan dolayı (39) denklemi

$$\sum_0^{\infty} c_n \left[-\frac{1}{2\sin\pi\alpha} P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(r) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_n(r) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) w(s) ds \right] = 0 \quad (41)$$

şekline indirgenir. 0'dan N 'e kadar denklemler yazılırsa N adet denklem için $N+1$ adet bilinmeyen sabit (c_0, c_1, \dots, c_N) elde edilir. Çözüm için (41)'e ek olarak (14)'de verilen denge denklemi kullanılır:

$$\int_a^b \sigma_{xx}(0, t) dt = -P. \quad (42)$$

$-\sigma_{xx}(0, t) = 2\sigma_0\phi(s)$, $\sigma_0 = P/(b-a)$ tanımlamaları yapılarak (42) şu şekilde yazılır:

$$\int_{-1}^1 \phi(s) ds = 1, \quad (43)$$

(38) ifadesi yardımıyla bu denklem

$$\sum_{n=0}^N c_n \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(s) w(s) ds = 1, \quad (44)$$

şeklinde yazılır. Ortogonal polinomların ortogonalite özelliği ile (39) ve (44) denklemleri aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\sum_0^{\infty} c_n \left[\frac{1}{2\sin\pi\alpha} P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(r_i) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_n(r_i) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) w(s) ds \right] = 0, \quad (45a)$$

$$c_0 \theta_0 = 1. \quad (45b)$$

(45a) denklemlerinde $r_i (i=1, \dots, N)$ terimleri

$$P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(r_i) = 0, \quad i=1, \dots, N \quad (46)$$

eşitliğinin kökleri olarak seçilebilir. θ_0 ise

$$\theta_0^{(\alpha, \beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \quad (47)$$

şeklinde tanımlanmıştır [10]. (45a) denkleminde $(-1, 1)$ aralığındaki integral,

$$\int_{-1}^1 K_n(r_i) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) w(s) ds \approx \sum_{k=1}^N A_k K_n(r_k), \quad (48)$$

$P_N^{-\alpha, -\beta}(r_k) = 0$, $(k=1, 2, \dots)$ bağıntısıyla hesaplanabilir. Böylece (45) denklemleri cebirsel denklem sistemine indirgenir ve Gauss Eliminasyon Metoduyla $c_i, (i=0, \dots, N)$ katsayıları hesaplanır. $-\sigma_{xx}(0, t) = 2\sigma_0\phi(s)$ ile verilen gerilme ifadesinde, (1.40) ile tanımlanan $\phi(s)$ ifadesi yerine yazıldığında hesaplanan $c_i, (i=0, \dots, N)$ değerleri ile birlikte temas gerilmesi dağılımı elde edilmiş olur.

5. YÜZEYALTI GERİLMELERİ (SUBSURFACE STRESSES)

Bu bölümde FDM kaplamada $y=0$ 'da oluşan normal ve kayma gerilmelerinin $\sigma_{yy}(x, 0), \sigma_{xy}(x, 0)$, $(0 < x < d, d < h)$ ifadeleri türetilecektir. Bu gerilmeler genel olarak aşağıdaki formda ifade edilir.

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \int_a^b k_{13}(x, y, t) f_3(t) dt, \quad (49)$$

$$\sigma_{xy}(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \int_a^b k_{23}(x, y, t) f_3(t) dt. \quad (50)$$

5.1. Normal Gerilme Dağılımı (Normal Stress Distribution)

(49) ile verilen normal gerilme ifadesinde,

$$k_{13}(x, y, t) = \frac{e^{\gamma x}}{2\pi(\kappa-1)} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{13}(\rho, x) e^{-i\rho(t-y)} d\rho, \quad (51)$$

$$\phi_{13}(\rho, x) = \sum_{j=1}^4 \{s_j(3-\kappa) + i\rho N_j(\kappa+1)\} \psi_j(\rho) e^{s_j x}, \quad (52)$$

şeklinindedir. İntegral sınırları $0 - \infty$ olarak değiştirilirse

$$k_{13}(x, 0, t) = \frac{e^{\gamma x}}{2\pi(\kappa-1)} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} K_{131}(\rho, x) \cos(\rho t) \\ -K_{132}(\rho, x) \sin(\rho t) \end{array} \right\} d\rho, \quad (53)$$

olarak elde edilir. Burada;

$$K_{131}(\rho, x) = \phi_{13}(\rho, x) + \phi_{13}(-\rho, x), \quad (54)$$

$$K_{332}(\rho, x) = i\{\phi_{13}(\rho, x) - \phi_{13}(-\rho, x)\}, \quad (55)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu ifadelerin $\rho \rightarrow \infty$ için asimtotik açılımları

$$K_{131}^{\infty}(\rho, x) = \left\{ d_1 \rho + d_{10} + \frac{d_{11}}{\rho} + \dots \right\} e^{-(\gamma/2+\rho)x}, \quad (56)$$

$$K_{132}^{\infty}(\rho, x) = \left\{ d_2 \rho + d_{20} + \frac{d_{21}}{\rho} + \dots \right\} e^{-(\gamma/2+\rho)x}. \quad (57)$$

formunda elde edilmiştir ve ilk terimler aşağıda verilmiştir.

$$d_1 = \frac{4(1-\kappa)}{\delta} \sin(\delta x/2), \quad d_2 = \frac{4\eta(1-\kappa)}{\delta} \sin(\delta x/2) \quad (58)$$

4. Bölüm'de anlatılan işlemlere benzer işlemler kullanılarak $k_{13}(x, 0, t)$ elde edilir (Ek C1).

$k_{13}(x, 0, t)$ ifadesini (49) numaralı eşitlikde yerine yazdığımızda $0 < x < d$ aralığını $-1 < r < 1$ şeklinde normalize etmek için aşağıdaki değişken değiştirmeleri kullanılır:

$$x = \frac{d}{2}r + \frac{d}{2}, \quad -1 < r < 1 \quad (59a)$$

$$t = \frac{b-a}{2}s + \frac{b+a}{2}, \quad -1 < s < 1. \quad (59b)$$

5.2. Kayma Gerilmesi Dağılımı (Shear Stress Distribution)

(50) ile verilen kayma gerilmesi dağılımı ifadesinde

$$k_{23}(x, y, t) = \frac{e^{\gamma x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{23}(\rho, x) e^{-i\rho(t-y)} d\rho, \quad (60)$$

$$\phi_{23}(\rho, x) = \sum_{j=1}^4 (i\rho + N_j s_j) \psi_j(\rho) e^{s_j x}, \quad (61)$$

şekindedir. İntegral sınırları $0 - \infty$ olarak değiştirilirse

$$k_{23}(x, 0, t) = \frac{e^{\gamma x}}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} K_{231}(\rho, x) \cos(\rho t) \\ -K_{232}(\rho, x) \sin(\rho t) \end{array} \right\} d\rho, \quad (62)$$

formunda elde edilir. Burada;

$$K_{231}(\rho, x) = \phi_{23}(\rho, x) + \phi_{23}(-\rho, x), \quad (63)$$

$$K_{232}(\rho, x) = i \{ \phi_{23}(\rho, x) - \phi_{23}(-\rho, x) \}. \quad (64)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu ifadelerin $\rho \rightarrow \infty$ için asimtotik açılımları aşağıda verilmiştir:

$$K_{231}^{\infty}(\rho, x) = \left\{ g_1 \rho + g_{10} + \frac{g_{11}}{\rho} + \dots \right\} e^{-(\gamma/2+\rho)x} \quad (65)$$

$$K_{232}^{\infty}(\rho, x) = \left\{ g_2 \rho + g_{20} + \frac{g_{21}}{\rho} + \dots \right\} e^{-(\gamma/2+\rho)x}. \quad (66)$$

İlk terimler ise

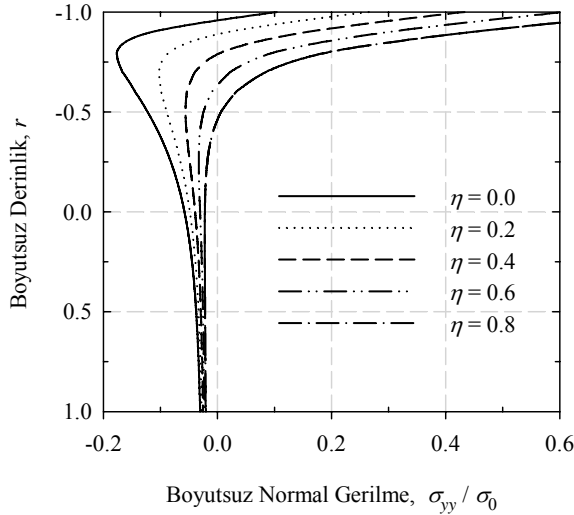
$$g_1 = -\frac{4\eta}{\delta} \sin(\delta x/2), \quad g_2 = \frac{4}{\delta} \sin(\delta x/2), \quad (67)$$

şeklinde elde edilmiştir. $k_{13}(x, 0, \rho)$ 'e benzer şekilde elde edilir (Ek C2). $k_{23}(x, 0, t)$ ifadesini (50) denkleminde yerine yazdığımızda $0 < x < d$ aralığını $-1 < r < 1$ şeklinde normalize etmek için (59) ile verilen değişken değiştirmeler kullanılır.

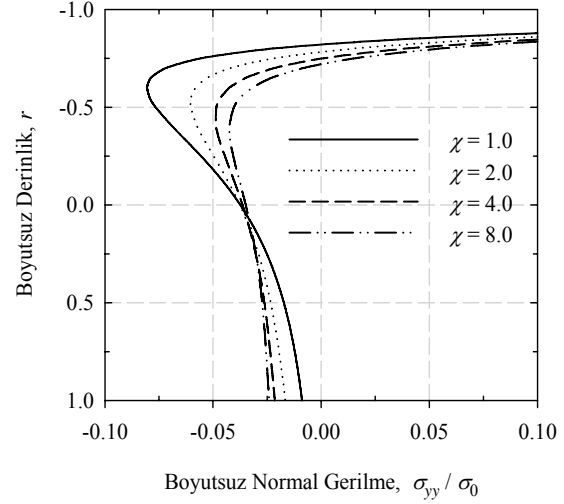
6. SAYISAL SONUÇLAR (NUMERICAL RESULTS)

Bu bölümde; sürtünme katsayısı, malzeme özellikleri, zımba konumu ve zımba genişliği gibi faktörlerin yüzeyaltında oluşan normal ve kayma gerilmeleri dağılımları üzerindeki etkileri incelenmiştir. Bunun için rijit zımbanın uç koordinatları a/d ve b/d şeklinde boyutsuzlandırılmıştır. Ayrıca heterojenlik sabiti γd ve FDM kaplama kalınlığı h/d şeklinde boyutsuz formda kullanılmıştır. Grafiklerde χ , homojen gövdenin kayma modülü ile FDM yüzeyindeki kayma modülü arasındaki oran olarak tanımlanmıştır ($\chi = \mu_2 / \mu_0$). Hesaplamalarda Kolosov sabiti $\kappa = 1.8$ alınmıştır. Bunlara ek olarak grafiklerde r boyutsuz düşey koordinatı göstermektedir. ($r = 2(x/d) - 1$)

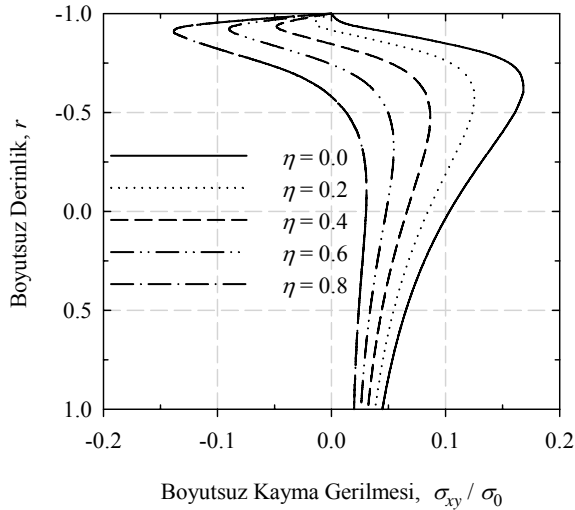
Şekil 2 ve 3'de sürtünme katsayısının normal ve kayma gerilme dağılımları üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Şekil 2'de yüzeye yakın olan üst kısımlarda gerilmelerin daha büyük olduğu, belli bir değerden sonra yön değiştirdiği, yüzeyden uzaklaştıkça da azalarak sifira yaklaştığı görülmektedir. Sürtünme katsayısı arttıkça normal gerilmeler negatiften pozitif değerlere geçmektedir. Dolayısıyla yüzeyde $y = 0$ 'da bir çatlak bulunması halinde, büyük sürtünme katsayıları için çatlak ilerlemesi meydana gelebilecektir.



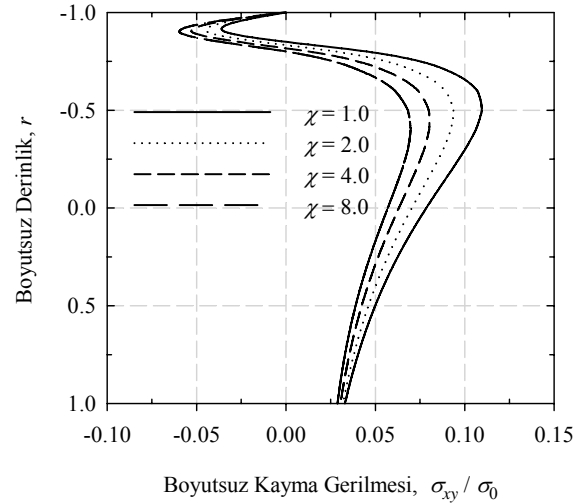
Şekil 2. Sürtünme katsayısının yüzeyaltı normal gerilme dağılımına etkisi, (Effect of coefficient of friction on the subsurface shear stresses) $\chi = \mu_2 / \mu_0 = 8$, $h/d = 1.5$, $a/d = 0.1$, $b/d = 0.4$



Şekil 4. Kayma modülleri oranının yüzeyaltı normal gerilme dağılımına etkisi, (Effect of shear modulus ratio on the subsurface shear stresses) $\chi = \mu_2 / \mu_0$, $h/d = 1.5$, $a/d = 0.1$, $b/d = 0.4$, $\eta = 0.5$



Şekil 3. Sürtünme katsayısının yüzeyaltı kayma gerilmesi dağılımına etkisi, (Effect of coefficient of friction on the subsurface shear stresses) $\chi = \mu_2 / \mu_0 = 8$, $h/d = 1.5$, $a/d = 0.1$, $b/d = 0.4$



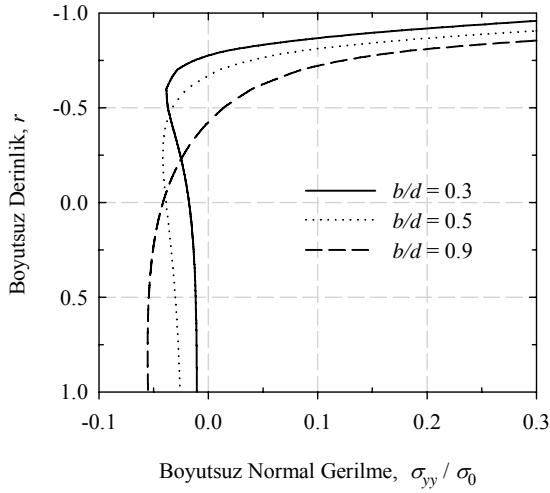
Şekil 5. Kayma modülleri oranının yüzeyaltı kayma gerilmesi dağılımına etkisi, (Effect of shear modulus ratio on the subsurface shear stresses) $\chi = \mu_2 / \mu_0$, $h/d = 1.5$, $a/d = 0.1$, $b/d = 0.4$, $\eta = 0.5$

Şekil 4 ve 5'de $h/d = 1.5$ alınarak kayma modülü oranının gerilme dağılımlarına etkileri gösterilmiştir. Normal gerilmeler için en küçük ve kayma gerilmeleri için en büyük değerler kayma modülü oranının bire eşit olduğu durumda elde edilmiştir. Kayma modülü oranı 1'den 8'e doğru arttıkça boyutsuz normal gerilmenin minimum değeri artmakta, boyutsuz kayma gerilmesinin maksimum değeri ise azalmaktadır.

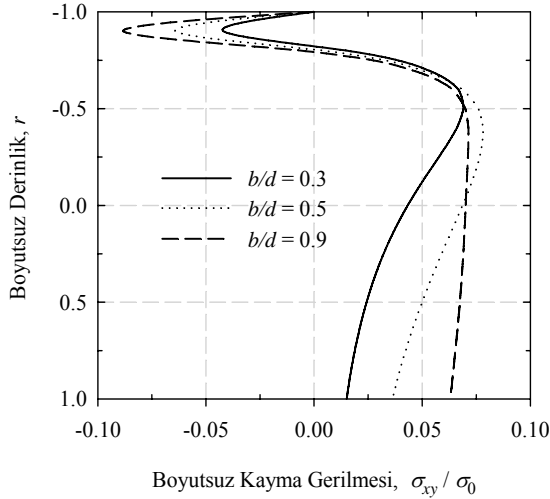
Şekil 6 ve 7'de $h/d = 2$ seçilerek zimba genişliğinin etkileri incelenmiştir. Özellikle serbest yüzeye yakın olan bölgede, zimba genişliği arttıkça, diğer bir deyişle b/d değeri büyüdükçe, boyutsuz normal

gerilme artmakta, boyutsuz kayma gerilmesi ise azalmaktadır. Dikkat edilmesi gereken bir diğer nokta da, b/d büyüdükçe boyutsuz kayma gerilmesinde azalma olmakla birlikte mutlak değerde artma olduğudur.

Şekil 8 ve Şekil 9'da ise $h/d = 1.5$ alınmış, a/d ve b/d değiştirilerek zimba genişliği sabit tutulmuştur. Bu şekilde zimba konumunun normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri üzerindeki etkilerini inceleyebilmek mümkün olmaktadır. Şekiller incelendiğinde beklendiği gibi zimba orijine yaklaştıkça her iki gerilmenin şiddetinde de önemli ölçüde artış meydana geldiği görülmektedir. Zimba uzaklığı arttıkça gerilme şiddetleri de azalmaktadır.



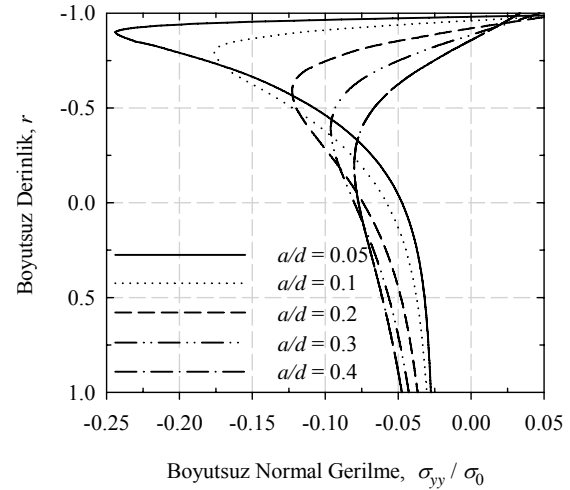
Şekil 6. Zımba genişliğinin yüzeyaltı normal gerilme dağılımına etkisi, (Effect of punch length on the subsurface normal stresses) $\chi = \mu_2 / \mu_0 = 8$, $h/d = 2$, $a/d = 0.1$, $\eta = 0.5$



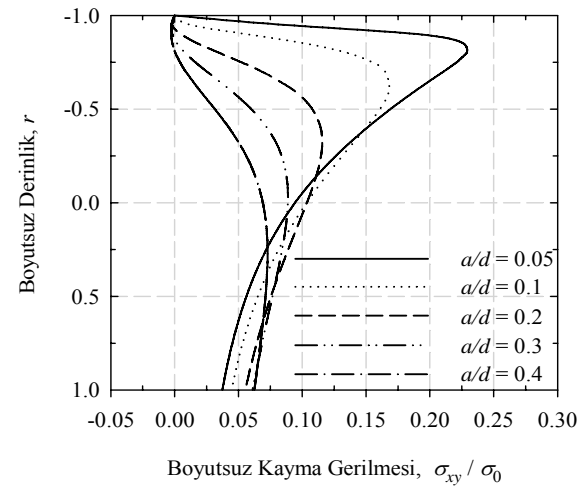
Şekil 7. Zımba genişliğinin yüzeyaltı kayma gerilmesi dağılımına etkisi, (Effect of punch length on the subsurface shear stresses) $\chi = \mu_2 / \mu_0 = 8$, $h/d = 2$, $a/d = 0.1$, $\eta = 0.5$

7. SONUÇ (CONCLUSION)

Bu çalışmada sürtünmeli ve düzgün profile sahip rijit bir zımba etkisinde FDM kaplamada zımba genişliği, zımba konumu, heterojenlik sabiti ve sürtünme katsayısı gibi bazı parametrelerin zımbadan belli bir uzaklıkta yüzeyaltında oluşan gerilme dağılımı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Bu gerilmeler, meydana geldiği bölgelerde bir çatlak oluşmasına veya var olan bir çatlak ilerlemesine neden olabileceği için önemlidir. Sürtünme katsayısı arttıkça, diğer bir deyişle uygulanan yatay kuvvet büyüdükçe, normal gerilmelerin pozitif hale geldiği gösterilmiştir. Bu nedenle daha önceki çalışmalarda elde edilen sonuçlara paralel olarak (Bkz. Dağ ve Erdoğan [7]) yüksek sürtünme katsayısının çatlak başlangıcı ve ilerlemesine yol açabileceği sonucuna ulaşılmıştır. Kayma modülü oranının da yüzeyaltı



Şekil 8. Zımba konumunun yüzeyaltı normal gerilme dağılımına etkisi, (Effect of punch distance on the subsurface normal stresses), $h/d = 1.5$, $\eta = 0.0$, $\chi = \mu_2 / \mu_0 = 8$, $(b-a)/d = 0.3$



Şekil 9. Zımba konumunun yüzeyaltı kayma gerilmesi dağılımına etkisi, (Effect of punch distance on the subsurface shear stresses), $h/d = 1.5$, $\chi = \mu_2 / \mu_0 = 8$, $\eta = 0.0$, $(b-a)/d = 0.3$

gerilmelerini önemli ölçüde etkilediği görülmüştür. 6. Bölüm'de verilen 5.Şekil incelendiğinde yüzeyaltında oluşan normalize edilmiş maksimum kayma gerilmesinin kayma modülü arttıkça azaldığı görülmektedir. Bu nedenle bu çalışmada sunulan metodun kapsamı genişletilerek ve bir optimizasyon algoritması kullanılarak ortamdaki maksimum asal gerilmeleri ya da von Mises gerilmelerini minimize edebilecek kayma modülü oranlarını bulmak mümkün olabilecektir.

TEŞEKKÜR (ACKNOWLEDGEMENT)

Bu çalışma, MAG-107M053 kodlu TÜBİTAK-1001 projesi çerçevesinde TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir.

SEMBOLLER (NOMENCLATURE)

μ	kayma modülü
η	sürtünme katsayısı
σ_{ij}	gerilme bileşenleri
γ	heterojenlik sabiti
κ	Kolosov sabiti
ν	Poisson oranı
h	FDM kaplama kalınlığı
u, v	yer değiştirme bileşenleri
a, b	rijit zimba ucu koordinatları
d	derinlik

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Suresh, S. ve Mortensen, A., **Fundamentals of Functionally Graded Materials: Processing and Thermomechanical behavior of Graded Metals and Metal-ceramic Composites**, IOM Communications Ltd., London, 1998.
2. Suresh, S., Olsson, M., Padture, NP. ve Jitcharoen, J., "Engineering the Resistance to Sliding-Contact Damage Through Controlled Gradients in Elastic Properties at Contact Surfaces", **Acta Materialia**, 47, 3915-3926, 1999.
3. Suresh, S., "Graded Materials For Resistance to Contact Deformation and Damage", **Science**, 292, 2447-2451, 2001.
4. Giannakopoulos, A. ve Suresh, S., "Indentation of Solids With Gradients in Elastic Properties: Part I. Point Force Solution", **International Journal of Solids and Structures**, 34, 19, 2357-2392, 1997a.
5. Giannakopoulos, A. ve Suresh, S., "Indentation of Solids With Gradients in Elastic Properties: Part II. Axisymmetric Indenters", **International Journal of Solids and Structures**, 34, 19, 2393-2428, 1997b.
6. Giannakopoulos, A. ve Pallot, P., "Two Dimensional Contact Analysis of Elastic Graded Materials", **Journal of Mech. Phys. Solids**, 48, 1597-1631, 2000.
7. Dağ, S. ve Erdoğan, F., "Crack and Contact Problems in Functionally Graded Materials", **Ceramic Transactions**, 114, 739-746, 2000.
8. Güler, M.A. ve Erdoğan, F., "Contact Mechanics of Graded Coatings", **International Journal of Solids and Structures**, 41, 3865-3889, 2004.
9. Yang, J. ve Ke, L.L. "Two Dimensional Contact Problem for a Coating Graded Layer - Substrate Structure Under a Rigid Cylindrical Punch", **International Journal of Mechanical Sciences**, 50, 985-994, 2008.
10. Muskhelishvili, NI., **Singular Integral Equation**, Leyden: Noordhoff, 1953.

EK A – Gerilme ve Yer Değiştirme İfadeleri

FDM için ($0 < x < h$);

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 M_j e^{s_j x + i\rho y} d\rho, \quad (\text{A1})$$

$$v_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 M_j N_j e^{s_j x + i\rho y} d\rho, \quad (\text{A2})$$

$$\sigma_{xx1}(x, y) = \frac{\mu_1(x)}{\kappa-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 [(3-\kappa)s_j N_j + i\rho(\kappa+1)] M_j e^{s_j x + i\rho y} d\rho, \quad (\text{A3})$$

$$\sigma_{yy1}(x, y) = \frac{\mu_1(x)}{\kappa-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 [(3-\kappa)i\rho + (\kappa+1)s_j N_j] M_j e^{s_j x + i\rho y} d\rho, \quad (\text{A4})$$

$$\sigma_{xy1}(x, y) = \mu_1(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 (s_j + i\rho N_j) M_j e^{s_j x + i\rho y} d\rho, \quad (\text{A5})$$

$$\frac{\partial u_1(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} i\rho \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 M_j e^{s_j x + i\rho y} d\rho, \quad (\text{A6})$$

Homojen gövde için ($h < x < \infty$);

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (R_3 + xR_4) e^{-|\rho|x + i\rho y} d\rho, \quad (\text{A7})$$

$$v_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (S_3 + xS_4) e^{-|\rho|x + i\rho y} d\rho, \quad (\text{A8})$$

$$\sigma_{xx2}(x, y) = \frac{\mu_2}{\kappa-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [i\rho(3-\kappa)(S_3 + xS_4) + (1+\kappa)(R_4(1-x|\rho|) - R_3|\rho|)] e^{-|\rho|x + i\rho y} d\rho, \quad (\text{A9})$$

$$\sigma_{yy2}(x, y) = \frac{\mu_2}{\kappa-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [i\rho(1+\kappa)(S_3 + xS_4) + (3-\kappa)(R_4(1-x|\rho|) - R_3|\rho|)] e^{-|\rho|x + i\rho y} d\rho, \quad (\text{A10})$$

$$\sigma_{xy2}(x, y) = \mu_2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [i\rho(R_3 + xR_4) - S_3|\rho| + S_4(1-x|\rho|)] e^{-|\rho|x + i\rho y} d\rho, \quad (\text{A11})$$

$$\frac{\partial u_2(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} i\rho \int_{-\infty}^{\infty} (R_3 + xR_4) e^{-|\rho|x + i\rho y} d\rho. \quad (\text{A12})$$

EK B

Aşağıda bu çalışmada kullanılan bazı integral ifadeleri verilmektedir.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\rho x} \cos(\rho(y-t)) d\rho = \pi \delta(t-y) \quad (\text{B1})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\rho x} \sin(\rho(y-t)) d\rho = -\frac{\text{sign}(t-y)}{(t-y)} \quad (\text{B2})$$

$$\int_{A_1}^{\infty} \frac{1}{\rho} \cos(\rho(y-t)) d\rho = -\text{Ci}(A_1(t-y)) \quad (\text{B3})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} \sin(\rho(y-t)) d\rho = -\frac{\pi}{2} \text{sign}(t-y) \quad (\text{B4})$$

$$\int_0^{\infty} \rho e^{-(\rho+\gamma/2)x} \cos(\rho t) d\rho = \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} e^{-x\gamma/2} \quad (\text{B5})$$

$$\int_0^{\infty} \rho e^{-(\rho+\gamma/2)x} \sin(\rho t) d\rho = \frac{2tx}{(x^2 + t^2)^2} e^{-x\gamma/2} \quad (\text{B6})$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(\rho+\gamma/2)x} \cos(\rho t) d\rho = \frac{x}{(x^2 + t^2)} e^{-x\gamma/2} \quad (\text{B7})$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(\rho+\gamma/2)x} \sin(\rho t) d\rho = \frac{t}{(x^2 + t^2)} e^{-x\gamma/2} \quad (\text{B8})$$

$$\int_{A_{13}}^{\infty} \frac{1}{\rho} e^{-(\rho+\gamma/2)x} \cos(\rho t) d\rho = e^{-\gamma x/2} \left[\frac{1}{2} \Gamma(0, (x-it)A_{131}) + \frac{1}{2} \Gamma(0, (x+it)A_{131}) \right] \quad (\text{B9})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} e^{-(\rho+\gamma/2)x} \sin(\rho t) d\rho = \arctan\left(\frac{t}{x}\right) e^{-x\gamma/2} \quad (\text{B10})$$

EK C – Yüzealtı Gerilme İfadeleri İçin Tekil İntegral Denklemi Kernelleri

$$\begin{aligned}
k_{13}(x, 0, t) = & \frac{e^{\gamma x}}{2\pi(\kappa-1)} \left\{ \int_0^{A_{131}} \left[K_{131}(\rho, x) - (d_1\rho + d_{10})e^{-(\rho+\gamma/2)x} \right] \cos(\rho t) d\rho \right. \\
& + \int_{A_{131}}^{\infty} \left(\frac{d_{12}}{\rho^2} + \frac{d_{13}}{\rho^3} + \frac{d_{14}}{\rho^4} + \dots \right) e^{-(\rho+\gamma/2)x} \cos(\rho t) d\rho \\
& - \int_0^{A_{132}} \left[K_{132}(\rho, x) - (\rho d_2 + d_{20} + d_{21}/\rho) e^{-(\rho+\gamma/2)x} \right] \sin(\rho t) d\rho \\
& \left. - \int_{A_{132}}^{\infty} \left(\frac{d_{22}}{\rho^2} + \frac{d_{23}}{\rho^3} + \frac{d_{24}}{\rho^4} + \dots \right) e^{-(\rho+\gamma/2)x} \sin(\rho t) d\rho \right\} \\
& + \frac{e^{x\gamma/2}}{2\pi(\kappa-1)} \left\{ \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} d_1 - \frac{2tx}{(x^2 + t^2)^2} d_2 + \frac{x}{(x^2 + t^2)} d_{10} - \frac{t}{(x^2 + t^2)} d_{20} \right. \\
& \left. - \arctan\left(\frac{t}{x}\right) d_{21} + d_{11} \left[\frac{1}{2} \Gamma(0, (x-it) A_{131}) + \frac{1}{2} \Gamma(0, (x+it) A_{131}) \right] \right\}, \quad 0 < x < d
\end{aligned} \tag{C1}$$

$$\begin{aligned}
k_{23}(x, 0, t) = & \frac{e^{\gamma x}}{2\pi} \left\{ \int_0^{A_{231}} \left[K_{231}(\rho, x) - (g_1\rho + g_{10})e^{-(\rho+\gamma/2)x} \right] \cos(\rho t) d\rho \right. \\
& + \int_{A_{231}}^{\infty} \left(\frac{g_{12}}{\rho^2} + \frac{g_{13}}{\rho^3} + \frac{g_{14}}{\rho^4} + \dots \right) e^{-(\rho+\gamma/2)x} \cos(\rho t) d\rho \\
& - \int_{A_{232}}^{\infty} \left(\frac{g_{22}}{\rho^2} + \frac{g_{23}}{\rho^3} + \frac{g_{24}}{\rho^4} + \dots \right) e^{-(\rho+\gamma/2)x} \sin(\rho t) d\rho \left. \right\} \\
& - \int_0^{A_{232}} \left[K_{232}(\rho, x) - (\rho g_2 + g_{20} + g_{21}/\rho) e^{-(\rho+\gamma/2)x} \right] \sin(\rho t) d\rho \\
& + \frac{e^{x\gamma/2}}{2\pi} \left\{ \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} g_1 - \frac{2tx}{(x^2 + t^2)^2} g_2 + \frac{x}{(x^2 + t^2)} g_{10} - \frac{t}{(x^2 + t^2)} g_{20} \right. \\
& \left. - \arctan\left(\frac{t}{x}\right) g_{21} + g_{11} \left[\frac{1}{2} \Gamma(0, (x-it) A_{231}) + \frac{1}{2} \Gamma(0, (x+it) A_{231}) \right] \right\}, \quad 0 < x < d,
\end{aligned} \tag{C2}$$

