Gazi Üniv. Müh. Mim. Fak. Der.
Cilt 27, No 4, 875-879, 2012
Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University
Vol 27, No 4, 875-879, 2012

GECİKEN İŞ SAYISI VE GECİKME ARALIĞI ÖLÇÜTLÜ ZAMANA-BAĞIMLI ÖĞRENME ETKİLİ ÇİZELGELEME PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Tamer Eren
Kırıkkale Üniversitesi Endüstri Mühendisliği Bölümü, Ankara yolu 71451, Kırıkkale
teren@kku.edu.tr

(Geliş/Received: 17.01.2012; Kabul/Accepted: 05.07.2012)

ÖZET

Çizelgeleme literatürünün çoğunda işlerin işlem zamanları sabit kabul edilmiştir. Ancak işlerin işlem zamanlarında, başlama zamanına veya pozisyonuna bağlı olarak azalma görülebilmektedir. Bu olgu literatürde öğrenme etkisi olarak bilinmektedir. Bu çalışmada zamana-bağımlı öğrenme etkili tek makineli çizelgeleme problemi ele alınacaktır. Ele alınan problemin amaç fonksiyonu geciken iş sayısı kısıtı altında gecikme aralığını minimize etmektir. NP-zor yapıda olan problemi çözmek için doğrusal-olmayan programlama modeli geliştirilmiştir. Geliştirilen model örnek üzerinde uygulanmıştır.

Anahtar kelimeler: Tek makineli çizelgeleme, iki ölçüt, zamana-bağımlı öğrenme etkisi, geciken iş sayısı, gecikme aralığı

SOLVING SCHEDULING PROBLEM WITH TIME DEPENDENT LEARNING EFFECT TO NUMBER OF TARDY JOBS AND RANGE OF LATENESS CRITERIA

ABSTRACT

In traditional scheduling problems, most literature assumes that the processing time of a job is fixed. However, there are many situations where the processing time of a job depends on the starting time or the position of the job in a sequence. In such situations, the actual processing time of a job may be more or less than its normal processing time if it is scheduled later. This phenomenon is known as the ''learning effect''. In this study, we introduce a time-dependent learning effect into a single-machine scheduling problem. We consider the following objective function minimize range of lateness subject to the number of tardy jobs. A non-linear programming model is developed for the problem which belongs to NP-hard class. Also the model is tested on an example.

Keywords: Single machine scheduling, bicriteria, time-dependent learning effect, number of tardy, range of lateness

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Çizelgeleme literatürüne bakıldığında problemler genellikle, işlem zamanları sabit kabul edilme varsayımına dayanmaktadır. Halbuki işin işlem zamanı, işin başlama zamanına veya işin pozisyonuna bağlı olarak azalabilmektedir. Bu olgu literatürde öğrenme etkisi olarak bilinmektedir. Literatürde öğrenme etkisi zamana-bağımlı ve pozisyona bağımlı olmak üzere iki grupta ele alınmıştır. Birinci grupta işin işlem zamanı işin başlama zamanına bağımlı olarak azalma varsayımına dayanırken, diğerinde ise pozisyonuna göre işlem zamanları azaldığı kabul edilmiştir[1]. Bu çalışmada da ilk gruba giren iki ölçütlü tek makineli çizelgeleme problemi, zamana-bağımlı öğrenme etkili durumda ele alınmıştır.

Öğrenme etkisi ile ilgili ilk çalışma Biskup [2] tarafından tek makineli çizelgeleme problemleri için yapılmıştır. Biskup [2] çalışmasında toplam akış zamanını, teslim tarihinden sapma problemlerini incelemiştir. Mosheiov [3] yaptığı çalışmada maksimum tamamlanma zamanının en kısa işlem zamanı (SPT) kuralı ile çözüldüğünü göstermiştir.

Araştırmacı çok ölçütlü iki problemi ele almıştır. Bunlardan birincisi tamamlanma zamanı ve tamamlanma zamanından sapmayı enküçükleme, diğeri ise teslim tarihi atama problemidir. Bu iki problemin atama modeli ile $O(n^3)$ zamanda çözüldüğünü göstermiştir. Ayrıca, Moshiev [3] klasik durumda (öğrenme etkisiz) eniyi çözümü bulan yöntemlerin, öğrenme etkili olduğunda maksimum gecikme için en küçük teslim tarihi (EDD) ve minimum geciken iş sayısı problemi için Moore [4] algoritması ile çözülmesi durumunda eniyi çözümü garanti etmediğini göstermiştir. Moshiev ve Sidney [5] yaptıkları çalışmada ise tek makineli çizelgelemede ortak teslim tarihli geciken iş sayısını minimize etmek için atama problemi ile $O(n^3 \log n)$ zamanda çözmüşlerdir. Eren [6] yaptığı çalışmada geciken iş sayısını minimize etmek için matematiksel programlama modeli geliştirmiştir. Maksimum gecikme problemini ise Zhao vd. [7] ve Wu vd. [8] özel durumlarda $O(n \log n)$ zamanda çözüldüğünü göstermişlerdir. Eren ve Güner [9] ise yaptıkları çalışmada toplam gecikme problemini ele almışlar ve problem için matematiksel programlama modeli önermişlerdir. Ayrıca büyük boyutlu problemler için tabu arama ve tavlama benzetimi sezgiselleri geliştirmişlerdir. Eren [10] yaptığı çalışmada hazırlık ve taşıma zamanlarının öğrenme etkili olduğu tek makineli çizelgelemede geciken iş sayısını ortak teslim tarihi durumunda minimize etmek için atama problemi ile polinom zamanda çözülebileceğini göstermiştir. Bahsedilen tüm çalışmalar pozisyona bağımlı öğrenme etkisi ile yapılmıştır. Zamana-bağımlı öğrenme etkisi ile ilgili ilk çalışma ise Kuo ve Yang [11,12] tarafından yapılmıştır. Araştırmacılar, çalışmalarında maksimum tamamlanma zamanı ve toplam tamamlanma zamanını enküçükleme probleminin SPT kuralıyla eniyi çözümlerin bulunabileceğini göstermişlerdir. Ayrıca Kuo ve Yang [13] yaptıkları diğer bir çalışmada ise tek makineli grup çizelgeleme probleminde maksimum tamamlanma zamanı ve toplam tamamlanma zamanı problemlerinin yine SPT kuralı ile çözülebileceğini göstermişlerdir. Eren [14] yaptığı çalışmada maksimum gecikme ölçütünün zamana bağımlı öğrenme etkisi durumda EDD kuralıyla optimal çözümü garanti etmediğini göstermiştir. Ayrıca, optimal çözümü bulmak için doğrusal olmayan programlama modeli önermiştir. Bu çalışmada Kuo ve Yang [11]'ın modeli kullanılarak geciken iş sayısı kısıtı altında gecikme aralığı ölçütü ele alınmıştır. Sen ve Gupta [15], Gupta ve Sen [16], Tegze ve Vlach [17], Sen vd. [18], Liao ve Huang [19,20], Huang ve Jing [21] ve Tanaka ve Vlach [22] yaptıkları çalışmalarda tek makineli çizelgeleme problemlerinde gecikme aralığı problemini klasik durumda optimal çözümlerini bulmuşlardır.

Bu çalışmada da geciken iş sayısı kısıtı altında gecikme aralığını minimize etmek için doğrusal-olmayan programlama modeli önerilmiş ve önerilen model sayısal örnekle test edilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde ele alınan problem tanımlanacaktır. Üçüncü bölümde ise problem için önerilen doğrusal-olmayan programlama modeli verilecektir. Verilen model, örnek üzerinde dördüncü bölümde gösterilecektir. Son bölümde ise çalışmanın sonuçları verilecek ve gelecek çalışmalar için önerilerde bulunulacaktır.

2. PROBLEMİN TANIMLANMASI (DESCRIPTION OF THE PROBLEM)

Bu çalışmada öğrenme etkisi zaman-bağımlı durumda dikkate alınmıştır. Kuo ve Yang [11] tarafından model şu şekilde tanımlanmıştır: Tek makineli *n* işli çizelgeleme problemi ele alınmıştır. p_j, j işinin işlem zamanını, p_{jr} ise p_j işinin *r*. pozisyondaki işlem zamanını göstermektedir:

$p_{jr} = p_j\left(1 + p_{[1]} + p_{[2]} + \cdots + p_{[r-1]}\right)^a = p_j\left(1 + \sum_{l=1}^{r-1} p_{[l]}\right)^a$ dir.

Öğrenme indeksi $a < 0$ dır ve öğrenme oranının iki tabanına göre logaritmasıdır. d_j ve C_j ise j işinin teslim tarihi ve tamamlanma zamanıdır. Maksimum gecikme $L_{max} = max_{j=1}^{n}\left(C_j - d_j\right)$ ve minimum gecikme $L_{min} = min_{j=1}^{n}\left(C_j - d_j\right)$ şeklinde ifade edilmektedir. U_r *r*. posizyondaki iş gecikmişse 1, gecikmediyse 0 olduğunu göstermektedir. Toplam geciken iş sayısı, $n_T = \sum_{r=1}^{n} U_r$ ile tanımlanmaktadır. Bu çalışmada zamana-bağımlı öğrenme etkili iki ölçütlü tek makineli çizelgeleme ele alınmıştır. Problemin amacı geciken iş sayısı kısıtı altında gecikme aralığını minimize etmektir. Problem şu şekilde tanımlanmaktadır:

$1/p_{jr} = p_j\left(1 + \sum_{l=1}^{r-1} p_{[l]}\right)^a / L_{max} - L_{min} : n_T$

3. DOĞRUSAL-OLMAYAN PROGRAMLAMA MODELİ (A NON-LINEAR PROGRAMMING MODEL)

Önerilen modellerde, parametreler, karar değişkenleri ve matematiksel model aşağıda verilmiştir.

3.1. Parametreler (Parameters)

j:	iş indeksi	$j = 1,2,...,n$
p_j:	*j* işinin işlem zamanı	$j = 1,2,...,n$
d_j:	*j* işinin teslim tarihi	$j = 1,2,...,n$
a:	öğrenme indeksi	$a < 0$
M:	Büyük bir sayı	

3.2. Karar değişkenleri (Decision variables)

Z_{jr}: Eğer j işi *r*. pozisyonda işlem görmek için çizelgelenmişse 1, aksi halde 0,

$j = 1,2, \ldots, n \qquad r = 1,2, \ldots, n$

U_r: *r*. pozisyondaki iş gecikiyorsa 1, aksi halde 0,

$r = 1,2, \ldots, n$

$p_{[r]}$: *r*. pozisyondaki işin işlem zamanı
$r = 1,2, \ldots, n$
$d_{[r]}$: *r*. pozisyondaki işin teslim tarihi
$r = 1,2, \ldots, n$
C_r: *r*. pozisyondaki işin tamamlanma zamanı
$r = 1,2, \ldots, n$
L_{max}: maksimum gecikme
$L_{max} = max_{j=1}^{n}\{C_j - d_j\}$
L_{min}: minimum gecikme
$L_{min} = min_{j=1}^{n}\{C_j - d_j\}$

Ele alınan problemi çözmek için önce geciken iş sayısını minimize etme problemi çözülecektir. Bulunan sonuçla ele alınan problemin optimal çözümü bulunacaktır.

3.3. $1/p_{jr} = p_j\left(1 + \sum_{l=1}^{r-1} p_{[l]}\right)^a/n_T$ probleminin çözümü

(Solution to the problem of $1/p_{jr} = p_j\left(1 + \sum_{l=1}^{r-1} p_{[l]}\right)^a/n_T$)

Problemin geciken minimum iş sayısının optimal çözümünü bulmak için aşağıdaki doğrusal-olmayan programlama modeli önerilmiştir. Model; $6n$ kısıtlı, n^2 0-1 değişken sayılı ve $4n$ diğer değişkenlidir.

Amaç fonksiyonu:

$Min \sum_{r=1}^{n} U_r$ (1)

Kısıtlar:

$\sum_{j=1}^{n} Z_{jr} = 1$ $r = 1,2, \ldots, n.$ (2)

$\sum_{r=1}^{n} Z_{jr} = 1$ $j = 1,2, \ldots, n.$ (3)

$p_{[r]} = \sum_{j=1}^{n} Z_{jr} p_j$ $r = 1,2, \ldots, n.$ (4)

$d_{[r]} = \sum_{j=1}^{n} Z_{jr} d_j$ $r = 1,2, \ldots, n.$ (5)

$C_r \geq C_{r-1} + p_{[r]}\left(1 + \sum_{l=1}^{r-1} p_{[l]}\right)^a$ $r = 1,2, \ldots, n.$ (6)

$C_r - d_{[r]} \leq M U_r$ $r = 1,2, \ldots, n.$ (7)

Z_{jr}: 0 $veya$ 1 ve diğerleri negatif olmayan değişkenler
$j = 1,2, \ldots, n$ $r = 1,2, \ldots, n.$

Kısıt (2), *r*. pozisyona sadece bir tek işin atanmasını, Kısıt (3), her bir işin sadece bir kez çizelgelenmesini ifade etmektedir. Kısıt (4) ve Kısıt (5) sırasıyla *r*. pozisyondaki işin işlem zamanı ve teslim tarihini göstermektedir. Kısıt (6), *r*. pozisyondaki işin tamamlanma zamanının bir önceki işin tamamlanma zamanı ve *r*. pozisyondaki işin işlem zamanından büyük veya eşit olmasını göstermektedir($C_0 = 0$). *r*. pozisyondaki işin gecikmesinin, tamamlanma zamanı ve teslim tarihi arasındaki farktan büyük veya eşit olduğunu da Kısıt (7) tanımlamaktadır.

3.4. $1/p_{jr} = p_j\left(1 + \sum_{l=1}^{r-1} p_{[l]}\right)^a/L_{max} - L_{min}: n_T$ probleminin çözümü

(Solution to the problem of $1/p_{jr} = p_j\left(1 + \sum_{l=1}^{r-1} p_{[l]}\right)^a/L_{max} - L_{min}: n_T$)

Geciken iş sayısı kısıtı altında gecikme aralığı problemini minimize eden çözümü bulmak için aşağıdaki doğrusal-olmayan programlama modeli önerilmiştir. Model; $8n$ kısıtlı, n^2 0-1 değişken sayılı ve $4n + 2$ diğer değişkenlidir. Kısıt (9) ve Kısıt (10) sırasıyla maksimum gecikme ve minimum gecikmeyi ifade etmektedir. Kısıt (11) ise bir önceki modelde bulunan minimum geciken iş sayısıdır.

Amaç fonksiyonu:

$Min(L_{max} - L_{min})$ (8)

Kısıtlar:

Kısıt (2)-(7)

$L_{max} \geq C_r - d_{[r]}$ $r = 1,2, \ldots, n$ (9)

$L_{min} \leq C_r - d_{[r]}$ $r = 1,2, \ldots, n$ (10)

$\sum_{k=1}^{n} U_k = m$ (11)

Z_{jr}: 0 $veya$ 1 ve diğerleri negatif olmayan değişkenler $j = 1,2, \ldots, n$ $r = 1,2, \ldots, n$

Modelde verilen optimal çözüm geciken iş sayısı *m* kısıtı altında gecikme aralığını vermektedir. Geciken iş sayısı *m* birer birer arttırılarak diğer gecikme aralığı değerleri bulunur. Bu iş gecikme aralığında değişim olmayıncaya kadar devam eder. Aşağıdaki sayısal örnekle bu durum gösterilecektir.

4. SAYISAL ÖRNEK (A NUMERICAL EXAMPLE)

Tek makinede 10 işli bir problemin işlem zamanları ve teslim tarihleri saat olarak Tablo 1'de verilmiştir. Zaman-bağımlı öğrenme indeksi -0,4; -0,5 ve -0,6 değerine göre ele alınan tüm problemler için optimal değer ve sıralama bulunacaktır.

Tablo 1. Örnek verileri (The example data)

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_j	5	4	6	3	7	10	2	9	8	1
d_j	13	4	12	5	11	10	6	9	8	7

Problem GAMS 22.5 [23] paket programı ile çözüldüğünde bulunan sonuçlar Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2'de görüldüğü gibi öğrenme indeksi $a = -0{,}4$ olduğunda geciken iş sayısı 3 ile 10 arasında değişirken, $a = -0{,}5$ olduğunda 2 ile 7 ve $a = -0{,}6$ olduğunda ise 2 ile 6 arasında olmak üzere toplam 19 problem çözülmüştür.

Örnek olarak problem no 12'de öğrenme indeksi $a = -0{,}5$ ve $n_T = 5$ değerinde model şu şekilde yazılır: Amaç fonksiyonu $L_{max} - L_{min}$ yazılırken, 80 kısıt ve $\sum_{k=1}^{10} U_k = 5$ kısıtı olmak üzere toplam 81 kısıtla çözüldüğünde $L_{max} - L_{min} = 7{,}75$ ve optimal sıralama 7-9-3-10-4-8-2-5-1-6 olarak bulunur.

Tablo 2. Sayısal örneğin optimal sonuçları (Optimal solutions of numerical example)

No	a	n_T	$L_{max} - L_{min}$	Optimal sıralama
1	-0,4	3	12,85	7-1-2-3-10-4-5-9-8-6
2		4	10,88	7-1-2-3-10-9-5-8-6-4
3		5	9,93	7-1-2-3-9-5-8-10-6-4
4		6	9,48	7-1-2-3-9-8-4-6-10-5
5		7	8,31	7-1-9-8-3-5-6-2-4-10
6		8	7,83	7-9-8-2-5-1-6-3-10-4
7		9	7,53	7-9-3-8-1-2-6-10-4-5
8		10	4,80	9-1-7-8-3-6-2-4-5-10
9	-0,5	2	10,61	7-1-2-6-3-10-4-9-5-8
10		3	10,12	7-1-2-6-3-10-9-5-8-4
11		4	8,67	7-1-2-3-9-4-8-5-10-6
12		5	7,75	7-9-3-10-4-8-2-5-1-6
13		6	6,14	7-9-3-8-4-1-5-2-6-10
14		7	5,77	7-9-8-4-1-3-2-5-6-10
15	-0,6	2	8,20	7-1-2-6-3-9-10-4-8-5
16		3	7,25	7-1-2-9-3-10-8-4-6-5
17		4	6,22	7-9-2-3-10-8-4-1-6-5
18		5	5,21	7-9-2-8-10-4-1-6-3-5
19		6	5,17	7-9-8-10-3-1-4-6-2-5

5. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada son yıllarda araştırmacıların oldukça ilgilendiği öğrenme etkili çizelgelemede, zaman-bağımlı olduğu durum tek makinede ele alınmıştır. Problemin amacı geciken iş sayısı kısıtı altında gecikme aralığını minimize etmektir. NP-zor yapıda olan problemi çözmek için doğrusal-olmayan programlama modeli geliştirilmiştir. Geliştirilen model bir örnek üzerinde uygulanmıştır. 10 işli tek makineli örnek için 19 adet problem çözülmüş ve sonuçlar gösterilmiştir. Problem NP-zor yapıda olduğundan dolayı ancak küçük boyutlu problemleri çözüleceği görülmektedir.

Büyük boyutlu problemleri çözmek için optimal olmasa da optimala yakın sonuçlar veren sezgisel yaklaşımlar geliştirilmelidir. Ayrıca bundan sonraki çalışmalarda paralel makineli ve akış tipi çizelgeleme problemleri ile ilgili çalışmalarda yapılabilir.

6. KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Biskup, D. “A state-of-the-art review on scheduling with learning effects”, **European Journal of Operational Research,** 188(2), 315-329, 2008.
2. Biskup, D. “Single-machine scheduling with learning considerations”, **European Journal of Operational Research,** 115, 173-178, 1999.
3. Mosheiov, G. “Scheduling problems with a learning effect”, **European Journal of Operational Research,** 132, 687-693, 2001.
4. Moore, J.M. “An n job, one machine sequencing algorithm for minimizing the number of tardy jobs”, **Management Science,** 15, 102–109, 1968.
5. Mosheiov G., Sidney J.B. “Note on scheduling with general learning curves to minimize the number of tardy jobs”, **Journal of the Operational Research Society,** 56, 110–112, 2005.
6. Eren T., “Öğrenme etkili çizelgeleme problemi: Geciken iş sayısı minimizasyonu”, **Teknoloji Dergisi,** 10 (4), 235-238, 2007.
7. Zhao, C.L., Zhang Q.L., Tang, H.Y. “Machine scheduling problems with learning effects”, **Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis,** 11, 741-750, 2004.
8. Wu, C.C., Lee, W.C., Chen, T. “Heuristic algorithms for solving the maximum lateness scheduling problem with learning considerations”, **Computers & Industrial Engineering,** 52, 124-132, 2007.
9. Eren, T., Güner E., “Minimizing total tardiness in a scheduling problem with a learning effect”, **Applied Mathematical Modelling,** 31, 1351-1361, 2007.
10. Eren, T. “Hazırlık ve taşıma zamanlarının öğrenme etkili olduğu tek makineli çizelgeleme problemi: Geciken iş sayısı minimizasyonu”, **International Journal of Engineering Research and Development,** 6(6), 34-36, 2011.
11. Kuo, W.H., Yang, D.L. “Minimizing the total completion time in a single machine scheduling problem with a time-dependent learning effect”, **European Journal of Operational Research,** 174, 1184-1190, 2006.
12. Kuo, W.H., Yang, D.L. “Minimizing the makespan in a single machine scheduling problem with a time-based learning effect”, **Information Processing Letters,** 97, 64–67, 2006.
13. Kuo, W.H., Yang, D.L. “Single-machine group scheduling with a time dependent learning

effect”, **Computers and Operations Research,** 33, 2099-2112, 2006.

14. Eren T., “Minimizing the maximum lateness in a scheduling problem with a time-dependent learning effect: A non-linear programming model”, **Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University,** 23(2), 459-465, 2008.

15. Sen, T., Gupta, S.K. "A Branch-and-Bound Procedure to solve a Bicriterion Scheduling Problem", **IIE Transactions,** 15(1), 84-88, 1983.

16. Gupta, S., Sen, T. “Minimizing the Range of Lateness on a Single Machine”, **The Journal of the Operational Research Society,** 35(9), 853-857, 1984.

17. Tegze M., Vlach, M. “Improved Bounds for Range of Lateness on a Single Processor”, **The Journal of the Operational Research Society,** 39(8), 675-680, 1988.

18. Sen T., Raiszadeh F.M.E., Dileepan P., “A Branch-and-Bound Approach to the Bicriterion Scheduling Problem Involving Total Flowtime and Range of Lateness”, **Management Science,** 34(2), 254-260, 1988.

19. Liao C.J., Huang, R.H., “An algorithm for minimizing the range of lateness on a single machine”, **The Journal of the Operational Research Society,** 42, 183–186, 1991.

20. Liao C.J., Huang, R.H., “An Algorithm for Minimizing the Range of Lateness on a Single Processor”, **The Journal of the Operational Research Society,** 42(4), 274-277, 1991.

21. Huang D.C., Jing, L. “A Job Scheduling Model and Heuristic Algorithm for Minimizing the Range of Lateness and Make-span on Parallel processors”, **Journal of Systems Science & Systems Engineering,** 7(1), 51-56, 1998.

22. Tanaka K., Vlach M., “Minimizing maximum absolute lateness and range of lateness under generalized due dates on a single machine”, **Annals of Operations Research**, 86 507–526, 1999.

23. GAMS 22.5 Development Corporation GAMS – the solver manuals, **GAMS user notes,** Washington, DC 2007, USA.