GÜFBED/*GUSTIJ* (2019) 9 (3): 582-587
DOI: 10.17714/gumusfenbil.551030 Araştırma Makalesi / *Research Article*

$C_q(X)$ Uzayının Sayılabilirlik Özellikleri Üzerine Bazı Sonuçlar

Some Results on Countability Properties of $C_q(X)$

İsmail OSMANOĞLU*
Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 50300, Nevşehir

• Geliş tarihi / *Received*: 08.04.2019 • Düzeltilerek geliş tarihi / *Received in revised form*: 13.05.2019 • Kabul tarihi / *Accepted*: 21.05.2019

Öz
Bu makalenin amacı C(X) kümesi üzerindeki yarı kompakt-açık topolojinin ikinci sayılabilirlik, ayrılabilirlik, $\mathfrak{P}_0$-uzay özelliği, $\aleph_0$-uzay özelliği ve kozmik uzay özelliği gibi sayılabilirlik özellikleri için bazı sonuçlar verilmiştir. Son olarak bu sonuçlar C(X) kümesi üzerindeki clp-kompakt-açık topoloji için de elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Ayrılabilirlik, Fonksiyon uzayı, İkinci Sayılabilirlik, Kozmik Uzay, $\mathfrak{P}_0$-uzayı, $\aleph_0$-uzayı

Abstract
The aim of this article is to study the countability properties of the quasi compact-open topology on C (X) such as second countability, separability and the properties of $\mathfrak{P}_0$-spaces, $\aleph_0$-spaces and cosmic spaces. Finally, these results were obtained for clp-compact-open topology on C (X).

***Keywords**: Separability, Function space, Second countable, Cosmic Space, $\mathfrak{P}_0$-space, $\aleph_0$-space*

* İsmail OSMANOĞLU; ismailosmanoglu@yahoo.com; Tel: (0545) 403 59 00; orcid.org/0000-0002-1005-4075

1. Giriş ve Ön Hazırlık

X bir topolojik uzay olmak üzere, $C(X)$ kümesi üzerinde birçok topolojinin bulunduğu bilinen bir gerçektir. $C(X)$ üzerindeki en bilindik topolojiler nokta-açık topoloji (noktasal yakınsaklık topolojisi), kompakt-açık topoloji ve düzgün topoloji (düzgün yakınsaklık topolojisi) şeklinde sıralanabilir. Kompakt-açık topoloji ilk olarak Fox (1945) tarafından tanımlanmış, Arens ve Dugundji (1946, 1951) tarafından geliştirilmiştir. Jackson (1952) bu topolojiyi kompakt kümeler üzerinde düzgün yakınsak fonksiyon dizileri tarafından elde etmiştir. Bu yüzden kompakt-açık topoloji, kompakt kümeler üzerinde düzgün yakınsaklık topolojisi olarak da bilinir. Ayrıca kompakt-açık topolojinin, düzgün yakınsaklık topolojisine denk olabilmesi için gerek ve yeter şartın uzayın kompakt olması gerektiğini göstermiştir. Kompaktlık güçlü bir koşul olduğundan bu iki topoloji arasında kayda değer bir araştırma alanı vardır. Son elli yıl içinde bu iki topoloji arasında pek çok topoloji tanımlanmıştır. Bazıları σ-kompakt-açık (Gulick, 1992), sözde kompakt-açık (Kundu ve Garg, 2006), C-kompakt-açık (Osipov, 2012), sınırlı-açık (Kundu ve Raha, 1995) ve açık-açık topoloji (Porter, 1993) şeklinde sıralanabilir.

Bu çalışmada C(X) kümesi üzerindeki yarı kompakt-açık topolojinin ikinci sayılabilirlik, ayrılabilirlik, $\mathfrak{P}_0$-uzay özelliği, $\aleph_0$-uzay özelliği ve kozmik uzay özelliği gibi sayılabilirlik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu sonuçlar C(X) kümesi üzerindeki clp-kompakt-açık topoloji için de elde edilmiştir.

Herhangi bir karışıklığa neden olmadığı sürece (X,τ) topolojik uzayını, X uzayı olarak ifade edeceğiz. X topolojik uzayı üzerinde tanımlı tüm reel değerli sürekli fonksiyonların kümesini $C(X)$ ile göstereceğiz. $\mathbb{R}$, üzerinde standart (alışılmış) topoloji ile ele alınacaktır. X uzayının topolojisini $\tau(X)$ ile göstereceğiz. $\tau(Y)$ topolojisi $\tau(X)$ topolojisinden ince ise $\tau(X) \subset \tau(Y)$ gösterimi yerine $X < Y$ gösterimi kullanılacaktır.

2. Yarı Kompakt-açık Topoloji

Bu bölümde, $C(X)$ üzerindeki yarı kompakt-açık topoloji ve clp-kompakt-açık topoloji tanımları hatırlatılacak ve bazı eşdeğer tanımları verilecektir.

Tanım 2.1.

a) X uzayında $A = \{x \in X : f(x) = 0\}$ olacak biçimde reel değerli sürekli f fonksiyonu varsa A kümesine sıfır küme denir. Sıfır kümenin tümleyenine, tümleyeni sıfır küme denir.

b) Bir topolojik uzayda hem açık hem de kapalı olan bir kümeye clopen küme denir.

Tanım 2.2.

a) X uzayının her tümleyeni sıfır küme örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X uzayına yarı kompakt uzay denir (Frolik, 1959).

b) Her $f \in C(X)$ için $f(X)$ kümesi $\mathbb{R}$ nin sınırlı bir alt kümesi ise X uzayına sözde kompakt uzay denir.

c) X uzayının her clopen örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X uzayına clp-kompakt uzay denir (Sondore ve Sostak, 1994).

Herhangi bir kompakt uzay yarı kompakt, yarı kompakt uzay ise sözde kompakttır. Ayrıca yarı kompakt uzayın sürekli fonksiyon altındaki görüntüsü de yarı kompakttır (D'Aristotle, 1973).

Tanım 2.3. α, X uzayının boştan farklı alt kümelerinin bir ailesi olsun. Her $A \in \alpha$ ve $V \in \tau(\mathbb{R})$ için,

$$S(A,V) = \{f \in C(X) : f(A) \subseteq V\}$$

kümelerinin sınıfını $C(X)$ üzerinde alt baz kabul eden topolojiye *küme-açık topoloji* denir ve bu uzay $C_\alpha(X)$ ile gösterilir. Benzer şekilde her $A \in \alpha$ ve $V \in \tau(\mathbb{R})$ için,

$$S^*(A,V) = \{f \in C(X) : \overline{f(A)} \subseteq V\}$$

kümelerinin sınıfını $C(X)$ üzerinde alt baz kabul eden topolojiye *zayıf küme-açık topoloji* denir ve bu uzay $C_{\alpha^*}(X)$ ile gösterilir.

X uzayının tüm kompakt alt kümelerinin ailesi $K(X)$, tüm yarı kompakt alt kümelerinin ailesi $QK(X)$ ve tüm clp-kompakt alt kümelerinin ailesi $CK(X)$ olmak üzere α sınıfı sırasıyla $K(X)$, $QK(X)$ ve $CK(X)$ alınırsa $C(X)$ üzerinde elde edilen küme-açık topolojiler sırasıyla kompakt-açık topoloji (Fox, 1945), yarı kompakt-açık topoloji (Tokat ve Osmanoglu, 2016) ve clp-kompakt-açık topoloji (Osmanoglu, 2017) olarak adlandırılır ve bu uzaylar sırasıyla $C_k(X)$, $C_q(X)$ ve $C_{clp}(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4. Ayrıca, her $A \in K(X)$ (ya da $A \in QK(X)$), $f \in C(X)$ ve $\varepsilon > 0$ için,

$$B_A(f,\varepsilon) = \{g \in C(X) : \forall x \in X, |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}$$

kümelerinin sınıfı $C(X)$ üzerindeki kompakt-açık topoloji (ya da yarı kompakt-açık topoloji) için bir bazdır. Bu topolojiler kompakt (ya da yarı kompakt) kümeler üzerinde düzgün yakınsaklık topolojisi olarak adlandırılır ve bu uzay $C_{k,u}(X)$ (ya da $C_{q,u}(X)$) ile gösterilir.

Tokat ve Osmanoglu (2016) ve Osmanoglu (2017) den $C_k(X) \leq C_q(X) \leq C_{clp}(X)$ ve $C_q(X) = C_{q,u}(X)$ (dolayısıyla $C_k(X) = C_{k,u}(X)$) olduğunu biliyoruz.

3. Bulgular

Öncelikle ağ, k-ağ ve Pytkeev ağ kavramlarını hatırlatmakla başlayalım. Bu kavramlar baz gibi davranırlar, ancak bu ailelerin her üyesinin açık olması gerekmez. Dolayısıyla, bu tür ailelerle başa çıkabilmek, bazlardan daha kolaydır. Sonrasında bu ağlar ile elde edilen bazı uzayların tanımlarını verdik. Daha ayrıntılı bilgi için Michael (1966), Gruenhage (1992) ve Banakh (2015) kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 3.1. Regüler X uzayının boştan farklı alt kümelerinin bir ailesi $\mathcal{F}$ olmak üzere,

a) Her $x \in X$ ve x in her açık U komşuluğu için, $x \subseteq F \subseteq U$ olacak şekilde $F \in \mathcal{F}$ varsa $\mathcal{F}$ ailesine ağ denir (Gruenhage, 1992).

b) X in her kompakt K alt kümesi ve $K \subseteq U$ olacak şekilde her açık U alt kümesi için, $K \subseteq F \subseteq U$ olacak şekilde $F \in \mathcal{F}$ varsa $\mathcal{F}$ ailesine k-ağ denir (Michael, 1966).

c) X uzayında $\mathcal{F}$ bir ağ olmak üzere, x in her açık U komşuluğu ve $A \subseteq X$ nın yığılma noktası x için $F \subseteq U$ ve $F \cap A$ kümesi sonsuz olacak şekilde $F \in \mathcal{F}$ varsa $\mathcal{F}$ ailesine Pytkeev ağ denir (Banakh, 2015).

Tanım 3.2.

a) Sayılabilir bir ağa sahip uzaya kozmik uzay denir (Gruenhage, 1992).

b) Sayılabilir bir k-ağa sahip uzaya $\aleph_0$-uzay denir (Michael, 1966).

c) Sayılabilir bir Pytkeev ağa sahip uzaya $\mathfrak{P}_0$-uzay denir (Banakh, 2015).

Teorem 3.3.

a) Herhangi bir kozmik uzay, ayrılabilirdir (Arens ve Dugundji, 1951).

b) Herhangi bir $\aleph_0$-uzay, kozmik uzaydır (Michael, 1966).

c) Herhangi bir metrik uzayda ikinci sayılabilir uzay, $\aleph_0$-uzay ve kozmik uzay kavramları denktir (McCoy ve Ntantu, 1988).

Tanım 3.4. Zayıf metriklenebilir topolojiye sahip olan uzaya altmetriklenebilir uzay denir. Yani, Y metrik uzay ve $f: X \to Y$ sürekli içine fonksiyon ise X uzayı altmetriklenebilirdir (Gruenhage, 1992).

Teorem 3.5. Kozmik uzay altmetriklenebilirdir (Michael, 1966).

Tanım 3.6. X uzayının herhangi yarı kompakt A alt kümesi için $A \subseteq A_n$ olacak biçimde X uzayının yarı kompakt alt kümelerinin bir $\{A_n\}$ dizisi varsa X uzayına hemi yarı kompakt uzay denir (Tokat ve Osmanoglu, 2016).

Şimdi $C_q(X)$ uzayını kozmik ve $\aleph_0$-uzay olması için bazı sonuçları verelim.

Önerme 3.7. Ayrılabilir ve metriklenebilir X uzayı için $C_q(X)$ uzayı $\aleph_0$-uzaydır.

İspat: X uzayı Ayrılabilir ve metriklenebilir ise Theorem 2.6. Tokat ve Osmanoglu (2016) dan $C_k(X) = C_q(X)$ ve Lemma 2.3.6 (Ntantu, 1985) den $C_k(X)$ uzayı $\aleph_0$-uzay olduğundan $C_q(X)$ uzayı $\aleph_0$-uzaydır. ∎

Ayrılabilir ve metriklenebilir uzay $\aleph_0$-uzay (Michael, 1966) ve Corollary 2.6 (Banakh, 2015) dan aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 3.8.

a) X uzayı $\aleph_0$-uzay ise $C_k(X) = C_q(X)$ dır.

b) X uzayı $\aleph_0$-uzay ise $C_q(X)$ uzayı $\aleph_0$-uzaydır.

c) X uzayı $\aleph_0$-uzay ise $C_q(X)$ uzayı $\mathfrak{P}_0$-uzaydır.

Teorem 3.9. Tam regüler X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

1. $C_q(X)$ uzayı kozmik uzaydır.
2. $C_q(X)$ uzayı bir $\aleph_0$-uzaydır.
3. $C_k(X)$ uzayı kozmik uzaydır.
4. $C_k(X)$ uzayı bir $\aleph_0$-uzaydır.
5. X uzayı bir $\aleph_0$-uzaydır.

İspat: (1) ⇒ (5) $C_q(X)$ uzayı için bir sayılabilir ağ $\mathcal{F}$ olsun. $F \in \mathcal{F}$ için $F^* = \{x \in X: f(x) > 0\}$ kümesini ve $\mathcal{F}^* = \{F^*: F \in \mathcal{F}\}$ sınıfını tanımlayalım. $\mathcal{F}^*$ sınıfının X uzayı için bir k-ağ olduğunu gösterelim. $A \subseteq U$ olacak biçimde X uzayında U açık ve A kompakt alt kümelerini alalım. X uzayı tam regüler olduğundan $f(A)=\{1\}$ ve $f(X\backslash U)=\{0\}$ olacak biçimde $f\in C(X)$ fonksiyonu vardır. O halde $f\in S(A,(0,\infty))$ dır. $\mathcal{F}$, $C_q(X)$ uzayı için bir sayılabilir ağ olduğundan $f\in F\subseteq S(A,(0,\infty))$ olacak biçimde $F\in\mathcal{F}$ vardır. Buradan $A\subseteq\mathcal{F}^*$ olduğu görülür. $\mathcal{F}^*\subseteq U$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Kabul edelim ki $x\in\mathcal{F}^*\backslash U$ olsun. O halde $x\notin U$ olacağından $f(x)=0$ dır. Fakat $x\in\mathcal{F}^*$ ve $f\in F$ için $f(x)>0$ olur. Bu ise çelişkidir. Bu yüzden $\mathcal{F}^*\subseteq U$ elde edilir.

(5) ⇒ (2) Sonuç 3.15. den açıktır.

(5) ⇒ (1) X uzayı bir $\aleph_0$-uzay ise X uzayı altmetriklenebilirdir (bkz. Lemma 10.1 ve Proposition 10.2 (Michael, 1966). O halde Lemma 3.6 (Tokat ve Osmanoglu, 2016) dan $C_k(X)=C_q(X)$ dır. Dolayısıyla $C_q(X)$ uzayı kozmik uzaydır.

(2) ⇒ (1) Her $\aleph_0$-uzay, kozmik uzay olduğundan $C_q(X)$ uzayı kozmiktir.

(3) ⇔ (4) ⇔ (5) Proposition 10.3 (Michael, 1966) de verilmiştir. ■

Teorem 3.10. Tam regüler X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

1. $C_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.
2. $C_k(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.
3. X uzayı hemi yarı kompakt ve $\mathfrak{P}_0$-uzaydır.
4. X uzayı hemi yarı kompakt ve $\aleph_0$-uzaydır.
5. X uzayı hemi yarı kompakt ve kozmik uzaydır.
6. X uzayı hemi yarıkompakt ve altmetriklenebilirdir.

İspat: (1) ⇒ (2) Corollary 3.17 Tokat ve Osmanoglu (2016)'de verilmiştir.
(2) ⇔ (3)⇔ (4) ⇔ (5) Theorem 2.4.1 Ntantu (1985)'de verilmiştir.

(5) ⇒ (1) X uzayı hemi yarı kompakt ve altmetriklenebilir ise X uzayındaki her yarı kompakt A kümesi için $A\subseteq A_n$ olacak biçimde bir yarı kompakt A_n kümesi vardır. Buradan her A_n kümesi ayrılabilir ve altmetriklenebilirdir. Theorem 3.8 ve Theorem 3.10 Tokat ve Osmanoglu (2016)'den her $C_q(A_n)$ uzayı ayrılabilir ve metriklenebilirdir. Theorem 3.2 Tokat ve Osmanoglu (2016)'den $C_q(X)$ uzayı $\prod\{C_q(A_n):n\in\mathbb{N}\}$ ayrılabilir ve metriklenebilir uzayına gömülebileceğinden $C_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir. ■

Yerel kompakt $\aleph_0$-uzay, ayrılabilir ve metriklenebilir (Michael, 1966) olduğundan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3. 11. Tam regüler ve yerel kompakt X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

1. $C_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.
2. X uzayı Lindelöf ve altmetriklenebilirdir.
3. X uzayı $\mathfrak{P}_0$-uzaydır.
4. X uzayı $\aleph_0$-uzaydır.
5. X uzayı kozmik uzaydır.
6. X uzayı ikinci sayılabilirdir.

Teorem 3.12. Tam regüler X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

1. $C_q(X)$ uzayı ayrılabilirdir.
2. $C_k(X)$ uzayı ayrılabilirdir.
3. X uzayı $\aleph_0$-uzay olan bir zayıf topolojiye sahiptir.
4. X uzayı kozmik uzay olan bir zayıf topolojiye sahiptir.
5. X uzayı ayrılabilir ve metriklenebilir bir zayıf topolojiye sahiptir.

İspat: (1) ⇔ (2) ⇔ (5) Theorem 3.10 Tokat ve Osmanoglu (2016)'de verilmiştir.
(3) ⇔ (4) ⇔ (5) (Michael, 1966) de (A), Lemma 10.1 ve Proposition 10.2 den açıktır.

Sonuç 3.13. X uzayı kozmik uzay ise $C_q(X)$ uzayı ayrılabilir ve metriklenebilir bir zayıf topolojiye sahiptir.

Sonuç 3.14. Metriklenebilir X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

1. $C_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.
2. X uzayı $\mathfrak{P}_0$-uzaydır.
3. X uzayı $\aleph_0$-uzaydır.
4. X uzayı kozmik uzaydır.
5. X uzayı ikinci sayılabilirdir.
6. X uzayı ayrılabilirdir.

Tanım 3.15. $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ olacak biçimde X uzayının yarı kompakt alt kümelerinin bir $\{A_n\}$ dizisi varsa X uzayına σ-yarı kompakt uzay denir (Tokat ve Osmanoglu, 2016).

Teorem 3.16. Tam regüler ve σ-yarı kompakt X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

1. $C_q(X)$ uzayı ayrılabilirdir.
2. X uzayı kozmik uzaydır.
3. X uzayı altmetriklenebilirdir.

İspat: (2) ⇔ (3) Lemma 3.6 (Tokat ve Osmanoglu, 2016) ve Corollary 2.3.4 (Ntantu, 1985) den σ-yarı kompakt ve altmetriklenebilir uzay kozmiktir.

(2) ⇒ (1) Teorem 3.12 den açıktır.
(1) ⇒ (2) Theorem 3.10 Tokat ve Osmanoglu (2016)'den açıktır.

Teorem 3.17. Tam regüler X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

1. $C_{clp}(X)$ uzayı $\mathfrak{P}_0$-uzaydır.
2. $C_{clp}(X)$ uzayı $\aleph_0$-uzaydır.
3. $C_{clp}(X)$ uzayı kozmik uzaydır.
4. $C_{clp}(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.
5. $C_{clp}(X)$ uzayı ayrılabilirdir.
6. $C_q(X)$ uzayı $\mathfrak{P}_0$-uzaydır.
7. $C_q(X)$ uzayı $\aleph_0$-uzaydır.
8. $C_q(X)$ uzayı kozmik uzaydır.
9. $C_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.
10. $C_q(X)$ uzayı ayrılabilirdir.
11. X uzayı kompakt ve metriklenebilirdir.

İspat: (4) ⇔ (5) ⇔ (11) Theorem 3.11 Osmanoglu (2017)'den verilmiştir.

(1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (5) ve (6) ⇒ (7) ⇒ (8) ⇒ (10) $\mathfrak{P}_0$-uzay, $\aleph_0$-uzay (Banakh, 2015) ve $\aleph_0$-uzay, kozmik uzay (Michael, 1966) olduğundan açıktır.

(1) ⇒ (6) $\mathfrak{P}_0$-uzay, kozmik uzay ve kozmik olma özelliği zayıf topoloji tarafından korunduğundan $\mathfrak{P}_0$-uzay olma özelliği de zayıf topoloji tarafından korunur. O halde $C_{clp}(X)$ uzayı $\mathfrak{P}_0$-uzay ise $C_q(X) \leq C_{clp}(X)$ olduğundan $C_q(X)$ uzayı $\mathfrak{P}_0$-uzaydır.

(10) ⇒ (11) $C_q(X)$ uzayı ayrılabilir ise Theorem 3.10 (Tokat ve Osmanoglu, 2016) dan X uzayı altmetriklenebilir ve ayrıca $C_k(X) = C_q(X)$ dir. $C_k(X) \leq C_\sigma(X)$(bkz. Theorem 2.3 (Kundu ve McCoy, 1993) olacağından Theorem 4.2 (Kundu ve McCoy, 1993) den X uzayı sözde kompakttır. Sözde kompakt tam regüler altmetriklenebilir uzay, metriklenebilir (Corollary 2.7 (McArthur, 1973) olacağından X uzayı metriklenebilirdir. Metriklenebilirdir sözde kompakt uzay, kompakt olacağından X uzayı kompakttır.

(11) ⇒ (1) X uzayı kompakt ve metriklenebilir ise Corollary 2.3. ve Theorem 3.11. (Osmanoglu, 2017) den $C_{clp}(X)$ uzayı metriklenebilir ve ayrılabilir. Dolayısıyla $C_{clp}(X)$ uzayı $\mathfrak{P}_0$-uzaydır.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada sırasıyla Tokat ve Osmanoglu (2016) ve Osmanoglu (2017) tanımlanan C(X) kümesi üzerindeki yarı kompakt-açık topoloji ve clp-kompakt-açık topolojinin ikinci sayılabilirlik, ayrılabilirlik, $\mathfrak{P}_0$-uzay özelliği, $\aleph_0$-uzay özelliği ve kozmik uzay özelliği gibi sayılabilirlik özellikleri incelenmiştir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, Tokat ve Osmanoglu (2016) ve Osmanoglu (2017)'de elde edilen sonuçlara daha geniş bir bakış açısı getirmiş ve bu sonuçları kapsamaktadır.

Kaynakça

Arens, R. F., 1946. A topology for spaces of transformations. Annals of Mathematics, 47, 480–495.

Arens, R. ve Dugundji, J., 1951. Topologies for function spaces. Pacific Journal of Mathematics, 1, 5–31.

Banakh, T., 2015. $\mathfrak{P}_0$-spaces. Topology and its Applications, 195, 151–173.

D'Aristotle, A. J., 1973. Quasicompactness and functionally Hausdorff spaces. Journal of the Australian Mathematical Society, 15(3), 319–324.

Fox, R. H., 1945. On topologies for function spaces. Bulletin of the American Mathematical Society, 51, 429–432.

Frolik, Z., 1959. Generalization of compact and Lindelöf spaces. Czechoslovak Mathematical Journal, 13(84), 172–217 (Russian).

Gruenhage, G., 1992. Generalized metric spaces and metrization. s. 239–274. Recent progress in general topology, North-Holland, Amsterdam.

Gulick, D., 1992. The σ-compact-open topology and its relatives. Mathematica Scandinavica, 30, 159–176.

Jackson, J. R., 1952. Comparison of topologies on function spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 3, 156–158.

Kundu S. ve McCoy, R.A., 1993. Topologies between compact and uniform convergence on function spaces. Internat. J. Math. Math. Sci., 16, 101–109.

Kundu, S. ve Garg, P., 2006. The pseudocompact-open topology on C(X). Topology Proceedings, 30(1), 279–299.

Kundu, S. ve Raha, A. B., 1995. The bounded-open topology and its relatives. Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste, 27, 61–77.

McArthur, W. G., 1973. G_δ-diagonals and metrization theorems. Pacific Journal of Mathematics, 44(2), 613-617

McCoy, R. A. ve Ntantu, I., 1988. Topological Properties of Spaces of Continuous Functions. Springer-Verlag, Berlin.

Michael, E., 1966. $\aleph_0$-spaces. J. Math. Mech, 15, 983-1002.

Ntantu I., 1985. The compact-open topology on C(X), PhD Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, U.S.A.

Osipov, A. V., 2012. The C-compact-open topology on function spaces. Topology and its Applications, 159, 3059– 3066.

Osmanoglu, I., 2017. Clp-compact-open topology on function space. Journal of Advanced Studies in Topology, 8(1), 31–39.

Porter, K. F., 1993. The open-open topology for function spaces. InternationalJournal of Mathematics and Mathematical Sciences, 16 (1), 111–116.

Sondore, A. ve Sostak, A., 1994. On clp-compact and countably clp-compact spaces. Acta Univ. Latviensis, 595(1994), 123–143.

Tokat, D. ve Osmanoglu, I., 2016. Some properties of the quasicompact-open topology on C(X). Journal of Nonlinear Sciences and Applications, 9, 3511–3518.