

EKSENEL SİMETRİK SİLİNDİRİK DUVARLARIN FARKLI YÖNTEMLERLE ANALİZ SONUÇLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

Gebrail BEKDAŞ^a, Namık Kemal ÖZTORUN^a

^aİstanbul Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü 34320 Avcılar/İstanbul
bekdas@istanbul.edu.tr, kemal@istanbul.edu.tr

(Geliş/Received: 11.07.2011; Kabul/Accepted: 28.12.2011)

ÖZET

Yapım ve fonksiyon yönünden önem arz eden yapılarda sıkça kullanılan kabuk yapılar, kesin çözüm bakımından gerek matematiksel, gerekse geometrik olarak karmaşık yapısal sistemler arasındadır. Bu durum, kabuk yapıların matematiksel ifadelerinin çözümünde çeşitli varsayımlar yapılmasına veya alternatif çözüm yollarının araştırılmasına neden olmaktadır. Kabuk yapıların bir türü olan silindirik kabuklar ile elastik zemine oturan kirişin diferansiyel denklemleri arasında benzerlik vardır. Bu benzerlikten yararlanılarak silindirik kabukların analizlerini yapmak mümkündür. Elastik zemine oturan kiriş analizlerinde kullanılan yöntemlerden biri Hetenyi [1] tarafından geliştirilen süperpozisyon yöntemidir. Çalışmada, eksenine göre simetrik yayılı kuvvetlerin etkisi altındaki silindirik kabukların analizleri süperpozisyon yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Farklı mesnet koşullarına sahip, uzun ve kısa silindirik duvarlar üzerinde yapılan analizlerde, uzun duvar kabulünün geçerlilik sınırları dışında kullanılması durumunda oluşacak hatalar incelenmiştir. Bu amaç doğrultusunda süperpozisyon yöntemi ile elde edilen sonuçlar, klasik kabuk teorisi ile iki bilinmeyenli (uzun duvar kabulü) analiz sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Bunların yanında örneklerin sonlu elemanlar yöntemi ile analizleri de yapılmıştır. Çalışmada, süperpozisyon yöntemi ile analizlerin yapılması amacıyla bir algoritma geliştirilmiş ve bu algoritmayı temel alan bir bilgisayar programı da yazılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kabuk yapılar, Kısa silindirik duvar, Eksenel simetrik yükler, Elastik zemine oturan kiriş, Süperpozisyon yöntemi.

COMPARISON OF AXIALLY SYMMETRICAL CYLINDRICAL WALLS ANALYSIS RESULTS WITH DIFFERENT METHODS

ABSTRACT

Shells, which are being used frequently in functionally important structures, are among mathematically and geometrically complex structural systems in the sense of exact solutions. This complication leads to making assumptions or searching alternative solution approaches, in solving shell structures' mathematical expressions. Differential equations of beams on elastic foundations and cylindrical shells, which constitute a special type of shell structures, are similar. By using this similarity, it is possible to make the analysis of cylindrical shells. One of the methods used in analyzing beams on elastic foundations is the superposition method, which is developed by Hetenyi [1]. In this study, the analysis of cylindrical shells under the axially symmetrical distributed loads, is made by using the superposition method. It is investigated that the differences which occurred in the analysis of long and short cylindrical walls hold different support conditions, in case of being out of the limit of the validity of long cylindrical wall assumption. In accordance with this purpose, the analyses results of superposition method are compared to, classical shell theory with two unknown variables. In addition to this, finite element method analyses are made for all studies. In the present study, an algorithm is developed in order to make the analyses with the superposition method, and a computer program based on this algorithm is developed.

Keywords: Shell structure, Short cylindrical wall, Axisymmetric loading, Beams on elastic foundation, The method of superposition.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Kabuklar, kalınlıkları diğer boyutlarına ve asal eğrilik yarıçaplarına oranla küçük olan eğri plaklardır. İbadethaneler, barajlar, su depoları gibi özellik arz eden yapılarda kabuklar sıkça kullanılmaktadır. Silindirik kabuğun küçük bir elemanı üzerinde denge denklemleri yazıldığında, elde edilen diferansiyel denklem ile elastik zemine oturan kirişin diferansiyel denkleminin benzer olduğu görülmüştür. Bu benzerlikten yararlanılarak, eksenine göre simetrik yayılmış kuvvetlerin etkisi altındaki silindirik kabukların analizleri yapılabilmektedir.

Elastik zemine oturan kiriş analizlerinde kullanılan zemin modeli ilk olarak Winkler tarafından ortaya konulmuştur [2]. Bu modele göre zemin birbirinden bağımsız sonsuz sayıda yaylardan oluşmaktadır. Zeminde oluşan reaksiyon kuvvetleri kirişlerin o noktadaki yer değiştirmesi ile orantılıdır. Bu orantı elastik yayların yay katsayına eşittir. Bunun yanında model, uygulanan yük altında şekil değiştiren elemanların yükün kaldırılması ile orijinal haline döneceğini varsaymaktadır [3,4]. Geliştirdiği zemin modelini demiryollarında gerilme analizlerinde kullanan Winkler, rayları kiriş olarak modellemiş ve modelinin diferansiyel denklem çözümünden yer değiştirme ifadesini elde etmiştir. Elastik zemine oturan kiriş varsayımı kullanılarak demiryolları analizlerinin yapılması ile ilgili olarak birçok yayın mevcuttur. Bu çalışmalar Kerr tarafından makale olarak toplanmıştır [5].

Demiryollarında yapılan analizlerin yanında elastik zemine oturan kiriş teorisi, yapısal analizlerde eksenel simetrik silindirik duvarlarda, sürekli temellerde ve istinat yapılarının analizlerinde de kullanılmaktadır.

Elastik zemine oturan kirişe ait yer değiştirme denkleminde bulunan dört integrasyon sabitinin belirlenmesi teknik olarak çok zor olmamakla birlikte, düzgün yayılı yük veya türevlerinin süreksizlik arz etmesi durumu ile tekil yük veya moment gibi noktasal yüklerin bulunması durumlarında hesaplarda zorluklar ortaya çıkmaktadır. Hesaplarda ortaya çıkan zorluğun nedeni, söz konusu yükler sonucunda oluşan süreksizliklerle birlikte integral sabitlerinin değişmesidir. Bu sorunun çözümü ile ilgili olarak literatürde bazı yöntemler bulunmaktadır. Bunların içerisinde çalışmalarda yaygın kullanılan yöntemler; Umansky [6] tarafından geliştirilen başlangıç parametreleri yöntemi ve Hetenyi [1] tarafından geliştirilen süperpozisyon yöntemidir. Başlangıç parametreleri ve süperpozisyon yöntemlerinin dışında araştırmacılar tarafından yer değiştirme denkleminin çözümü için çeşitli nümerik teknikler geliştirilmiştir. Bu tekniklerle ilgili detaylı literatür bilgisi Selvadurai tarafından bir kitapta toplanmıştır [7].

Elastik zemine oturan kirişlerin analizleri ile ilgili yazılmış birçok kitap bulunmaktadır [8-11]. Bunlar içerisinde Hetenyi'nin 1946 yılında yayınladığı kitabı, konu ile ilgili birçok çözümü barındıran ana kaynaklardan biri olarak kabul edilmektedir. Hetenyi'nin bu kitabının yayınlanmasının ardından elastik zemine oturan kirişlerin analizleri ile ilgili birçok yöntem geliştirilmiştir. Levinton elastik zemine oturan kirişin altında oluşan gerilme dağılımını, bilinmeyen kuvvetler serisine dönüştürerek yaklaşık bir çözüm elde etmiştir [12]. Penzlen yer değiştirme ifadesinde bulunan integrasyon sabitlerinin bulunmasını sağlayacak bir yöntem önermiştir. Bu yöntemde göre süreksiz yüklemelerin olduğu noktalarda, sürekli kiriş ve çerçevelerde kullanılan Hardy Cross [13] yöntemine benzer bir iterasyon yöntemi uygulanarak analizler yapılmasını önermiştir [14]. Popov tarafından elastik zemine oturan kirişlerin analizlerinde kullanılmak üzere moment-alan olarak bilinen yöntemine benzer bir yöntem geliştirilmiştir [15]. Bu yöntem Hetenyi [8]'nin kitabında kısaca bahsedilen Vioanello-Stodola [16-17] yönteminin uzantısı ve sistematik halidir. Popov'un, grafiksel olarak yaptığı analizlerde kabul edilebilir yaklaşıklıkta çözümler elde etmiştir. Iyengar ve Anantharamu [18] çözüm için tesir çizgileri metodunu kullanmışlardır. Miranda ve Nair [19] ise çalışmalarında başlangıç parametreleri yöntemini kullanmışlardır. Yöntemde kullanılan dört fonksiyonun yükün uygulama noktasına bağlı değişimini tablolaştırmışlardır. Elde ettikleri tabloları kirişlerin analizlerinde kullanılmasını önermişlerdir. Beaufait [20] diferansiyel denklemin çözümünde sonlu farklar metodunun kullanılmasını önermiştir. Ting [21], Miranda ve Nair'in çalışmasında benzer olarak başlangıç parametreleri yönetimi denklemlerini kullanılmış ve denklemlere çeşitli sınır şartları altında çözüm yapılmasını sağlayacak terimleri eklemiştir. Bu sayede bilinen mesnet koşulları veya başlangıç noktasında tanımlanacak herhangi bir mesnet rijitliği ile analiz yapılmasını sağlamıştır. Eisenberger ve Yankelevsky [22] çalışmalarında başlangıç parametreleri yöntemini temel almışlardır. Çalışmada söz konusu yöntemde verilen yer değiştirme ifadeleri kullanılarak kiriş için rijitlik matrisini elde etmişlerdir. Bir diğer çalışmalarında kolondan gelen kuvvetlerin etkisine göre elde ettikleri rijitlik matrisini düzenlemişlerdir [23]. Konuyla ilgili son çalışmalarında ise, diğerlerinden farklı olarak zemini nonlineer olarak modellemişlerdir [24].

Bilington [25] eksenel simetrik silindirik duvar analizlerinde, elastik zemine oturan kiriş benzerliğini kullanmıştır. Çalışmasında farklı mesnet koşulları ve duvara bağlı yapısal elemanların bulunması durumlarını inceleyen Bilington, uzun duvar varsayımını (iki bilinmeyenli analizler) kullanarak yaptığı analizlerinde fleksibilite metodundan yararlanmıştır. Silindirik duvarların analizleri üzerine yapılan diğer çalışmalarda olduğu gibi Ghali [26] de

çalışmasında elastik zemine oturan kiriş benzerliğinden yararlanmıştır. Ghali kitabında, farklı kalınlıktaki duvarların analizleri, sonlu elmanlar yöntemi ile duvar analizleri gibi çeşitli konularda bilgiler de vermiştir. Bunların yanında kabuk yapılar başlığı altında yazılan birçok kitapta uzun (iki bilinmeyenli analiz) ve kısa (4 bilinmeyenli analiz) silindirik duvarların analizleri ile ilgili bilgiler bulunmaktadır [27-29]. Öztoran ve Utku [30] eksenel simetrik silindirik duvarların analizlerinde süperpozisyon yöntemini kullanan analitik bir çözüm önermişlerdir. Çalışmalarında yapısal elemanları kubbe, çember kiriş ve silindirik duvar olan su depolarının analizlerini fleksibilite metodunu kullanarak yapmışlardır. Analizleri yapılan su depoları Suudi Arabistan'da inşa edilmiştir [31-33]. Diğer bir çalışmada Öztoran ve diğ. [34] silindirik duvar analizlerini beş moment denklemleri kullanarak yapmışlardır. Beş moment denklemleri sürekli kirişlerin analizlerinde kullanılan Clapeyron denklemleri temel alınarak, elastik zemine oturan kirişlerin analizi için geliştirilmiştir [35]. Bekdaş çalışmasında klasik kabuk teorisi ve beş moment denklemlerini kullanarak eksenel simetrik kısa silindirik duvarların analizi için alternatif bir yol önermiştir [36].

2. EKSENEL SİMETRİK SİLİNDİRİK KABUKLAR (AXIALLY SYMMETRICAL CYLINDRICAL SHELLS)

Eksenine göre simetrik yayılmış kuvvetlerin etkisi altındaki dairesel silindirik kabuklara mühendislik uygulamalarında yaygın olarak karşılaşılmaktadır. Su veya herhangi bir akışkan içeren silindirik depolardaki gerilmeler, buhar basıncının tesirine maruz silindirik kazanlardaki gerilme yayılımı ve üniform iç basınca maruz dairesel borulardaki

gerilmeler bu çeşit problemlere örnek teşkil etmektedir.

Şekil 1'de silindirik kabuğa ait diferansiyel eleman görülmektedir. Şekilde r silindirik duvarın yarıçapını, q kabuğa etkiyen yayılı yükü, M_x boyuna momenti, M_ϕ enine momenti, Q_x kesme kuvvetini, N_ϕ çembersel çekme kuvvetini temsil etmektedir. Kabuk elemanında yazılan ifadelerde plak kalınlığının sabit olması halinde,

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{r^2} w = q \quad (1)$$

diferansiyel denklemi elde edilmektedir [37]. Denklemde,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

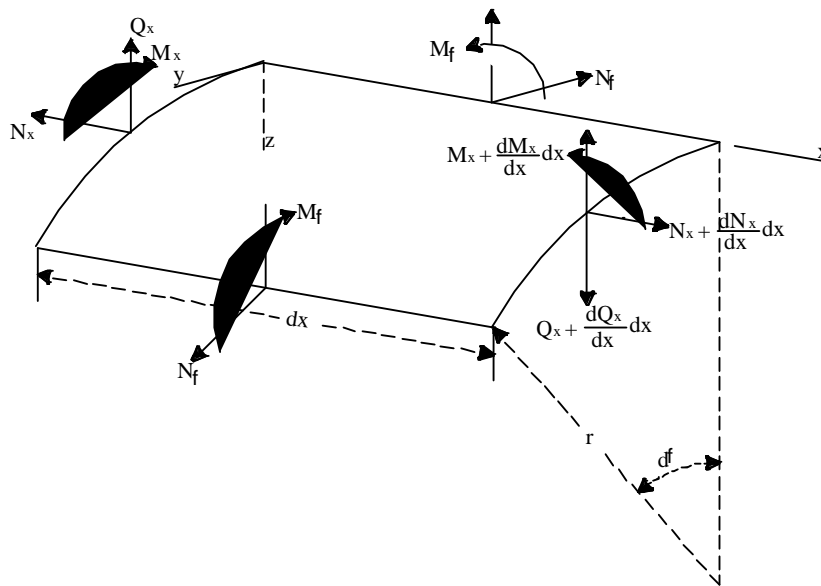
ifadesi silindirik kabuğun eğilme rijitliğini, E elastisite modülü, w yerdeğiştirme, ν poisson oranı, h duvarın kalınlığını ifade etmektedir. Denklem 1'de

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4r^2 D} = \frac{3(1-\nu^2)}{r^2 h^2} \quad (3)$$

notasyonu kullanılması durumunda,

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{q}{D} \quad (4)$$

denklemi elde edilmektedir. Bu ifade, eğilme rijitliği D olan ve q şiddetinde bir yükün etkisi altındaki elastik zemine oturan sürekli kirişin diferansiyel denklemi ile aynıdır [38].



Şekil 1. Silindirik kabuk diferansiyel elemanı (Differential element of cylindrical shell)

Denklemin genel çözümü,

$$w = e^{\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + f(x) \quad (5)$$

şekindedir. Burada $f(x)$, Denklem 5'e ait özel bir çözümdür. C_1, C_2, C_3 ve C_4 silindirin sınır şartlarına bağlı integrasyon sabitleridir.

Silindirik kabuklar için elde edilen yerdeğiştirme denklemi ile elastik zemine oturan kiriş denklemleri arasında benzerlik vardır. Bu iki denklem arasındaki tek fark Denklem 5'te kullanılan silindirik duvarda kullanılan β yerine kirişlerde λ parametresinin kullanılmasıdır. Buna göre kiriş için yerdeğiştirme denklemi;

$$w = e^{\lambda x}(C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) + e^{-\lambda x}(C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x) \quad (6)$$

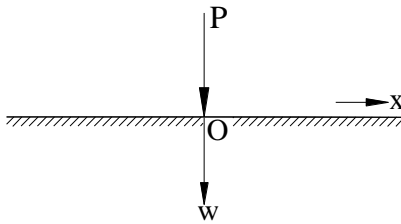
olmaktadır. Denklemden kullanılan λ parametresi;

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \quad (7)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. İfadeye k elastik mesnetlerin yay katsayılarını EI ise kirişin eğilme rijitliğini ifade etmektedir

3. SÜPERPOZİSYON YÖNTEMİ (SUPERPOSITION METHOD)

Şekil 2'de elastik zemine oturan, ortasından tekil yükü yüklü sonsuz uzunluktaki bir kiriş görülmektedir



Şekil 2. Tekil yük etkisi altında sonsuz uzunluktaki kiriş (An infinite beam subjected to a single concentrated force)

Şekilde verilen problemde yükün uygulama noktasından uzak bir mesafede kirişin yerdeğiştirme değeri sıfıra yaklaşmaktadır. Bir başka ifadeyle, yükün etki noktasından uzaklık $x \rightarrow \infty$ giderken yerdeğiştirme $w \rightarrow 0$ gitmektedir. Bu durumun gerçekleşmesi ancak Denklem 6'da verilen ifadedeki $e^{\lambda x}$ 'in çarpım halinde olduğu $(C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x)$ teriminin sıfır olması ile sağlanabilir. Bu terimin sıfır olması ise integral sabitleri olan $C_1 = 0$ ve $C_2 = 0$ olması ile mümkündür. Bu durumda Denklem 6 ile verilen yerdeğiştirme ifadesi,

$$w = e^{-\lambda x}(C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x) \quad (8)$$

şeklini almaktadır. Simetriden dolayı $\left[\frac{dw}{dx}\right]_{x=0} = 0$ olmaktadır. Buradan $C_3 = C_4 = C$ elde edilmektedir. Reaksiyon kuvvetleri ile etki eden P kuvvetinin eşitliği $2 \int_0^{\infty} k w dx = P$ şeklinde yazıldığında Denklem 8 ile verilen ifadenin son hali;

$$w = \frac{P\lambda}{2k} e^{-\lambda x}(\cos \lambda x + \sin \lambda x) \quad (9)$$

olmaktadır. Denklem 9'dan açısal yerdeğiştirme θ , moment M ve kesme kuvveti Q ifadeleri;

$$\frac{dw}{dx} = \theta = -\frac{P\lambda^2}{k} e^{-\lambda x} \sin \lambda x$$

$$-EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M = \frac{P}{4\lambda} e^{-\lambda x}(\cos \lambda x - \sin \lambda x)$$

$$-EI \frac{d^3 w}{dx^3} = Q = -\frac{P}{2} e^{-\lambda x}$$

elde edilir. İfadelerde;

$$A_{\lambda x} = e^{-\lambda x}(\cos \lambda x + \sin \lambda x)$$

$$B_{\lambda x} = e^{-\lambda x} \sin \lambda x$$

$$C_{\lambda x} = e^{-\lambda x}(\cos \lambda x - \sin \lambda x)$$

$$D_{\lambda x} = e^{-\lambda x} \cos \lambda x$$

fonksiyonlarının kullanılması durumunda ifadelerin son hali,

$$w = \frac{P\lambda}{2k} A_{\lambda x} \quad (10a)$$

$$\theta = -\frac{P\lambda^2}{k} B_{\lambda x} \quad (10b)$$

$$M = \frac{P}{4\lambda} C_{\lambda x} \quad (10c)$$

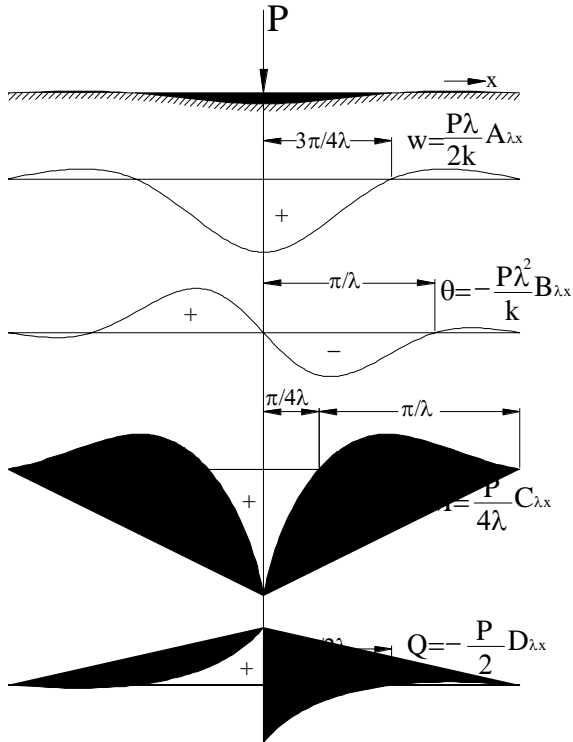
$$Q = -\frac{P}{2} D_{\lambda x} \quad (10d)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem 10a-10d'de P kuvvetinin etkisinde oluşan w , θ , M ve Q ifadelerinin kirişin sağ tarafındaki ($x > 0$) noktalara ait eğrilerinin denklemleri verilmektedir. P kuvvetinin etkideği noktanın sol tarafında w ve M eğrilerinin işaretleri aynı kalmaktadır. Fakat θ ve Q ifadelerinin işaretleri değişmektedir (Şekil 3).

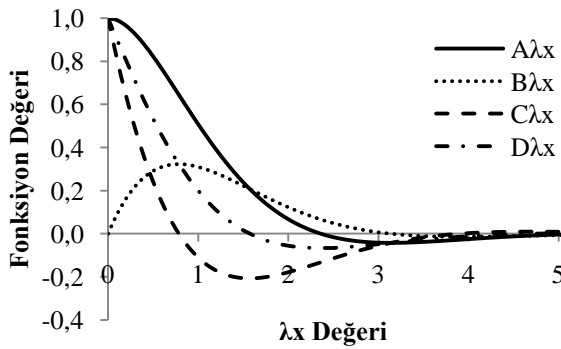
Şekil 4'te, Denklem 10a-d'de verilen ifadelerde kullanılan fonksiyonların artan λx değerlerine göre değişimi grafiği görülmektedir.

Şekilden, fonksiyonların en önemli özelliğinin hızla azalmaları olduğu görülmektedir. Fonksiyonların değerlerine bakıldığında dört fonksiyonda, $\lambda x > \pi$ için 0,05'in, $\lambda x > 1,5\pi$ için ise 0,01'in altında değer aldıkları görülmektedir. Bu durum, uygulama noktasından itibaren $x = 1,5\pi/\lambda$ (veya $x = \pi/\lambda$ noktasından itibaren) mesafelerinde yükün etkisinin azalarak şekil değıştirme eğrisi üzerinde ihmal edilebilecek kadar az bir etkisinin kalacağı anlamına

gelmektedir. Bir başka ifadeyle, $l=2\pi/\lambda$ uzunluğunda ve orta noktasında P yükü bulunan kiriş ile sonsuz uzunluktaki bir kirişin şekil değiştirme eğrileri yaklaşık olarak aynıdır denilebilir.



Şekil 3. Tekil yük denklemlerine ait eğriler (Curves of concentrated force equations)



Şekil 4. $A_{\lambda x}$, $B_{\lambda x}$, $C_{\lambda x}$, $D_{\lambda x}$ fonksiyonları grafiği (The graph of $A_{\lambda x}$, $B_{\lambda x}$, $C_{\lambda x}$, $D_{\lambda x}$ functions)

Benzer şekilde M_0 momenti etkisi altında kiriş için w , θ , M ve Q ifadeleri elde edilebilir (Şekil 5a). Bu M_0 momenti Şekil 5b'de verilen kuvvet çifti şekline dönüştürülebilir.

Kuvvet çifti arasındaki mesafe a sıfıra yaklaşırken ($a \rightarrow 0$), Pa değeri M_0 değerine yaklaştığı varsayılarak ($Pa \rightarrow M_0$), Denklem 10a'da verilen doğrusal yerdeğiştirme ifadesi yazılacak olursa;

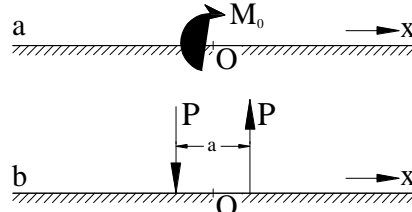
$$w = \frac{P\lambda}{2k} (-A_{\lambda(x+a)} + A_{\lambda x}) = -\frac{Pa\lambda}{2k} \frac{A_{\lambda(x+a)} - A_{\lambda x}}{a} \quad (x > 0)$$

$$\left[\frac{A_{\lambda(x+a)} - A_{\lambda x}}{a} \right]_{a \rightarrow 0} = \frac{d}{dx} A_{\lambda x} = -2\lambda B_{\lambda x}$$

Aynı zamanda $[Pa]_{a \rightarrow 0} = M_0$ olduğuna göre doğrusal yerdeğiştirme ifadesi;

$$w = \frac{M_0 \lambda^2}{k} B_{\lambda x} \quad (11a)$$

şeklini alır.



Şekil 5. Moment etkisi altında sonsuz uzunluktaki kiriş (An infinite beam subjected to moment)

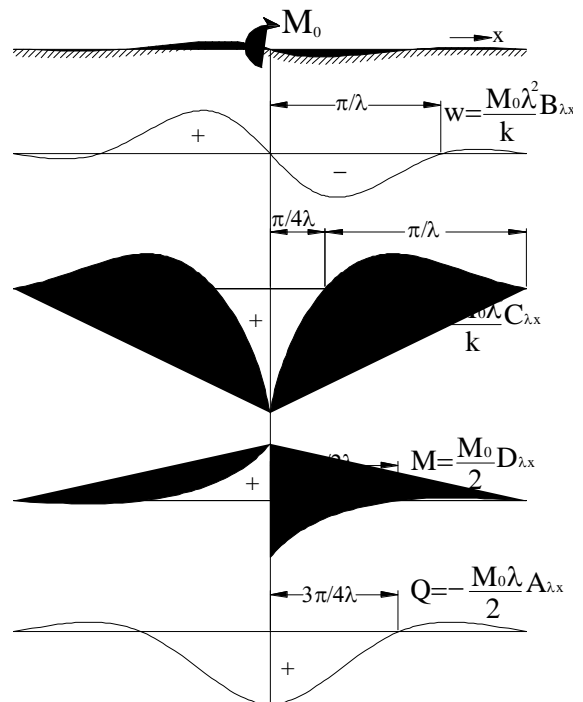
Açılma yerdeğiştirme θ , moment M ve kesme kuvveti Q ifadeleri ise;

$$\frac{dw}{dx} = \theta = \frac{M_0 \lambda^3}{k} C_{\lambda x} \quad (11b)$$

$$-EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M = \frac{M_0}{2} D_{\lambda x} \quad (11c)$$

$$-EI \frac{d^3 w}{dx^3} = Q = -\frac{M_0 \lambda}{2} A_{\lambda x} \quad (11d)$$

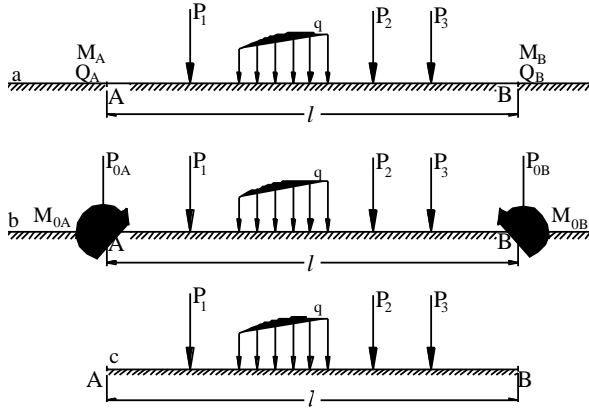
olarak elde edilir. Denklem 11a - 11d'de saat yönünde M_0 momenti etkisinde oluşan w , θ , M ve Q ifadelerinin kirişin sağ tarafındaki ($x > 0$) noktalara ait eğrilerin denklemleri verilmektedir. M_0 momentinin etkidiği noktanın sol tarafında ise, w ve M ifadelerinin işaretleri değişmektedir (Şekil 6).



Şekil 6. Moment denklemlerine ait eğriler (Curves of moment equations)

M_0 momentinin saat yönünün tersine etkimesi durumunda ise, grafikler etkime noktasının her iki yönünde de Şekil 6'da verilen yönlerin tersine dönmektedir.

Şekil 7c'de çeşitli yüklerin etkisinden altındaki iki ucu serbest sonlu (kısa) kiriş görülmektedir. Bu kirişe ait yer değiştirme ve kesit tesirleri ifadeleri süperpozisyon yöntemi ile elde edilecektir. Bunun için Şekil 7a'da verilen sonsuz uzunluktaki kirişten yararlanılacaktır. Şekil 7a'da verilen sonsuz uzunluktaki kirişte yer değiştirme ve kesit tesiri ifadelerinin değerleri uzaklık $x \rightarrow \infty$ giderken sıfıra yakınsayacaktır. Dolayısıyla, kirişte A noktasında M_A moment ve Q_A kesme kuvveti, B noktasında ise M_B moment ve Q_B kesme kuvveti oluşacaktır. Buna karşın yer değiştirme ve kesit tesiri değerleri aranan Şekil 7c'de verilen sonlu kirişte, A ve B noktaları serbest uç olduklarından moment ve kesme kuvveti değerleri sıfır olmalıdır. Süperpozisyon yöntemi, sonsuz uzunluktaki kirişin A ve B noktalarında oluşan yer değiştirme ve kesit tesiri değerlerini, sınır şartları olarak adlandırılan P_{0A} , M_{0A} , P_{0B} ve M_{0B} kuvvetlerini kullanarak, kirişin uçlarında istenilen sınır şartlarının sağlanması esasına dayanmaktadır. Bir başka ifadeyle, yük ve sınır şartları kuvvetleri etkisinde Şekil 7b'de verilen sonsuz uzunluktaki kiriş ile, Şekil 7c'de verilen iki ucu serbest l uzunluğundaki kiriş A ve B noktaları arasında aynı davranışı sergilemektedir.



Şekil 7. Kısa kirişlerde süperpozisyon yönteminin uygulanması (Application of the superposition method in finite beam)

Sınır şartları kuvvetleri A ve B noktalarında $-M_A$, $-Q_A$, $-M_B$ ve $-Q_B$ eşdeğer kuvvet oluşturmalıdır. Kirişin her iki ucunda sınır şartına göre yazılacak ikişer denklem, toplamda yazılacak dört ilave denklem ile sınır şartları kuvvetleri belirlenebilmektedir. Bu dört ilave denklem, Denklem 10c-d ve Denklem 11c-d kullanılarak iki ucu serbest kiriş için;

$$M_A + \frac{P_{0A}}{4\lambda} + \frac{P_{0A}}{4\lambda} C_{\lambda l} + \frac{M_{0A}}{2} + \frac{M_{0B}}{2} D_{\lambda l} = 0 \quad (12a)$$

$$Q_A - \frac{P_{0A}}{2} + \frac{P_{0B}}{2} D_{\lambda l} - \frac{\lambda M_{0A}}{2} + \frac{\lambda M_{0B}}{2} A_{\lambda l} = 0 \quad (12b)$$

$$M_B + \frac{P_{0A}}{4\lambda} C_{\lambda l} + \frac{P_{0B}}{4\lambda} + \frac{M_{0A}}{2} D_{\lambda l} + \frac{M_{0B}}{2} = 0 \quad (12c)$$

$$Q_B - \frac{P_{0A}}{2} D_{\lambda l} + \frac{P_{0B}}{2} - \frac{\lambda M_{0A}}{2} A_{\lambda l} - \frac{\lambda M_{0B}}{2} = 0 \quad (12d)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem 12a-d iki ucu serbest kiriş için yazılmış denklemlerdir. Kirişin sınır şartlarının farklı olması halinde, denklemler uygun şekilde düzenlenerek P_{0A} , M_{0A} , P_{0B} ve M_{0B} kuvvetleri bulunmalıdır. Örnek olarak kirişin A ucunun basit mesnetli B ucunun ise serbest olması durumunda, A ucunda sınır şartı olarak düşey yer değiştirmenin sıfır olması yazılacaktır. Bunun dışında denklemlerin iki ucu serbest olan kiriş denklemlerinden farkı yoktur. Sınır şartları kuvvetleri A ve B noktalarında $-M_A$, $-w_A$, $-M_B$ ve $-Q_B$ eşdeğer kuvvet oluşturmalıdır. Denklem 10c-d ve Denklem 11c-d kullanılarak A ucu basit mesnetli B ucu serbest olan bir kiriş, iki ucu serbest kirişte için yukarıda verilen denklemlerde 12b'nin yerine;

$$w_A + \frac{P_{0A}\lambda}{2k} + \frac{P_{0B}}{2k} A_{\lambda l} + \frac{M_{0B}\lambda^2}{k} B_{\lambda l} = 0$$

denklemini yazılarak P_{0A} , M_{0A} , P_{0B} ve M_{0B} kuvvetleri bulunabilir. Süperpozisyon yöntemi kullanılarak diğer mesnet durumları içinde benzer ifadeler elde edilebilir.

4. ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞ VE SİLİNDİRİK DUVAR SINIFLANDIRILMASI (CLASSIFICATION OF BEAMS ON ELASTIC FOUNDATION AND CYLINDRICAL WALLS)

Elastik zemine oturan kirişlerde λl ifadesi rölatif rijitlik olarak tanımlanmaktadır. Bu çarpım elastik eğrinin genliğini ve kiriş üzerinde oluşan etkilerin sönümlenerek sıfıra yaklaştığı noktayı belirleyen temel ifadedir. Bu durum, elastik zemine oturan kirişlerin λl ifadesine bağlı olarak sınıflandırılmasına neden olmaktadır. Buna göre; $\lambda l > \pi$ olan kirişler uzun kiriş, $\lambda l < \pi$ olan kirişler ise kısa kirişler olarak adlandırılabilir. Bu sınıflandırmada kullanılan limit değer, analizlerde istenilen hassaslığa bağlı olarak değiştirebilir.

Uzun kirişlerde Denklem 6'da verilen doğrusal yer değiştirme ifadesindeki dört bilinmeyen integrasyon sabiti sayısı ikiye düşer (Denklem 8). Bu sabitler, kirişin sınır şartlarını sağlayacak şekilde yazılan iki ilave denklem yardımıyla elde edilebilmektedir. Uzun kirişlerde, λl değerinin limit değerden büyük olmasından dolayı kirişin iki ucunda bulunan sınır şartları kuvvetlerinin birbiri üzerinde etkisi yoktur. Bu durumda, kirişin bir ucu araştırılırken diğer ucunun sonsuz uzaklıkta olduğu varsayımı yapılabilir. Bir başka ifade ile λl değerinin büyük olması nedeniyle sınır şartı kuvvetlerinin bulunması amacıyla yazılacak olan denklemlerde $A_{\lambda l}$, $B_{\lambda l}$, $C_{\lambda l}$ ve $D_{\lambda l}$ ifadelerinin değerleri sıfır olarak

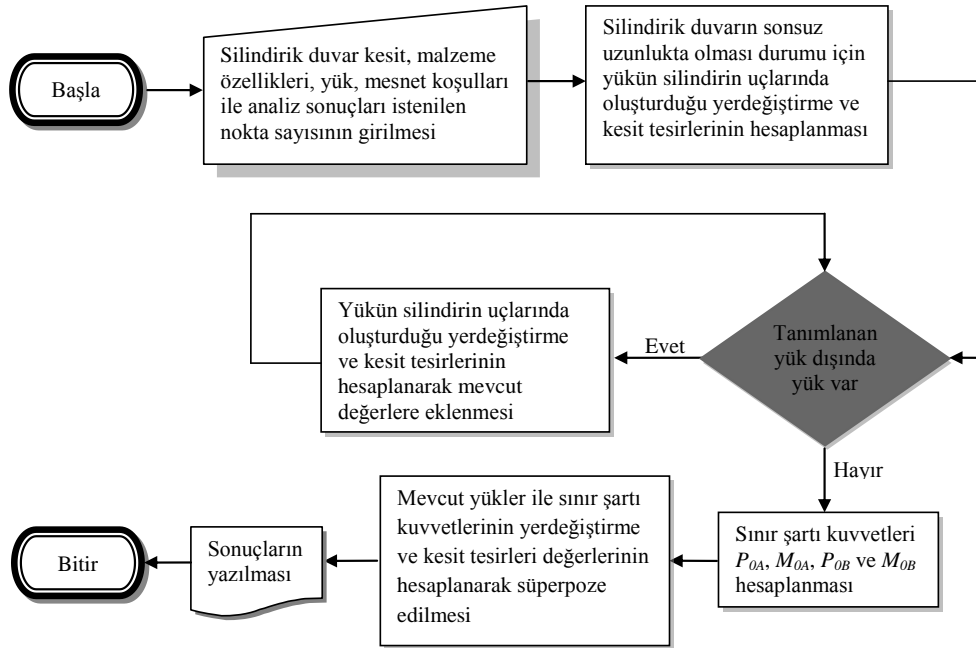
alınabilir. Bunun sonucunda yapılacak işlem sayısı azaltmakta ve işlemler kolaylaşmaktadır.

Kısa kirişlerde ise Denklem 6'da verilen ifadedeki dört intergrasyon sabitinin bulunması gerekmektedir. Bunun için süperpozisyon yöntemi veya alternatif bir yöntem kullanılabilir. Kısa kirişlerde her iki ucta bulunan sınır şartı kuvvetlerinin birbirini üzerinde ihmal edilemeyecek etkileri olduğundan dört kuvvetin de hesaplanması zorunludur.

Kirişlerde yapılan benzer bir sınıflandırma, silindirik duvarlar için de kullanılabilir. Bu sınıflandırmada, kirişlerde kullanılan λ ifadesi yerine silindirik duvarlarda β parametresi kullanılmaktadır.

5. SAYISAL ÖRNEKLER (NUMERICAL EXAMPLES)

Şekil 8'de süperpozisyon yöntemi kullanılarak silindirik duvarların analizlerinin yapılması amacıyla geliştirilmiş bilgisayar programına ait akış şeması



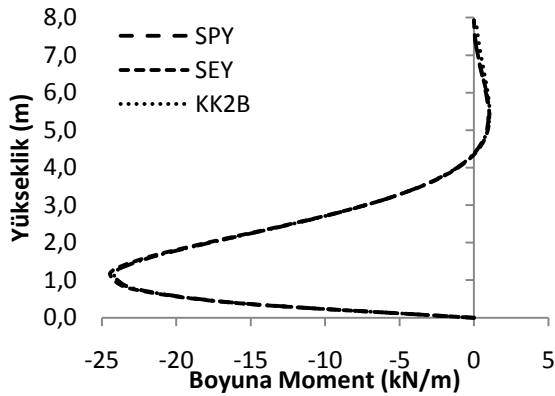
Şekil 8. Bilgisayar programı akış şeması (Flow chart of computer program)

Tablo 1. Silindirik duvar modellerinin özellikleri (Properties of cylindrical walls models)

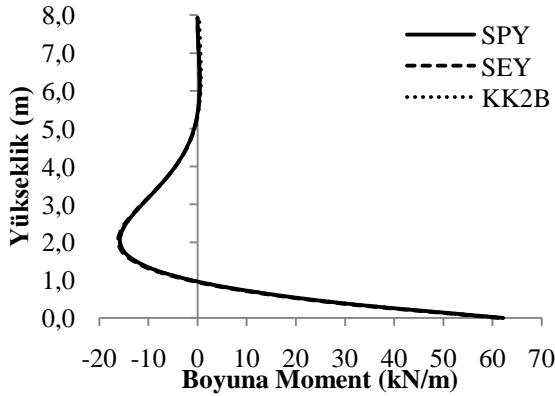
Model Numarası	Duvarın Yarıçapı r (m)	Duvarın Kalınlığı h (m)	Duvarın Yüksekliği H_w (m)	Elastisite Modülü (kN/m^2)	Poisson Oranı (ν)	Sıvı Özgül Ağırlığı (kN/m^3)	Taban Mesnet Türü
1	9,14	0,356	7,925	29302700	0,25	9,81	Basit
2	9,14	0,356	7,925	29302700	0,25	9,81	Ankastre
3	8,23	0,381	6,1	20601000	0,167	9,81	Basit
4	8,23	0,381	6,1	20601000	0,167	9,81	Ankastre
5	18,25	0,30	4,0	20601000	0,15	9,81	Basit
6	18,25	0,30	4,0	20601000	0,15	9,81	Ankastre
7	18,25	0,50	4,0	20601000	0,15	9,81	Basit
8	18,25	0,50	4,0	20601000	0,15	9,81	Ankastre

Model 1 ve 2 Hetenyi [8] kitabından alınmıştır. Modeller için β değeri 0,718 ve $\beta H_w=5,69>\pi$ olarak bulunmuştur. Buradan modellerin uzun silindirik duvar sınırları içerisinde kaldığı anlaşılmaktadır. Şekil 9-10'da boyuna momentinin yüksekliğe bağlı değişim grafiği görülmektedir.

Grafiklerden, Model 1 ve 2'nin üç yöntemle yapılan analiz sonuçlarının yaklaşık olarak aynı olduğu görülmektedir. Bu durum, analizi yapılan silindirik duvarın uzun duvar sınırları içerisinde olmasından kaynaklanmaktadır. Model 1 analizlerinde serbest olan duvarın en üst noktasında, KK2B analizlerinde SPY analizlerinde bulunan maksimum moment değerinin %0,59'u ve Model 2'de ise %2'si kadar bir moment bulunmuştur.



Şekil 9. Model 1 boyuna moment grafiği (The longitudinal moment graph of Model 1)

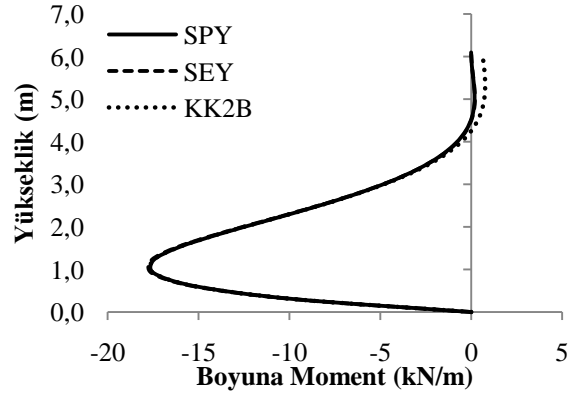


Şekil 10. Model 2 boyuna moment grafiği (The longitudinal moment graph of Model 2)

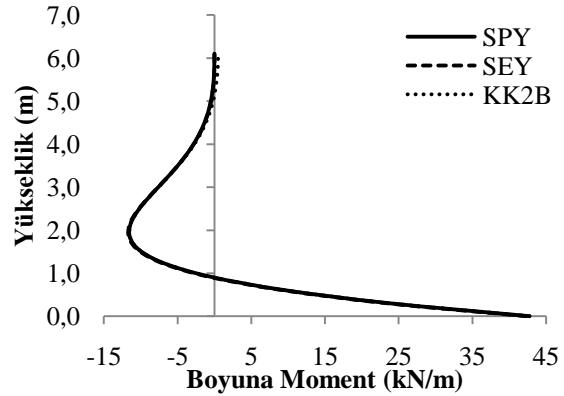
Model 3 ve 4 Bilington [25] kitabından alınmıştır. Modeller için β değeri 0,738 ve $\beta H_w=4,50>\pi$ olarak bulunmuştur. Buradan modellerin uzun silindirik duvar sınırları içerisinde kaldığı anlaşılmaktadır. Şekil 11-12'de boyuna momentinin yüksekliğe bağlı değişim grafiği görülmektedir.

Model 3 ve 4 uzun silindirik duvar sınırları içerisinde olduğundan üç yöntemle yapılan analiz sonuçlarının benzer olduğu görülmektedir. Model 3 analizlerinde serbest olan duvarın en üst noktasında, KK2B analizlerinde SPY analizlerinde bulunan maksimum

moment değerinin %3,41'i ve Model 4'de ise %4,34'ü kadar bir moment bulunmuştur. Model 3-4'te kullanılan silindirik duvarın βH_w değeri göz önüne alındığında kısa duvar limit değeri olan π değerine Model 1-2'den daha yakın olduğu görülmektedir. Bu durum KK2B analizlerinde duvarın üst noktasında bulunan moment değerinin artmasında neden olmaktadır.



Şekil 11. Model 3 boyuna moment grafiği (The longitudinal moment graph of Model 3)

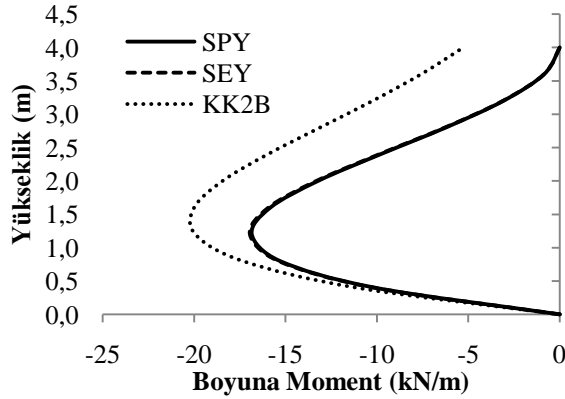


Şekil 12. Model 4 boyuna moment grafiği (The longitudinal moment graph of Model 4)

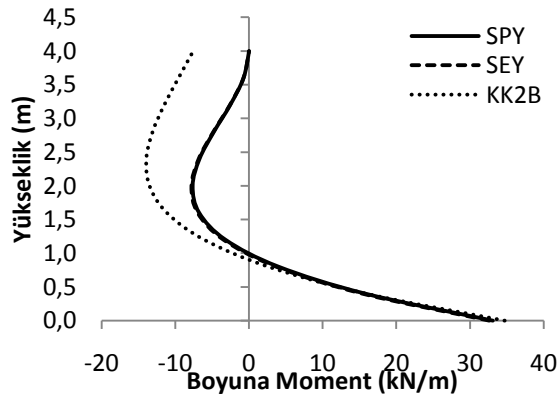
Model 5 ve 6 Bekdaş [40] tezinden alınmıştır. Modeller için β değeri 0,559 ve $\beta H_w=2,23<\pi$ olarak bulunmuştur. Buradan modellerin kısa silindirik duvar sınırları içerisinde kaldığı anlaşılmaktadır. Şekil 13-14'te boyuna momentinin yüksekliğe bağlı değişim grafiği görülmektedir.

Şekillerden sonlu elemanlar yöntemi ile süperpozisyon yöntemlerinin benzer sonuçlar verdiği, buna karşın klasik kabuk teorisi kullanılarak yapılan 2 bilinmeyenli analizlerinde sonuçların farklı olduğu görülmektedir. Açıklıkta maksimum momentin olduğu noktada KK2B analizleri ile SPY analizleri arasında Model 5'te %18,30 ve Model 6'da %76,04 fark bulunmaktadır. Serbest olan duvarın en üst noktasında, KK2B analizlerinde SPY analizlerinde bulunan maksimum moment değerinin sırasıyla %31,24 ve % 98,71'i kadar bir moment bulunmuştur. Bu farkın oluşması, uzun duvar varsayımı ile bulunan sınır şartı kuvvetlerinin modelin kısa duvar

olmasından dolayı diğer uçta etkilerinin devam etmesinden kaynaklanmaktadır. Bu durum analiz sonuçlarında ciddi hatalara neden olmaktadır.



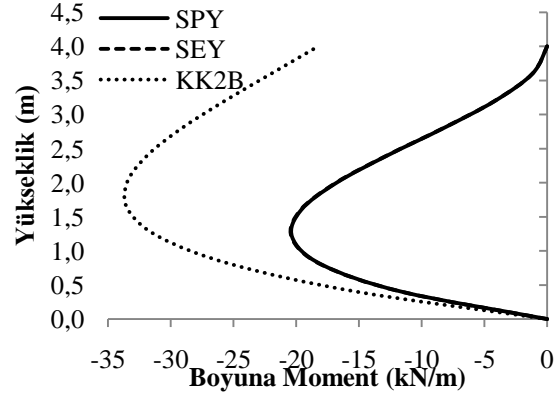
Şekil 13. Model 5 boyuna moment grafiği (The longitudinal moment graph of Model 5)



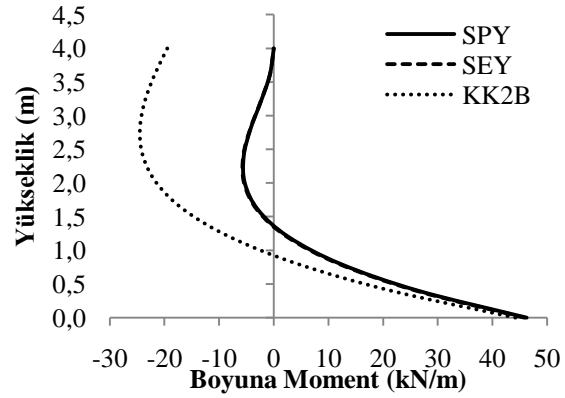
Şekil 14. Model 6 boyuna moment grafiği (The longitudinal moment graph of Model 6)

Model 7-8'de [36] kullanılan kesit ve malzeme özellikleri Model 5-6 ile aynıdır. Farklı olarak silindirik duvarın kalınlığı artırılmıştır. Kalınlığın artırılmasındaki amaç kısa duvar özelliğinin bağlı olduğu β parametresinin azaltılmasının analiz sonuçlarına etkilerini incelemektir. Modeller için β değeri 0,433 ve $\beta H_w = 1,73 < \pi$ olarak bulunur. Buradan modelin kısa silindirik duvar sınırları içerisinde kaldığı anlaşılmaktadır. Şekil 15-16'da boyuna momentinin yükseğe bağlı değişim grafiği görülmektedir.

Şekillerden açıklıkta maksimum momentin olduğu noktada KK2B analizleri ile SPY analizleri arasında Model 7'de %51,98 ve Model 8'de ise %335,86 fark bulunduğu görülmektedir. Serbest olan duvarın en üst noktasında, KK2B analizlerinde, SPY analizlerinde bulunan maksimum moment değerinin sırasıyla %89,77 ve % 354,82'i kadar bir moment bulunmuştur. Bu durum β parametresinin azaltılmasına paralel olarak farkın ciddi bir şekilde arttığının göstermektedir.



Şekil 15. Model 7 boyuna moment grafiği (The longitudinal moment graph of Model 7)

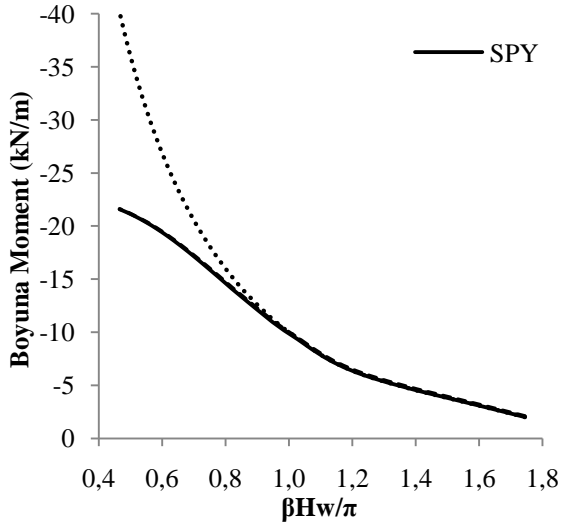


Şekil 16. Model 8 boyuna moment grafiği (The longitudinal moment graph of Model 8)

Model 1-8 analiz sonuçlarından uzun duvarlar modellerinde (Model 1-4) her üç yöntemin yaklaşık sonuçlar verdiği, kısa duvar modellerinde (Model 5-8) ise belirleyici parametre βH_w çarpımının azalmasına paralel KK2B analizlerinde hata oranının arttığı görülmektedir.

Şekil 17'de KK2B analizlerin sınırlarının gösterilmesi amacıyla çizilen silindirik duvarın bir noktasındaki (duvar alt noktasından 1,2m yüksekliğindeki) boyuna moment değerinin $\beta H_w / \pi$ değerine bağlı değişim grafiği görülmektedir. Analizlerde Model 5 kullanılmış ve β parametresinin değişiminin sağlanması amacıyla duvarın diğer kesit ve malzeme özellikleri sabit tutularak yalnızca kalınlığı değiştirilmiştir.

Grafikten $\beta H_w / \pi < 1$ değerlerinde (kısa silindirik duvarlarda) azalan $\beta H_w / \pi$ paralel olarak KK2B moment değerlerindeki hata oranının hızla arttığı görülmektedir. Buna karşın $\beta H_w / \pi > 1$ değerlerinde (uzun silindirik duvarlarda) KK2B ile SPY analizlerinin benzer sonuçlar verdiği görülmektedir.



Şekil 17. KK2B analizleri boyuna moment $\beta H_w/\pi$ değişimi grafiği (The relationship between longitudinal moment and $\beta H_w/\pi$ in KK2B analysis)

6. SONUÇLAR (CONCLUSION)

Çalışmada, eksenine göre simetrik yayılı kuvvetlerin etkisi altındaki silindirik kabukların analizleri Hetenyi [1] tarafından geliştirilen süperpozisyon yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Analizlerin hızlı ve hassas yapılması amacıyla yöntemi temel alan bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Sekiz modele ait analiz sonuçları süperpozisyon yöntemi elde edilmiş ve klasik kabuk teorisi ile iki bilinmeyenli analiz (KK2B) ve sonlu elemanlar (SEY) sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Analizlerden süperpozisyon ve sonlu elemanlar yöntemlerinin benzer sonuçlar verdiği görülmüştür. Buna karşın KK2B analiz sonuçlarının uzun duvar modellerinde benzer olduğu, kısa duvarlarda ise azalan β parametresine paralel olarak artan farklar olduğu görülmüştür. Bu durum KK2B analizlerinde bulunan iki sınır şartı kuvvetinin duvar kısa olmasından dolayı etkilerinin diğer uçta devam etmesinden kaynaklanmaktadır.

KK2B analiz yöntemi eksenel simetrik silindirik duvarların el hesapları ile yapılan analizlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Ancak yalnızca uzun duvarlar için makul sonuçlar vermektedir. Kısa duvarlar için ise 4 bilinmeyenli kesin çözümün yapılması kaçınılmazdır. Çalışmada, uzun duvar kabulünün (iki bilinmeyenli analizlerin) sınırları dışında kullanılmasının ciddi hatalara neden olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Hetenyi, M., "Analysis of Bars on Elastic Foundation", **Final Report of the Second International Congress for Bridge and Structural Engineering (English Edition)**, October Berlin- Munich, Verlag von Wilhelm Ernst and Son, 846-851, 1936.

2. Winkler, E., **Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit – mit Besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik, für Polytechnische Schulen, Bauakademien, Ingenieure, Maschinenbauer, Architekten, etc.**, Verlag H. Dominicus, Prag, 1867.
3. Wang, Y. H., Tham, L. G., Cheung, Y.K., "Beams and Plates on Elastic Foundation: a Review", **Progress in Structural Engineering and Materials**, Cilt 7,174–182, 2005.
4. Karşın, H.A, Gülkan, P., "Elastik Zeminlere Oturan Plakların Sonlu Izgara Yöntemi ile Yaklaşık Çözümü", **İMO Teknik Dergi**, Yazı 293, 4445-4454, 2008.
5. Kerr, A.D., "On the Stress Analysis of Rails and Ties", **Proceedings of the American Railway Engineering Association**, Cilt 78, 19-45, 1976.
6. Umansky, A.A., **Analysis of Beams on Elastic Foundation**, Central Research Institute of Auto-Transportation, Leningrad, 1933.
7. Selvadurai, A.P.S., **Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction**, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1979.
8. Hetenyi, M., **Beams on Elastic Foundation**, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1946.
9. Henry, F.D.C., **The Design and Construction of Engineering Foundations**, Mc-Graw Hill, New York, 1956.
10. Jones, G., **Analysis of Beams on Elastic Foundations Using Finite Difference Theory**, Thomas Telford Publishing, New York, 1997.
11. Melerski, E.D., **Design Analysis of Beams, Circular Plates and Cylindrical Tanks on Elastic Foundations**, Taylor & Francis Group, London, 2000.
12. Levinton, Z., "Elastic Foundation Analyzed by the Method of Redundant Reactions", **Journal of the Structural Division, Proceedings of the ASCE**, Cilt 73, 1529-1541, 1947.
13. Cross, H., "Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments", **Proceeding of the ASCE**, Cilt 57, 919-928, 1930.
14. Penzien, J., "Discontinuity Stresses in Beams on Elastic Foundation", **Journal of the Structural Division, Proceeding of the ASCE**, Cilt 86, 67-97, 1960.
15. Popov, E.P., "Successive Approximations for Beams on an Elastic Foundation", **Transactions ASCE**, Cilt 116, 1083-1095, 1951.
16. Vianello, L., "Graphische Untersuchungen der Knickfestigkeit Gerader Stäbe", **Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure**, Cilt 42, 1436-1443, 1898.
17. Stadola, A., **Steam and Gas Tribuness (Translated by Loewenstein, L.C.)**, Mc-Graw Hill, New York, 1927.
18. Iyengar, K.T.S.R., Anantharamu, S., "Influence Lines for Beams on Elastic Foundations",

- Journal of the Structural Division, Proceedings of the ASCE**, Cilt 91, 45-56, 1965.
19. Miranda, C., Nair, K., "Finite Beams on Elastic Foundation", **Journal of the Structural Division, Proceedings of the ASCE**, Cilt 92, 131-142, 1966.
 20. Beaufait, F.W., "Numerical Analysis of Beams on Elastic Foundation", **Journal of the Mechanics Division Proceedings of the ASCE**, Cilt 103, 205-209, 1977.
 21. Ting, B.Y., "Finite Beams on Elastic Foundation with Restraints", **Journal of the Structural Division, Proceedings of the ASCE**, Cilt 108, 611-621, 1982.
 22. Eisenberger, M., Yankelevsky, D.Z., "Exact Stiffness Matrix for Beams on Elastic Foundation", **Computer and Structures**, Cilt 21, 1355-1359, 1984.
 23. Yankelevsky, D.Z., Eisenberger, M., "Analysis of Beam Column on Elastic Foundation", **Computer and Structures**, Cilt 23, 351-356, 1986.
 24. Yankelevsky, D.Z., Eisenberger, M., Adin, M. A., "Analysis of Beams on Nonlinear Winkler Foundation", **Computer and Structures**, Cilt 31, 287-292, 1989.
 25. Billington, D.P., **Betonarme Kabuk Yapılar (Çeviren; Karataş, H., Pultar, M.)**, Çağlayan Basımevi, İstanbul, 1975.
 26. Ghali, A., **Circular Storage Tanks and Soils**, SponLtd, London, 1979.
 27. Calladine, C. R., **Theory of Shell Structures**, Cambridge University Press, New York, 1983.
 28. Kelkar, V.S., Sewell, R.T., **Fundamentals of the Analysis and Design of Shell Structures**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall; 1987.
 29. Ventsel, E., Krauthammer, T., **Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications**, Marcel Dekker Inc., New York, 2001.
 30. Öztoran, N.K., Utku M., Çıtıpıtıoğlu, E., "Silindirik Su Tanklarının Klasik Kabuk Teorisini Kullanarak Bilgisayarlarla Analizi", **VIII. Ulusal Mekanik Kongresi**, Eylül 1993 Antalya, 510-523, 1993.
 31. Öztoran, N.K., Utku M., Çıtıpıtıoğlu, E., Dairesel Plaklı Silindirik Su Tankları, **IX. Ulusal Mekanik Kongresi**, Eylül 1995 Antalya, 571-580, 1995.
 32. Öztoran, N.K., "Eksenel Simetrik ve Ard Çekme Yükleri Altında Su Depolarının İnşaatı", **TMMOB İnşaat Mühendisleri Odası XV. Teknik Kongresi**, Kasım 1999 Ankara, 27-42, 1999.
 33. Öztoran, N.K., Utku M., Computer Aided Design of Post-Tensioned Concrete Reservoirs, **Computer and Structures**, Cilt 80, 2195-2207, 2002.
 34. Öztoran, N.K., Altın, S., Anıl, Ö., "Eksenel Simetrik Silindirik Duvarların Beş Moment Denklemi ile Analizi", **Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University**, Cilt 11, No 2, 55-72, 1996.
 35. Çetmeli, E., Çakıroğlu, A., **Yapı Statiği Cilt-II**, Beta Basımevi, İstanbul, 1991.
 36. Bekdaş, G., **Eksenel Simetrik Kısa Silindirik Duvarların Analizi**, Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2011.
 37. Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, S., **Theory of Plates and Shells 2nd Edition**, McGraw-Hill, New York, 1984.
 38. Timoshenko, S.P., Young, D.H., **Strength of Materials 4th Edition-Part II**, D. Van Nostrand Company, New Jersey, 1962.
 39. Computer and Structures Inc., **SAP2000 Structural Analysis Program: Static and Dynamic Finite Element Analysis of Structures**, Berkeley, California, USA.
 40. Bekdaş, G., **Eksenel Simetrik Yükler Altında Silindirik Yapısal Elemanların Bilgisayar Destekli Tasarımı**, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2006.

