

HOMOJEN OLMAYAN SIĞ KÜRESEL KABUĞUN TERMAL BURKULMA ANALİZİ

Abdullah SOFİYEVA, Polat ÖZYİĞİT^a

^aSüleyman Demirel Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Isparta, TÜRKİYE
asofiyev@mmf.sdu.edu.tr, polatozyigit@sdu.edu.tr

(Geliş/Received: 04.05.2011; Kabul/Accepted: 15.02.2012)

ÖZET

Bu çalışmada sürekli homojen olmayan siğ küresel kabuğun termal burkulma analizi incelenmektedir. Önce, kalınlık doğrultusunda sürekli değişen izotrop malzeme özellikleri ve uygun termal genleşme katsayısının analitik modelleri oluşturulmaktadır. Problemin formülasyonunda Kirchhoff-Love'nin birinci mertebeden kabuk teorisi kullanılmakta ve gerilme-deformasyon bağıntılarında Hooke kuralı dikkate alınmaktadır. Donnell-Mushtari-Vlasov (DMV) varsayımları ve doğrusal gerilme-yer değiştirme bağıntıları kullanılarak kuvvet ve moment bileşenleri bulunmakta ve stabilite denklemlerinde yerine yazılarak üç yer değiştirmeye bağlı diferansiyel denklemler elde edilmektedir. Stabilite denklemleri basit mesnetli sınır koşuluna göre çözümlenerek siğ küresel kabuğun boyutsuz kritik üniform sıcaklık artışı için analitik ifade bulunmuştur. Sayısal hesaplarda malzemenin elastisite modülü ve uygun termal genleşme katsayısının kalınlık koordinatlarına bağlı kuvvet fonksiyonu şeklinde değişimi ve kürenin geometrik parametreleri değişiminin kritik üniform sıcaklık artışına etkileri incelenmektedir. Elde edilen sonuçlar literatürde sunulan çözümlerle karşılaştırılarak çalışmanın doğruluğu teyit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Küresel kabuk, homojen olmayan malzeme, burkulma, kritik sıcaklık artışı.

THERMAL BUCKLING ANALYSIS OF NON-HOMOGENOUS SHALLOW SPHERICAL SHELLS

ABSTRACT

In this study, the thermal buckling analysis of the non-homogenous shallow spherical shell is investigated. Firstly, the analytical modeling of non-homogenous material properties and appropriate thermal expansion coefficient which vary continuously through the thickness direction is made. In the formulation of the problem, Kirchhoff-Love's first order shell theory is used and Hooke's law is taken into account for stress-strain relations. By using Donnell-Mushtari-Vlasov's (DMV) assumptions and linear stress-displacement relation, the stability equations depending on three displacements are obtained. Stability equations are solved for the simply supported boundary condition and analytical expression for the dimensionless critical uniform temperature rise is found. In numerical computations, the effects of variations of the elasticity modulus and appropriate thermal expansion coefficient as a power function according to thickness direction and variation of the geometric parameters of the sphere on the critical uniform temperature rises are examined as. To test the validity of this study, the obtained results are compared with counterparts in the open literature.

Keywords: Spherical shell, non-homogeneous material, buckling, critical temperature rise.

GİRİŞ (INTRODUCTION)

Küresel şekle sahip dönel kabuklar çağdaş teknolojinin değişik alanlarında; uçak savar antenlerinin mukavemet elemanı olarak uzay

araçlarında, ara kesit duvarı olarak denizaltılarda, gemilerde veya geminin sonunda konulan kapaklarda, değişik amaçlar için kullanılan çeşitli depoların alt tabanında vs. kullanılmaktadır. Değişik amaçla kullanılan bu tür küresel kabuklara, tasarım

aşamasında değişik kontroller yapılmaktadır. Bu kontrollerin en önemlilerinden biri termal yükler etkisi altındaki küresel kabukların termo-elastik burkulma analizidir [1, 2].

Günümüz teknolojisinde küresel kabukların kullanım alanının genişlemesi ile mekanik ve termal yükler etkisi altındaki bu tür kabukların burkulma problemlerinin incelenmesi araştırmacıların ilgi odağı haline gelmiştir. Yeni teknoloji kullanılarak değişik homojen olmayan malzeme türlerinin oluşturulması ve yapı elemanlarında bu malzemelerin sıkça kullanılması yeni hesap yöntemleri ve burkulma analizlerinin yapılmasını gerektirmektedir. Bu analizler esnasında malzeme özelliklerinin homojen olmamasının matematiksel modellenmesi ve homojen olmama faktörünün dikkate alınması, yapı elemanının bütünlüğü, dayanaklığı ve güvenilirliği açısından zorunludur. Malzemenin homojenliğini bozan faktörlerin üretim tekniği, radyasyon etkisi, termik ve yüzeysel cilalamalar vs. olduğu bilinen bir gerçektir. Bu etkiler sonucu malzeme özellikleri noktadan noktaya sürekli, parçalı sürekli ve rastgele değişir ve noktanın uzay koordinatlarının fonksiyonları olabilir. Homojen olmayan malzemelerin matematiksel model çeşitleri oldukça sınırlıdır ve yeni modellerin oluşturulma çabaları günümüze kadar devam etmektedir [3-6].

Uzay endüstrisinde kullanılan homojen olmayan malzemeler aşırı yüksek sıcaklıklara ve son derece büyük termal değişimlere maruz kaldığından, homojen olmayan küresel kabukların termal burkulma problemlerinin çözümünü ve sıcaklık farkı burkulma yükünün bulunmasını daha da önemli kılmaktadır. Termal yükler etkisi altındaki küresel kabukların burkulma problemleri mekanik yüklerle kıyasla daha sonra ele alınmasına rağmen çağdaş teknolojide çok önemli yere sahiptir. Termal yükler etkisindeki homojen küresel kabukların stabilite problemlerine ait önemli çalışmalar referans [7] ve [8]'de sunulmuş ve bu çalışmaların ardından literatürde bazı yayınlar ortaya çıkmıştır [9-11].

Homojen olmayan malzemeler, diğer üstün özelliklerinin yanı sıra sıcaklığı çok iyi korumasından dolayı çok fazla dikkat çekmiştir. Homojen olmayan veya fonksiyonel değişimli malzemelerden oluşan kabukların mekanik ve termal yükler etkisi altındaki davranışına ait çalışmalar homojen malzemelere kıyasla daha sınırlıdır [12-15].

Homojen olmamanın dikkate alınması, küresel kabukların termal burkulma denklemlerinin türetilmesi ve çözümünü daha karmaşık hale getirdiğinden, bu problem henüz yeterince incelenmemiştir. Bu çalışmanın odağında sürekli homojen olmayan sığ küresel kabuğun üniform termal yük etkisi altında burkulma probleminin incelenmesi durur.

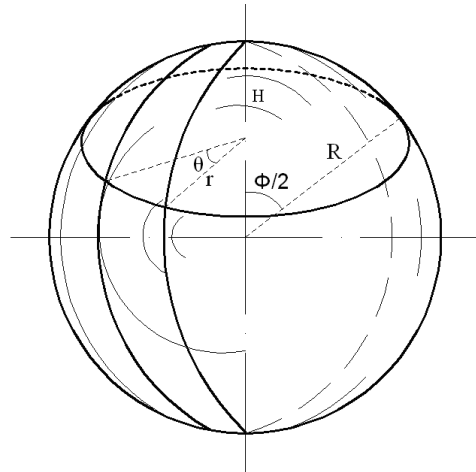
2. TEMEL BAĞINTI VE DENKLEMLER (BASIC RELATIONS AND EQUATIONS)

Şekil 1'de, yarıçapı R ve kalınlığı h olan homojen olmayan küresel kabuk sunulmaktadır. H küre kesitinin yüksekliği ve r küre kesitinin yarıçapıdır. θ ve ϕ , sırasıyla çevresel ve enlemsel-meridyenel koordinatlarıdır. Referans yüzey üzerinde bulunmayan noktalar ek radyal z koordinatı üzerinde yer almaktadır. Bu koordinat küresel kabuğun duvarı üzerindeki bir noktadan orta yüzeydeki uygun noktaya olan uzaklıktır. Referans yüzeyde bulunan (z, θ, ϕ) ortogonal koordinat sistemi oluşturur.

Küresel kabuğun Young modülü ve termal genişleme katsayısı kalınlık koordinatının sürekli fonksiyonu şeklinde değişmektedir [3-5,10]:

$$E(\bar{z}) = E_0\phi(\bar{z}); \quad \alpha(\bar{z}) = \alpha_0\phi(\bar{z}); \quad \nu(\bar{z}) = \nu; \quad \phi(\bar{z}) = 1 + \mu\bar{z}^d; \quad d = 1, 2, 3, \dots, \quad \bar{z} = z/h \quad (1)$$

Burada, E_0 ; α_0 ; ν sırasıyla, homojen malzemenin Young modülü, termal genişleme katsayısı ve Poisson oranı; $\phi(\bar{z})$, Young modülü ve termal genişleme katsayısının sürekli değişim fonksiyonu; μ Young modülü ve termal genişleme katsayısının değişim katsayısı olup $0 \leq \mu \leq 1$ eşitsizliğini sağlamaktadır; \bar{z} boyutsuz kalınlık koordinatı olup $(-1/2)$ 'den $(1/2)$ 'ye değişmektedir.



Şekil 1. Küresel kabuğun geometrisi (Geometry of the spherical shell)

Termal genişleme katsayısı değişken, homojen olmayan küresel kabuğun gerilme deformasyon bileşenleri arasındaki bağıntı Hooke kuralına göre aşağıdaki şekilde olur:

$$\begin{bmatrix} \sigma_\phi \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{\phi\theta} \end{bmatrix} = \frac{E(\bar{z})}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{u_{,\phi} + w}{R} + \nu \frac{v_{,\theta} + u \cos \phi + w \sin \phi}{R \sin \phi} \\ -\frac{z}{R^2} \left[w_{,\phi\phi} + \nu \left(\frac{w_{,\theta\theta}}{\sin^2 \phi} + w_{,\phi} \cot \phi \right) \right] \\ \frac{v_{,\theta} + u \cos \phi + w \sin \phi}{R \sin \phi} + \nu \frac{u_{,\phi} + w}{R} \\ -\frac{z}{R^2} \left[\frac{w_{,\theta\theta}}{\sin^2 \phi} + w_{,\phi} \cot \phi + \nu w_{,\phi\phi} \right] \\ 0.5(1-\nu) \left[\frac{u_{,\theta} + v_{,\phi} \sin \phi - v_1 \cos \phi}{R \sin \phi} \right. \\ \left. -\frac{z}{R^2} \left(\frac{w_{,\phi\theta} - w_{,\theta} \cot \phi}{\sin \phi} \right) \right] \end{bmatrix} - \frac{E(\bar{z})\alpha(\bar{z})T}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Burada u , v ve w sırasıyla ϕ , θ ve z doğrultularındaki yer değiştirmeler, T sıcaklık olup indisteki $(.)$ sembolü koordinatlara göre kısmi türevleri göstermektedir.

Kuvvet ve moment bileşenleri aşağıdaki ifadelerden bulunur [16, 17]:

$$\begin{aligned} & \left[(T_\phi, T_\theta, T_{\phi\theta}), (M_\phi, M_\theta, M_{\phi\theta}) \right] \\ & = \int_{-h/2}^{h/2} [1, z] (\sigma_\phi, \sigma_\theta, \sigma_{\phi\theta}) dz \end{aligned} \quad (3)$$

(2) bağıntıları (3) denklemlerinde yerine yazılıp kuvvet ve moment bileşenleri u , v ve w yer değiştirmeleri ile ifade edilir ve elde edilen ifadeler stabilite denklemlerinde [1, 12] yerine yazıldığında aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \equiv & \beta_1 u \cot \phi \cos \phi + \beta_1 \nu u \sin \phi - \beta_1 \frac{\partial u}{\partial \phi} \cos \phi \\ & - \frac{\beta_3}{\sin \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \beta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \sin \phi + \beta_1 \frac{\partial v}{\partial \theta} \cot \phi + \beta_3 \cot \phi \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ & - \beta_1 \nu \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial \phi} - \beta_3 \frac{\partial^2 v}{\partial \phi \partial \theta} - \frac{\beta_2}{R} \frac{\partial w}{\partial \phi} \cot \phi \cos \phi \\ & - (1+\nu) \beta_1 \sin \phi \frac{\partial w}{\partial \phi} - \frac{\beta_2}{R} \frac{\partial w}{\partial \phi} \nu \sin \phi - \frac{\beta_2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \cot \phi \\ & - \frac{\beta_2}{R} \nu \frac{\cot \phi}{\sin \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\beta_2}{R} \cos \phi \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} - \frac{\beta_4}{R} \frac{\cot \phi}{\sin \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ & + \frac{\beta_2}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial \phi^3} \sin \phi + \frac{\beta_2}{R} \nu \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial \phi} + \frac{\beta_4}{R} \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial \phi} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2 \equiv & \beta_1 \cot \phi \frac{\partial u}{\partial \theta} + \beta_1 \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial \theta} + \beta_3 \cot \phi \frac{\partial u}{\partial \theta} + \beta_3 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \phi} \\ & + \beta_3 \cos \phi \frac{\partial v}{\partial \phi} - \beta_3 \nu \cot \phi \cos \phi + \frac{\beta_1}{\sin \phi} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \\ & + \beta_3 \sin \phi \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \beta_3 \nu \sin \phi + \beta_1 (1+\nu) \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ & - \frac{\beta_2}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \frac{1}{\sin^2 \phi} - \frac{\beta_2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial \theta} \cot \phi - \frac{\beta_2}{R} \nu \frac{\partial^3 w}{\partial \phi^2 \partial \theta} \\ & - \frac{\beta_4}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\beta_4}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta \partial \phi^2} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_3 \equiv & \beta_1 \left[-\frac{\partial u}{\partial \phi} (1+\nu) \sin \phi - u (1+\nu) \cos \phi - \frac{\partial v}{\partial \theta} (1+\nu) \right. \\ & \left. - 2(1+\nu) w \sin \phi \right] + \frac{2\beta_4}{R \sin \phi} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^2 \partial \phi} + \frac{\partial^3 v}{\partial \phi^2 \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{\beta_2}{R} \left[\nu u \sin \phi + \nu u \cot \phi \cos \phi + 2u \cos \phi + u \cos \phi \cot^2 \phi \right. \\ & \left. - \nu \frac{\partial u}{\partial \phi} \sin \phi - \nu \frac{\partial u}{\partial \phi} \cos \phi - \frac{\partial u}{\partial \phi} \cos \phi \cot \phi + 2 \cos \phi \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \sin \phi + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\cot \phi}{\sin \phi} + \frac{\beta_2}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial \phi^3} \sin \phi + \frac{\nu}{\sin \phi} \frac{\partial^3 u}{\partial \phi \partial \theta \partial \theta^2} \right. \\ & \left. + (1+\nu) \frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial v}{\partial \theta} \cot \phi + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cot^2 \phi - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial \phi} - \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial \phi} \cot \phi \right. \\ & \left. + \nu \frac{\partial^3 v}{\partial \theta \partial \phi^2} + \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} + (1+\nu) w \sin \phi + 2(1+\nu) \frac{\partial w}{\partial \phi} \cos \phi \right. \\ & \left. - (1+\nu) \frac{\partial w}{\partial \phi} \sin \phi + 2(1+\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \sin \phi + \frac{2(1+\nu)}{\sin \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \\ & + \frac{\beta_5}{R^2} \left[-2(1+\nu) \frac{\partial w}{\partial \phi} \cos \phi - \frac{\partial w}{\partial \phi} \cot^2 \phi \cos \phi + 2\nu \cos \phi \frac{\partial w}{\partial \phi} \right. \\ & \left. - \nu \frac{\partial w}{\partial \phi} \sin \phi - \nu \frac{\partial w}{\partial \phi} \cot \phi \cos \phi - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\cot^2 \phi}{\sin \phi} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \cot \phi \cos \phi + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \sin \phi - 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\cot \phi}{\sin \phi} \right. \\ & \left. + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \cos \phi - \frac{(1+2\nu)}{\sin \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial \phi} \frac{\cot \phi}{\sin \phi} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^3 w}{\partial \phi^3} \sin \phi + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial \phi} \frac{\nu}{\sin \phi} - 2 \cos \phi \frac{\partial^3 w}{\partial \phi^3} - \frac{\partial^4 w}{\partial \phi^4} \sin \phi \right. \\ & \left. - \frac{2\nu}{\sin \phi} \frac{\partial^4 w}{\partial \phi^2 \partial \theta^2} - \frac{1}{\sin^3 \phi} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right] + \frac{2\beta_6}{R^2} \left(-\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right. \\ & \left. - \frac{\cot^2 \phi}{\sin \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \phi}{\sin \phi} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial \phi} - \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial \phi^2} \right) \\ & + T_{\phi_0} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \sin \phi + \frac{\partial w}{\partial \phi} \cos \phi \right) + T_{\theta_0} \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ & + T_{\phi\theta_0} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \phi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial \theta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Burada, $T_{\theta_0}, T_{\phi_0}, T_{\phi\theta_0}$, burkulma öncesi yükler ve Λ_i ($i=1,2,3$), diferansiyel operatörler olup şu tanımlar geçerlidir:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{E_0}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (1 + \mu \bar{z}^d) dz; \\
\beta_2 &= \frac{E_0}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} z(1 + \mu \bar{z}^d) dz; \\
\beta_3 &= \frac{E_0}{2(1+\nu)} \int_{-h/2}^{h/2} (1 + \mu \bar{z}^d) dz; \\
\beta_4 &= \frac{E_0}{2(1+\nu)} \int_{-h/2}^{h/2} z(1 + \mu \bar{z}^d) dz; \\
\beta_5 &= \frac{E_0}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2(1 + \mu \bar{z}^d) dz; \\
\beta_6 &= \frac{E_0}{2(1+\nu)} \int_{-h/2}^{h/2} z^2(1 + \mu \bar{z}^d) dz
\end{aligned} \quad (7)$$

3. STABİLİTE DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ VE BULGULAR (SOLUTION OF THE STABILITY EQUATIONS AND FINDINGS)

Kabul edelim ki küresel kabuk basit mesnetli sınır koşulları altında olsun. Basit mesnetli sınır koşulları matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [12]:

$$(u_{,\phi})_{\phi=\phi_L} = (v)_{\phi=\phi_L} = (w_{,\phi})_{\phi=\phi_L} = (w)_{\phi=\phi_L} = 0 \quad (8)$$

(8) basit mesnetli sınır koşullarını sağlayan sığ küresel kabuğun u , v , w yer değiştirme bileşenleri için yaklaşım fonksiyonları aşağıdaki gibi seçilmektedir:

$$\begin{aligned}
u &= A_1 \cos(n\theta) \cos(\lambda\phi), v = A_2 \sin(n\theta) \sin(\lambda\phi), \\
w &= A_3 \cos(n\theta) \sin(\lambda\phi), 0 \leq \phi \leq \phi_L, 0 \leq \theta \leq 2\pi
\end{aligned} \quad (9)$$

Burada A_i ($i = 1,2,3$) bilinmeyen sabitler, $\lambda = m\pi/\phi_L$, m ve n meridyenel ve çevresel burkulma dalga sayıları ve ϕ_L , küresel bölge açısıdır.

Homojen olmayan sığ küresel kabuğun (4)-(6) stabilite denklemlerine Galerkin yöntemi uygulayalım:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\phi_1} \int_0^{2\pi} \Lambda_1 \cos(n\theta) \cos(\lambda\phi) R \sin\phi d\theta d\phi &= 0, \\
\int_0^{\phi_1} \int_0^{2\pi} \Lambda_2 \sin(n\theta) \sin(\lambda\phi) R \sin\phi d\theta d\phi &= 0 \\
\int_0^{\phi_1} \int_0^{2\pi} \Lambda_3 \cos(n\theta) \sin(\lambda\phi) R \sin\phi d\theta d\phi &= 0
\end{aligned} \quad (10)$$

Basit mesnetli ve T sıcaklık etkisi altında olan küresel kabukta sıcaklık üniform olarak artar (veya azalır) ve sonuçta öyle bir T değerine ulaşır ki bu değerde kabuğun stabilitesi bozulur, yani küresel kabuk

burkulma yapar. Bu sıcaklık değişimi $\Delta T = T_1 - T_0$ olup üniform sıcaklık artışı olarak adlandırılır. Üniform sıcaklık artışı altındaki küresel kabukta $T(z) = \Delta T$ göz önüne alınır. Burkulma öncesi kuvvet bileşenleri denge denklemlerinin zar formunun çözülmesiyle elde edilir:

$$\begin{aligned}
T_0^b = T_{\phi_0} = T_{\theta_0} &= -\frac{\Delta T h E_0 \alpha_0}{1-\nu} \int_{-1/2}^{1/2} (1 + \mu \bar{z}^d)^2 d\bar{z}, \\
T_{\theta_{\phi_0}} &= 0
\end{aligned} \quad (11)$$

(11) bağıntısı dikkate alınarak, (9) yaklaşım fonksiyonları (10) denklemlerinde yerine yazılır ve integralleme sonrası elde edilen cebirsel denklemler sisteminin katsayılarından oluşan determinant sıfıra eşitlenir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

Burada a_{ij} ($i, j = 1,2,3$), katsayıları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -[\lambda C_3 + (\lambda^2 + \nu) C_1 + C_2] \beta_1 - n^2 C_4 \beta_3, \\
a_{12} &= (\nu \lambda C_6 - C_5) n \beta_1 + (\lambda C_6 - C_5) n \beta_3, \\
a_{13} &= (1 + \nu) \lambda C_1 \beta_1 + (\lambda C_4 - C_7) \frac{n^2 \beta_4}{R} + [\lambda^2 C_3 + (\lambda^2 + \nu) \lambda C_1 \\
&\quad + \nu n^2 \lambda C_4 - \nu n^2 C_7 - n^2 C_7 + \lambda C_2] \frac{\beta_2}{R}, \\
a_{21} &= (\nu \lambda C_{2a} - C_{4a}) n \beta_1 + (\lambda C_{2a} - C_{4a}) n \beta_3, \\
a_{22} &= -n^2 C_{8a} \beta_1 + [\lambda C_{3a} - C_{5a} + (1 - \lambda^2) C_{1a}] \beta_3 \\
a_{23} &= -(1 + \nu) n C_{2a} \beta_1 - (n^3 C_{7a} - n \lambda C_{4a} - \nu n \lambda^2 C_{2a}) \frac{\beta_2}{R} \\
&\quad + (C_{2a} - \lambda^2 C_{2a}) \frac{n \beta_4}{R} \\
a_{31} &= (1 + \nu) (C_3 - \lambda C_{1b}) \beta_1 + [-2C_3 - C_{3b} - \nu \lambda C_{1b} - \nu \lambda C_{1c} \\
&\quad - \lambda C_{17} + 2\lambda^2 C_3 - n^2 C_7 - \lambda^3 C_{1b} - \nu n^2 \lambda C_{9b} + \nu C_{2c} \\
&\quad + C_{1c} (\nu + \lambda^2)] \frac{\beta_2}{R} - \frac{2\lambda n^2 C_{9b} \beta_4}{R}, \\
a_{32} &= \beta_1 n C_{10} (1 + \nu) + 2n \frac{\beta_4}{R} C_{10} (\lambda^2 - 1) - [C_{10} (1 + \nu - \nu \lambda^2) \\
&\quad + C_{11} + \nu \lambda C_9 - \lambda C_5 - n^2 C_{15} + \nu C_{3c}] \frac{n \beta_2}{R} \\
\bar{a}_{33} &= a_{33} - T_0^b \left[(\lambda^2 C_{1b} - \lambda C_3) + n^2 C_{9b} \right] \\
a_{33} &= 2\beta_1 C_{1b} (1 + \nu) + \frac{\beta_2}{R} [-C_{1b} (1 + \nu) - 2(1 + \nu) \lambda C_3 \\
&\quad + 2(1 + \nu) \lambda^2 C_{10} + 2n^2 (1 + \nu) C_{9b} - (1 + \nu) \lambda C_{1c}] \\
&\quad + \frac{\beta_3}{R^2} [2\lambda C_3 (1 + \lambda^2) + C_{3b} \lambda - 2n^2 C_{18} + \lambda^2 C_{17} + C_{1b} \lambda^2 (1 + \lambda^2) \\
&\quad - C_{16} \lambda^2 \nu + C_{9b} n^2 (2\lambda^2 \nu - 1 - 2\nu) + 2n^2 \lambda (1 - 0.5\nu) C_7 + C_{22} n^4 \\
&\quad - \nu \lambda C_{1c} - \nu \lambda C_{2c} + 2n^2 \nu C_{4c} - \lambda^3 C_{1c} - \nu n^2 \lambda C_{5c}] \\
&\quad + \frac{2\beta_6 n^2}{R^2} [C_{9b} (\lambda^2 - 1) - C_{18} + C_7 \lambda]
\end{aligned} \quad (13)$$

(13)'deki katsayıların içerdiği C_i ($i=1, \dots, 22$), C_{j_a} ($j=1, \dots, 8$), C_{k_b} ($k=1, \dots, 9$), C_{q_c} ($q=1, \dots, 6$) için geçerli olan tanımlar Ek'de sunulmaktadır.

(11) ifadesi (12) denkleminde yerine yazılıp, Sarrus kuralı uygulandığında, termal genleşme katsayısı ve malzeme özellikleri değişen küresel kabuğun kritik üniform sıcaklık artışı için aşağıdaki ifade bulunur:

$$T_{kr}^{NH} = \alpha_0 \Delta T_{kr}^{NH} = - \frac{1-\nu}{hE_0 \alpha_0} \int_{-1/2}^{1/2} (1 + \mu \bar{z}^d)^2 d\bar{z} \times \left[\begin{array}{l} a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{22} a_{31} \\ - a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{21} a_{32} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{l} a_{11} a_{22} \lambda^2 C_{1b} + n^2 C_{9b} a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21} \lambda C_3 - a_{11} a_{22} \lambda C_3 \\ - a_{12} a_{21} \lambda^2 C_{1b} - n^2 C_{9b} a_{21} a_{12} \end{array} \right]^{-1} \quad (14)$$

(14) ifadesinde $\mu = 0$ olduğunda, homojen izotrop sığ küresel kabuk için boyutsuz kritik üniform sıcaklık artışı için ifade özel olarak bulunur:

$$T_{kr}^{Hom} = \alpha_0 \Delta T_{kr}^{Hom} = - \frac{1-\nu}{hE_0} \times \left[\begin{array}{l} \bar{a}_{11} \bar{a}_{23} \bar{a}_{32} + \bar{a}_{12} \bar{a}_{21} \bar{a}_{33} + \bar{a}_{13} \bar{a}_{22} \bar{a}_{31} \\ - \bar{a}_{11} \bar{a}_{22} \bar{a}_{33} - \bar{a}_{12} \bar{a}_{23} \bar{a}_{31} - \bar{a}_{13} \bar{a}_{21} \bar{a}_{32} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{l} \bar{a}_{11} \bar{a}_{22} \lambda^2 C_{1b} + n^2 C_{9b} \bar{a}_{11} \bar{a}_{22} + \bar{a}_{12} \bar{a}_{21} \lambda C_3 \\ - \bar{a}_{11} \bar{a}_{22} \lambda C_3 - \bar{a}_{12} \bar{a}_{21} \lambda^2 C_{1b} - n^2 C_{9b} \bar{a}_{12} \bar{a}_{21} \end{array} \right]^{-1} \quad (15)$$

Burada \bar{a}_{ij} ($i, j=1, 2, 3$), homojen küresel kabuğun geometrisi ve malzeme özelliklerine bağlı katsayıları olup a_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) katsayılarında $\mu = 0$ yazıldığında elde edilir.

Boyutsuz kritik üniform sıcaklık artışları T_{kr}^{NH} ve T_{kr}^{Hom} için (14) ve (15) ifadeleri m ve n 'ye göre minimize edilerek minimum değerleri bulunur.

4. KARŞILAŞTIRMA, SAYISAL ANALİZ VE TARTIŞMA (COMPARISON, NUMERICAL ANALYSIS AND DISCUSSION)

4.1. Karşılaştırma (Comparison)

Bu çalışmanın doğruluğunu kanıtlamak için kritik üniform sıcaklık artışı değerleri Eslami ve ark. [10], çalışmasındaki uygun değerlerle karşılaştırmış ve Tablo 1'de sunulmuştur. Parantez içindeki değerler (m, n) dalga sayılarının değerleridir. Bizim sonuçlar ile Eslami ve ark. [10] çalışmasındaki sonuçların uyum içinde olduğu Tablo 1'den görülmektedir.

Tablo 1. Homojen kürenin boyutsuz kritik üniform sıcaklık artışı ile literatürdeki uygun değerlerin karşılaştırılması ($R/h=100$) (Comparison of the dimensionless critical uniform temperature rise of the homogeneous sphere with available values in the open literature ($R/h = 100$))

$T_{kr}^{Hom}(m, n), (\phi_L = \pi/9)$	
Eslami ve ark. [10]	Sunulan çalışma
0,004061(2,1)	0,003967(2,1)

4.2. Sayısal analiz ve tartışma (Numerical analysis and discussion)

Bu çalışmada, sürekli homojen olmama fonksiyonu somut olarak kuvvet fonksiyonu, yani $\varphi(\bar{z}) = 1 + \mu \bar{z}^d$; $d=1, 2, 3, \dots$ şeklinde seçilmektedir [7]. Burada μ , Young modülü ve termal genleşmenin değişim katsayısı olup $0 \leq \mu \leq 1$ eşitsizliğini sağlamaktadır.

Bu kısımda, homojen çelik malzeme özellikleri $E_0 = 2 \times 10^5$ (MPa), $\nu = 0,3$ ve termal genleşme katsayısı $\alpha_0 = 11,7 \times 10^{-6} 1/^\circ C$ olarak dikkate alınarak R/h ve $H/2r$ oranlarına ve ϕ_L destekleyici açısının değişimine bağlı olarak, Young modülü ve termal genleşme katsayısı fonksiyonu $\varphi(\bar{z})$ lineer, parabolik ve kübik olarak değiştiğinde ve homojen durumda boyutsuz kritik üniform sıcaklık artışları (T_{kr}^{NH} ve T_{kr}^{Hom}) için termal burkulma analizi ve tartışma yapılmıştır. Sayısal hesaplarda MAPLE 14 bilgisayar programı kullanılmış ve sonuçlar tablo ve grafikler şeklinde sunulmuştur.

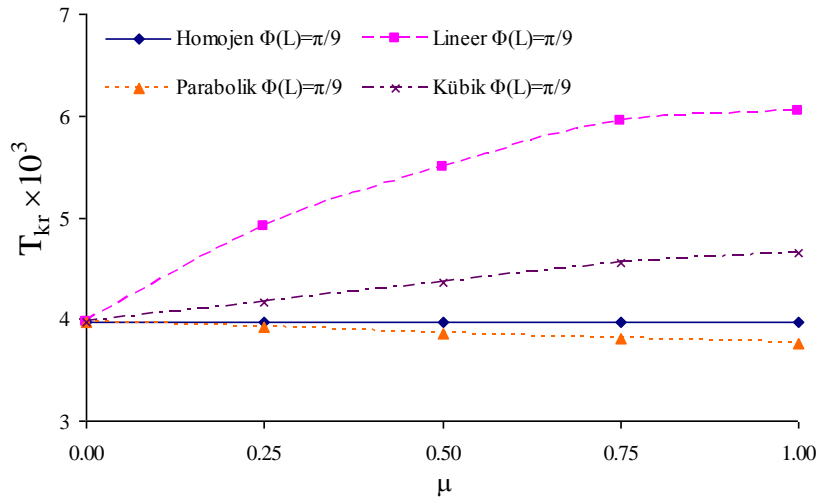
Tablo 2'de homojen durum, Young modülü ve termal genleşme katsayısı sabit ve kuvvet fonksiyonu şeklinde değiştiği durumlar için kürenin boyutsuz kritik sıcaklık artışları (T_{kr}^{Hom} ve T_{kr}^{NH}) ve uygun çevresel ve meridyenel dalga sayılarının, ϕ_L destekleyici açıya bağlı dağılımı sunulmaktadır. Tablo 2'den görüldüğü gibi, lineer durumda; destekleyici açı $\pi/18 \leq \phi_L \leq \pi/9$ aralığında değiştiğinde homojen olmayan elastik kürenin boyutsuz kritik sıcaklık artışı azalır, $\pi/9 < \phi_L < \pi/4$ arasında ise artar. Parabolik durumda, destekleyici açı $\pi/18 \leq \phi_L \leq \pi/4$ arasında değiştiğinde kritik sıcaklık artışı yavaş olsa da artar. Kübik durumda ise kritik sıcaklık artışı $\pi/18 \leq \phi_L \leq \pi/4$ aralığında yaklaşık olarak değişmez. Homojen durum için ise ϕ_L destekleyici açının artışına bağlı olarak T_{kr}^{Hom} kritik sıcaklık artışı artmaktadır. Bu durum kaynaklardaki referanslarla desteklenmektedir (bkz. [10-12, 15]). Ayrıca, ϕ_L destekleyici açısı arttığında, $\varphi(\bar{z})$ fonksiyonu lineer, parabolik ve kübik değiştiğinde elastik kürenin boyutsuz kritik üniform sıcaklık artışına etkisi azalır.

Tablo 2. T_{kr}^{Hom} ve T_{kr}^{NH} değerleri ve onlara karşı gelen (m,n) dalga sayılarının ϕ_L açısına bağlı değişimi ($R/h = 100$) (Values of the T_{kr}^{Hom} and T_{kr}^{NH} and corresponding wave numbers (m, n) depending on the angle ϕ_L ($R/h = 100$))

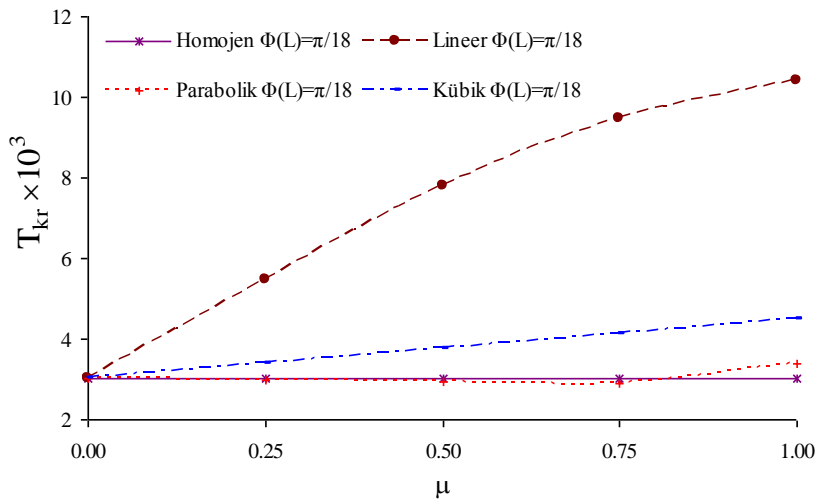
ϕ_L	$T_{kr}^{Hom} \times 10^3$ (m,n)		$T_{kr}^{NH} \times 10^3$ (m,n)	
	$\varphi(\bar{z})=0$	$\varphi(\bar{z})=\bar{z}$	$\varphi(\bar{z})=\bar{z}^2$	$\varphi(\bar{z})=\bar{z}^3$
$\pi/18$	3,022(1,1)	10,406(1,2)	3,375(1,1)	4,501(1,1)
$\pi/12$	3,624(1,1)	6,966(1,2)	3,375(1,1)	4,443(1,2)
$\pi/9$	3,967(2,1)	6,047(1,3)	3,759(2,1)	4,658(1,2)
$\pi/6$	4,141(3,1)	6,447(3,2)	3,921(3,1)	4,603(3,1)
$2\pi/9$	4,199(4,1)	5,643(4,1)	3,976(4,1)	4,499(4,1)
$\pi/4$	4,307(4,2)	5,375(4,2)	4,057(4,2)	4,543(4,2)

Şekil 2’de homojen durumda ve Young modülü ve termal genişleme katsayısı kuvvet fonksiyonu şeklinde değiştiğinde elastik kürenin boyutsuz kritik sıcaklık artışının μ katsayısına bağlı değişimi sunulmaktadır.

μ katsayısının artışına bağlı olarak kritik sıcaklık artışı değerlerinin önemli derecede arttığı açıkça görülmektedir.

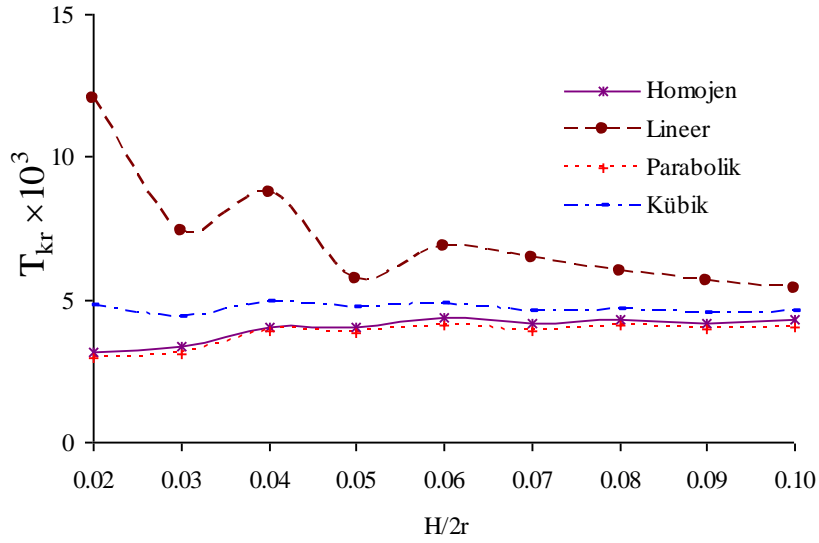


a)



b)

Şekil 2. Boyutsuz kritik üniform sıcaklık artışının μ katsayısına bağlı dağılımı ($\phi_L = \pi/9, \pi/18$; $R/h = 100$) (Distribution of the dimensionless critical uniform temperature rise versus to the coefficient μ ($\phi_L = \pi/9, \pi/18$; $R/h = 100$))



Şekil 3. Boyutsuz kritik üniform sıcaklık artışlarının $H/2r$ oranına bağlı değişimi ($\mu = 1$, $R/h = 100$) (The variation of the dimensionless critical uniform temperature rises versus to the ratio $H/2r$ ($\mu = 1$, $R/h = 100$))

Şekil 3’de, kürenin T_{kr}^{Hom} ve T_{kr}^{NH} boyutsuz kritik üniform sıcaklık artışlarının $H/2r$ oranına bağlı dağılımı sunulmaktadır. $\varphi(\bar{z})$ fonksiyonu kuvvet fonksiyonu şeklinde değiştiğinde, boyutsuz kritik üniform sıcaklık artışı $H/2r$ oranı arttığında bir düzensizlik göstermektedir. Homojen olmama ve termal genleşme katsayısı fonksiyonu değişiminin T_{kr}^{NH} boyutsuz kritik üniform sıcaklık artışına etkisinin önemli olduğu görülmektedir. Young modülü ve termal genleşme katsayısı fonksiyonu lineer ve kübik değiştiğinde, $H/2r$ oranının artışına bağlı olarak düzensiz bir azalma, parabolik durumda ise düzensiz bir artış görülmektedir (bkz. [12]). $H/2r$ oranı arttığında $\varphi(\bar{z})$ fonksiyonu değişiminin T_{kr}^{NH} boyutsuz kritik üniform sıcaklık artışına etkisi sürekli olarak azalmaktadır. Örneğin; $H/2r=0,02$ ’den $H/2r=0,1$ ’e kadar arttığında, T_{kr}^{NH} boyutsuz kritik üniform sıcaklık artışına etki $\varphi(\bar{z})$ kübik ise %51,5’den %5,5’e kadar azalmaktadır. Young modülü parabolik değiştiğinde boyutsuz kritik üniform sıcaklık artışına en fazla etki %6,56 olup %4,30’a kadar düzensiz bir azalma izlenmektedir.

5. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada sürekli homojen olmayan sıg küresel kabuğun termal burkulma analizi incelenmektedir. Önce, kalınlık doğrultusunda sürekli değişen izotrop malzeme özellikleri ve uygun termal genleşme katsayısının analitik modelleri oluşturulmaktadır. Problemin formülasyonunda Kirchhoff-Love’nin birinci mertebeden kabuk teorisi kullanılmakta ve gerilme-deformasyon bağıntılarında Hooke kuralı dikkate alınmaktadır. Donnell–Mushtari–Vlasov (DMV) varsayımları ve doğrusal gerilme-yer

değiştirme bağıntıları kullanılarak üç yer değiştirme fonksiyonuna bağlı stabilite denklemleri elde edilmekte ve basit mesnetli sınır koşulları için çözümler sığ küresel kabuğun boyutsuz kritik üniform sıcaklık artışı için analitik ifade elde edilmektedir. Özel durumda sabit termal genleşme katsayıları için homojen izotrop küresel kabuğun boyutsuz kritik üniform sıcaklık artışının ifadesi elde edilmektedir. Bu çalışmanın geçerliliği için elde edilen sonuçlar literatürde sunulan çözümlerle karşılaştırılmış ve doğruluğu kanıtlanmıştır. Son olarak Young modülü ve uygun termal genleşme katsayısının kalınlık koordinatlarına bağlı kuvvet fonksiyonu şeklinde değişiminin, değişim katsayısı ve kürenin geometrik parametreleri değişiminin boyutsuz kritik üniform sıcaklık artışlarına etkileri MAPLE 14 bilgisayar programı kullanılarak sayısal olarak incelenmiştir.

6. SEMBOLLER (SYMBOLS)

$A_i, i = 1,2,3$: Bilinmeyen sabitler
$a_{ij} (i, j = 1,2,3)$: Malzeme ve kabuk karakteristیکlerine bağlı katsayılar
a'_{33}	: Kabuk karakteristیکleri ve yüklenme durumuna bağlı katsayı
$C_i, C_{ja}, C_{kb}, C_{qc}$: Kabuk parametrelerine bağlı katsayılar
d	: Homojen olmamada kuvvet fonksiyonunun derecesi
E_0, E	: Homojen ve homojen olmayan malzemenin Young modülleri
$e_\phi, e_\theta, e_{\phi\theta}$: Küresel kabuğun orta yüzeyindeki deformasyon bileşenleri
H, h	: Küre kesitinin yüksekliği ve küresel kabuğun kalınlığı

$M_\phi, M_\theta, M_{\phi\theta}$: Moment bileşenleri
m, n	: Meridyenel ve çevresel dalga sayıları
r, R	: Küre kesitinin yarıçapı ve küresel kabuğun yarıçapı
θ, ϕ	: Çevresel ve enlemsel-meridyenel koordinatlar
$T, \Delta T, T(z), \Delta T$: Sıcaklık, sıcaklık artışı ve sıcaklık fonksiyonu
T_{kr}^H, T_{kr}^{NH}	: H ve NH küresel kabukta boyutsuz kritik üniform sıcaklık artışı
$T_{\theta_0}, T_{\phi_0}, T_{\phi\theta_0}, T_0^b$: Burkulma öncesi yükler
$T_\phi, T_\theta, T_{\phi\theta}$: Kuvvet bileşenleri
u, v, w	: Meridyenel, çevresel ve radyal doğrultulardaki yer değiştirmeler
z	: Küresel kabuğun kalınlık koordinatı
α_0, α	: H ve NH malzemenin termal genleşme katsayısı
$\beta_i (i = 1, 2, \dots, 8)$: Malzeme özellikleri ve sıcaklığına bağlı katsayılar
$\chi_\phi, \chi_\theta, \chi_{\phi\theta}$: Orta yüzeyin ϕ ve θ doğrultuları ve burulmasındaki eğrilikler
ϕ_L	: Küresel bölge açısı
$\varphi(\bar{z})$: Young modülü ve termal genleşme katsayısı değişim fonksiyonu
$\Lambda_i (i = 1, 2, 3)$: Diferansiyel operatörler
λ	: Dalga sayısı ve meridyenel koordinata bağlı parametre
μ	: Young modülü ve termal genleşme değişim katsayısı
ν	: Homojen ve homojen olmayan malzemenin Poisson oranı
$\sigma_\phi, \sigma_\theta, \sigma_{\phi\theta}$: Gerilme bileşenleri
$(,)$: Koordinatlara göre kısmi türevler

7. TEŞEKKÜR (ACKNOWLEDGMENT)

Yazarlar 1755-YL-08 Nolu Projeye verdiği destekten dolayı Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi Başkanlığı'na teşekkürlerini sunarlar.

8. KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Ogibalov, P.M. ve Griбанov, V.F., **Thermo-elastic Stability of Plates and Shells**, Moscow State University, Rusya, 1968.
2. Kaplan, A., "Buckling of Spherical Shells", **Thin Shell Structures. Theory, Experiment and Design**, Editörler: Fung, Y.C., ve Sechler, E.E., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 247-288, 1974.
3. Khoroshun, L.P., Kozlov, S.Y., Ivanov, Y.A. ve Koshevoi, I.K., **The Generalized Theory of Plates and Shells Non-homogeneous in**

Thickness Direction, Naukova Dumka, Kiev, 1988.

4. Ootao, Y. ve Tanigawa, Y., "Three-dimensional Transient Thermal Stress Analysis of a Nonhomogeneous Hollow Sphere with Respect to a Rotating Heat Source", **Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers**, Cilt 460, 2273-2279, 1994.
5. Sofiyev, A.H. ve Schnack, E., "The Buckling of Cross-ply Laminated Non-homogeneous Orthotropic Composite Conical Thin Shells Under a Dynamic External Pressure", **Acta Mechanica**, Cilt 162, 29-40, 2003.
6. Shen, H.S. ve Noda, N., "Post-buckling of Pressure-loaded FGM Hybrid Cylindrical Shell in Thermal Environments", **Composite Structures**, Cilt 77, 546-560, 2007.
7. Budiansky, B., "Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells", **Proc. IUTAM Symp. on the theory of thin elastic shells**, Delft, Netherlands, 64-94, 1959.
8. Aggarwala, B.D. ve Saibel, E., "Thermal Stability of Bimetallic Shallow Spherical Shells", **International Journal of Non-linear Mechanics**, Cilt 5, 49-62, 1970.
9. Jianping, P. ve Harik, I.E., "Thermal Stresses in Spherical Shells", **Journal of Aerospace Engineering**, Cilt 6, 106-110, 1993.
10. Eslami, M.R., Ghorbani, H.R. ve Shakeri, M., "Thermo-elastic Buckling of Thin Spherical Shells", **Journal of Thermal Stresses**, Cilt 24, 1177-1198, 2001.
11. Batista, M. ve Kosel, F., "Thermoelastic Stability of Bimetallic Shallow Shells of Revolution", **International Journal of Solids Structures**, Cilt 44, 447-464, 2007.
12. Shahsiah, R., Eslami, M.R. ve Naj, R., "Thermal Instability of Functionally Graded Shallow Spherical Shell" **Journal of Thermal Stresses**, Cilt 29, 771-785, 2006.
13. Ganapathi, M., "Dynamic Stability Characteristics of Functionally Graded Materials Shallow Spherical Shells", **Composite Structures**, Cilt 79, 338-343, 2007.
14. Akış, T., "Yielding of Functionally Graded Long Tubes under Thermal Loading", **Journal of the Faculty of Engineering Architecture of Gazi University**, Cilt 21, 737-743, 2006.
15. Sofiyev, A.H., Özyiğit, P., Avcar, M. ve Zerin, Z., "The Stability of Continuously Non-homogenous Spherical Shells Subjected to External Pressure", **9th International Congress on Advances in Civil Engineering**, KATU, Trabzon, 303, 27-30, Eylül 2010.
16. Timoshenko, S. ve Woinoswsky-Krieger, S., **Theory of Plates and Shells**, McGraw-Hill, 1985.
17. Flügge, W., **Stresses in Shells**, (second ed.), Springer, Berlin, 1973.

EK (APPENDIX)

C_i ($i = 1, \dots, 22$), C_{ja} ($j = 1, \dots, 8$), C_{kb} ($k = 1, \dots, 9$), C_{qc} ($q = 1, \dots, 6$) katsayıları için geçerli olan tanımlar şu şekildedir:

$$C_1 = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \cos^2(\lambda\phi) \sin^2 \phi d\theta d\phi,$$

$$C_2 = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \cos^2(\lambda\phi) \cos^2 \phi d\theta d\phi,$$

$$C_3 = \frac{1}{2} \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \cos(\lambda\phi) \sin(\lambda\phi) \sin 2\phi d\theta d\phi,$$

$$C_4 = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta \cos^2 \lambda\phi d\theta d\phi,$$

$$C_5 = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \cos(\lambda\phi) \sin(\lambda\phi) \cos \phi d\theta d\phi,$$

$$C_6 = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \cos^2(\lambda\phi) \sin \phi d\theta d\phi,$$

$$C_7 = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(n\theta) \cos(\lambda\phi) \sin(\lambda\phi) \cos \phi}{\sin \phi} d\theta d\phi,$$

$$C_8 = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \sin(n\theta) \cos^2(\lambda\phi) \cot \phi d\theta d\phi,$$

$$C_9 = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin(\lambda\phi) \cos(\lambda\phi) \sin \phi d\theta d\phi,$$

$$C_{10} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) \sin \phi d\theta d\phi,$$

$$C_{11} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) \frac{\cos^2 \phi}{\sin \phi} d\theta d\phi,$$

$$C_{12} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta \sin \lambda\phi \cos \lambda\phi \cos \phi d\theta d\phi,$$

$$C_{13} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) \frac{1 + \cos^2 \phi}{\sin \phi} d\theta d\phi,$$

$$C_{14} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta) \sin(n\theta) \sin^2 \lambda\phi}{\sin \phi} d\theta d\phi,$$

$$C_{15} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi)}{\sin \phi} d\theta d\phi,$$

$$C_{16} = \frac{1}{2} \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) \sin 2\phi d\theta d\phi,$$

$$C_{17} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) \cos^2 \phi d\theta d\phi,$$

$$C_{18} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) \cot^2 \phi d\theta d\phi,$$

$$C_{19} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) (1 + \cos^2 \phi) d\theta d\phi,$$

$$C_{20} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) \frac{1 + \cos^2 \phi}{\sin^2 \phi} d\theta d\phi,$$

$$C_{21} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin(\lambda\phi) \cos(\lambda\phi) \cos \phi \frac{1 + \cos^2 \phi}{\sin \phi} d\theta d\phi,$$

$$C_{22} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi)}{\sin^2 \phi} d\theta d\phi,$$

$$C_{1a} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) \sin^2 \phi d\theta d\phi,$$

$$C_{2a} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) \sin \phi d\theta d\phi,$$

$$C_{3a} = \frac{1}{2} \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta) \sin(\lambda\phi) \cos(\lambda\phi) \sin 2\phi d\theta d\phi,$$

$$C_{4a} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta) \sin(\lambda\phi) \cos(\lambda\phi) \cos \phi d\theta d\phi,$$

$$C_{5a} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) \cos^2 \phi d\theta d\phi,$$

$$C_{6a} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) \frac{\cos^2 \phi}{\sin \phi} d\theta d\phi,$$

$$C_{7a} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi)}{\sin \phi} d\theta d\phi,$$

$$C_{8a} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) \sin \phi d\theta d\phi,$$

$$C_{1b} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) \sin^2 \phi d\theta d\phi,$$

$$C_{2b} = \frac{1}{2} \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) \cos(\lambda\phi) \sin 2\phi d\theta d\phi,$$

$$C_{3b} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin(\lambda\phi) \cos(\lambda\phi) \frac{\cos^3 \phi}{\sin \phi} d\theta d\phi,$$

$$C_{4b} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) \cos \phi \cos \phi d\theta d\phi,$$

$$C_{5b} = \frac{1}{2} \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin(\lambda\phi) \cos(\lambda\phi) \sin 2\phi d\theta d\phi,$$

$$C_{6b} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) \cos \phi \cos \phi d\theta d\phi,$$

$$C_{7b} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin(\lambda\phi) \cos(\lambda\phi) \cot \phi d\theta d\phi,$$

$$C_{8b} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin(\lambda\phi) \cos(\lambda\phi) \cot \phi d\theta d\phi,$$

$$C_{9b} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) d\theta d\phi,$$

$$C_{1c} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \cos(\lambda\phi) \sin \lambda\phi \sin^2 \phi d\theta d\phi,$$

$$C_{2c} = \frac{1}{2} \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \cos(\lambda\phi) \sin(\lambda\phi) \cot \phi \sin(2\phi) d\theta d\phi,$$

$$C_{3c} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) \cos \phi d\theta d\phi,$$

$$C_{4c} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin^2(\lambda\phi) \cot \phi d\theta d\phi,$$

$$C_{5c} = \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin(\lambda\phi) \cos(\lambda\phi) d\theta d\phi,$$

$$C_{6c} = \frac{1}{4} \int_0^{\phi_L} \int_0^{2\pi} \sin(2\lambda\phi) \sin(2n\theta) \sin \phi d\theta d\phi$$

