

# İKİ EKSENLİ YÜKLENMİŞ VE ORTASINDA ELİPTİK DELİK BULUNAN PLAKANIN DELİK GEOMETRİSİNE VE EĞİMİNE GÖRE GERİLME YOĞUNLUĞU FAKTÖRÜNÜN HESAPLANMASI

Tamer T. ÖZBEN\*, Nurettin ARSLAN\*\* ve Mahmut ÖZBAY\*\*\*

\* Makine Mühendisliği Bölümü, Dicle Üniversitesi, Diyarbakır

\*\* Makine Mühendisliği Bölümü, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir

\*\*\* Makine Mühendisliği Bölümü, Gazi Üniversitesi, Ankara

[tamoz@dicle.edu.tr](mailto:tamoz@dicle.edu.tr), [narslan@balikesir.edu.tr](mailto:narslan@balikesir.edu.tr), [ozbaym@gazi.edu.tr](mailto:ozbaym@gazi.edu.tr)

(Geliş/Received: 17.06.2010; Kabul/Accepted: 18.05.2011)

## ÖZET

Sonlu bir plaka da bulunan delik v.b. süreksizlikler gerilme altında iken delik civarında daha fazla gerilme yığılmasına neden olmaktadır. İki eksenli gerilme durumu için plakadaki farklı gerilme oranlarına göre gerilme yoğunluğunun değişimi elde edilmiştir. Elips deliğin uzun kenar (2b) ve kısa kenar (2a) uzunluklarına göre plaka yüzeyinde meydana gelen gerilme alanı dağılımı gösterilmiştir. Ayrıca, farklı gerilme oranlarında elips deliğin (2a) kenar uzunluğunun plaka genişliğine göre (H) maksimum gerilme değerleri sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Plaka x-eksenine göre, elips deliğin eğimine göre ( $\theta = 0^0, 15^0, 30^0, 45^0$  ve  $90^0$ ) plakada meydana gelen gerilme yoğunluğu ve alan değişimi araştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Gerilme yoğunluğu, eğimli elips delik, sonlu elemanlar yöntemi

## STRESS INTENSITY ANALYSIS OF BIAXIAL STRESSED SINGLE ELLIPTICAL HOLE IN PLATE ACCORDING TO CHANGE OF HOLE INCLINATION AND GEOMETRY

### ABSTRACT

Discontinuities such as the holes in a finite plate under loading while the more stress concentrations around holes causes. Applied to the edges of plate and the different rates the principal stresses ( $\sigma_1/\sigma_2$ ) around the hole were caused by the stress components (x, y) changes investigated. For biaxial stress in the plate, according to the different stress rate variation of stress intensity was obtained around the hole According to long edge (2b) and short edge (2a) of ellipse hole length the distribution of stress field occurring in the plate surfaces were are showed. Moreover, according to the plate width (H) the maximum stress value was calculated using the finite element method for different stress rates and large edge length of an ellipse. The inclination ( $\theta = 0^0, 15^0, 30^0, 45^0$  and  $90^0$ ) of ellipse hole with different geometries, according to the plate axis the maximum stress values and the stress field distribution the finite element and analytic method are obtained, and results were compared.

**Keywords:** Stress intensity, ellipse hole inclination, finite element method

### 1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Makine elemanları içerisindeki mikro çatlaklar her zaman var olmaktadır. Elastik sınırlar içerisinde kalınarak, geliştirilen analitik ifadeler Lineer Elastik Kırılma Mekaniği (LEKM) adı altında incelenir. Griffith [1] ve Irwin [2] 1920 lerin başlarında kırılma

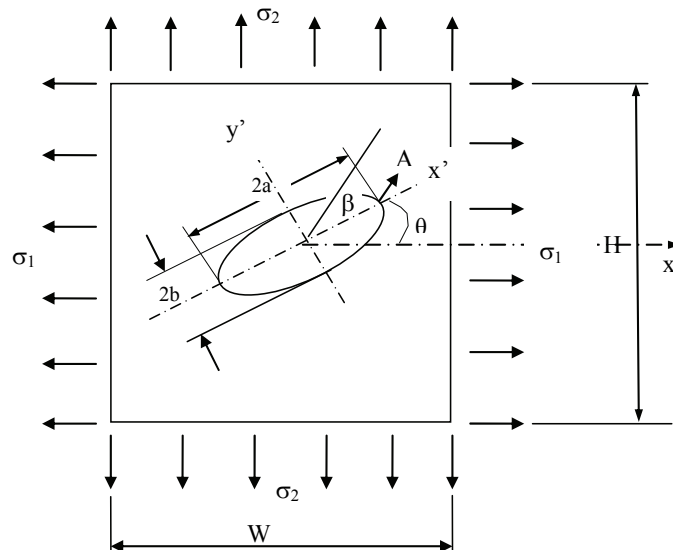
olayını, çatlakın büyümesini ve malzemede dayanım azalmasına yol açmasını enerji yöntemi ile açıklamaya çalışmıştır. Gerilmelerin, özellikle süreksizliği bozan bölgelerde, çentik etkisi oluşmakta ve gerilme yığılması meydana gelmektedir. Plakanın çekme gerilmesine ( $\sigma_x$ ) maruz bırakılması ve x-yönünde ( $\theta$ ) açısı yapan eliptik bir delik etrafında

meydana gelen gerilme ( $\sigma_{\max}$ ) ve gerileme yığılması faktörü ( $K_I$ ) in elde edilmesi amaçlanmıştır. Bouchard ve ark. çalışmalarında çatlak ilerlemesini sayısal tekniklerle hesaplanmasını doğruluğunu göstermişlerdir [3]. Schuller [4], çalışmasında Ansys sonlu elemanlar paket programında kullanılan elamanlar ile çatlak ilerlemesi hesabının doğru şekilde elde edilebileceğini göstermiş, ancak bu elemanların belirli geometrilerle sınırlı olduğunu ileri sürmüştür. Shah, farklı malzemeler kullanarak gerçekleştirdiği bir çalışmada biomaterial ve monolitik malzemelerin kırılma davranışlarının farklı olduğunu göstermiştir [5]. Bouiadjra, iki çatlak bölgesinin var olduğunu ve çatlak eğiminin değişimini arttırdığında iki bölgenin birleştiğini ileri sürmüştür [6]. Partheepan ve ark. [7] literatürlerde farklı malzemelerin kırılma tokluğunun hesaplanması ile ilgili yapılan çalışmalar ile neural network sonuçlarını karşılaştırmış ve %1 lere yakın hata payı ile yakın değerler elde ettiğini ileri sürmüştür. Dirikolu ve ark. gerilme yoğunluğu faktörünü farklı geometrilerle sahip plakalar için incelemiş ve sonlu elemanlarla uygun sonuçlar elde edilebileceğini göstermiştir [8]. Pilkey ve ark. çatlak eğiminin artışı ile çatlak alanı boyunca çatlak yayılımının attığını ileri sürmüştür [9]. Madenci ve ark. uygulanan bir gerilme yükünden sonra gerilme yoğunluğu faktörünün, ana çatlak oluşumunun yanı sıra çatlak ucundaki kalıntı gerilmeleri incelemiştir [10].

Bu çalışmada iki eksenli olarak yüklenmiş, ortasında elips delik bulunan bir plakada, delik geometrisine ve eğimine göre meydana gelen gerilme yoğunluğunu analitik ve sonlu elemanlar yöntemi kullanarak analizi gerçekleştirilmiştir.

## 2. TEORİK ANALİZ (THEORETICAL ANALYSIS)

Şekil 1 de  $\sigma_1$  ve  $\sigma_2$  asal gerilmelere maruz bırakılmış ve referans eksen  $\sigma_2$  olmak üzere ( $\theta$ ) elips deliğin eğimi olarak kabul edilen plaka gösterilmiştir.



Şekil 1. İki eksenli yüklenmiş eğimli elips delikli plaka (Biaxial tension of inclination elliptical hole)

Niceliksel olarak bir plakada çatlakın, gerilme yoğunluğuna etkisi ilk defa Inglis [11] tarafından gerçekleştirilmiştir. Plaka genişliğinin  $\gg 2a$  ve plaka yüksekliğinin  $\gg 2b$  olduğunu kabul etmiş ve elipsin küçük yarıçap bölgesine (A noktası) ait gerile değerini aşağıdaki gibi formüle etmiştir.

$$\sigma_A = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) \sinh 2\alpha + (\sigma_2 - \sigma_1) [\cos 2\theta - e^{2\alpha} \cos 2(\beta - \theta)]}{\cosh 2\alpha - \cos 2\beta} \quad (1)$$

burada  $\alpha$  elipsin büyük ve küçük kenar uzunluğundan hesaplanan geometrik orandır ve elipsin koordinatlarında elde edilebilir;

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{a^2 - b^2} \cosh \alpha \cos \beta \\ y &= \sqrt{a^2 - b^2} \sinh \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (2)$$

ve buradan da geometrik oran için;

$$\begin{aligned} \tanh \alpha &= \frac{b}{a}, \cosh \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \\ \sinh \alpha &= \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \end{aligned} \quad (3)$$

yazılabilir.  $\beta$  ise elips delik kenarının herhangi bir noktasına göre gerilme değer açısını temsil etmektedir.

İki eksenli yüklenmiş ve ortasında bulunan elips deliğin A (Şekil 1) noktasında oluşan gerilme yoğunluğu faktörü ( $K_A$ );

$$K_A = \frac{\sigma_A}{\sigma_1} = 1 + \frac{2a}{b} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (4)$$

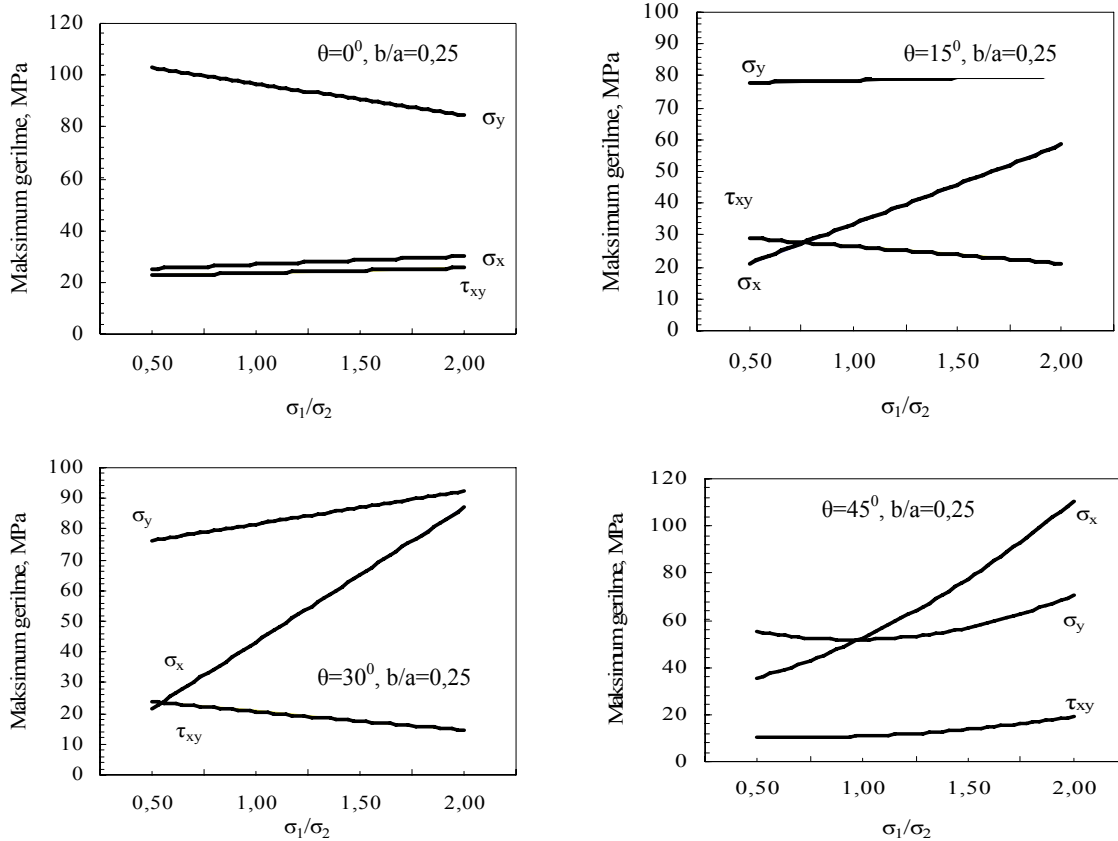
formülünden elde edilebilir.

### 3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN MODELE UYGULANIŞI VE SONUÇLAR (APPLICATION TO MODEL OF FINITE ELEMENT MODEL AND RESULTS)

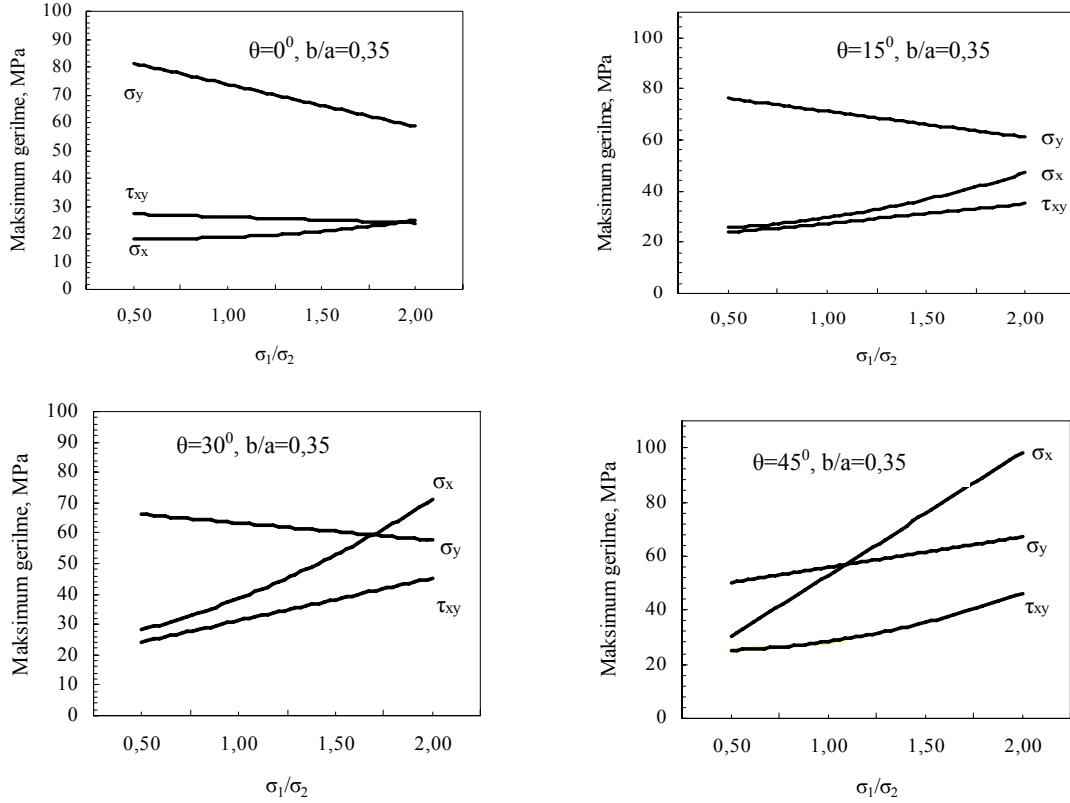
Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak gerçekleştirilen çalışmalarda görüleceği üzere [12, 13] plakanın analizi için 6522 düğüm ve 2279 eleman kullanılmıştır. Plakanın çelik malzemeden yapıldığı kabul edilmiş ve elastiklik modülü  $E=200$  GPa ve poisson oranı  $\nu=0,32$  olarak seçilmiştir. Plaka boyutları  $50 \times 50$  cm, elips deliğin geometrisi ( $b/a=0,25; 0,35; 0,50$  düşünülmüştür. Elips deliğin özellikle küçük kenarında (A noktasında) ve plaka yüzeyinde meydana gelen gerilme dağılımı  $\sigma_2/\sigma_1=0,50, 1,00; 1,50; 2,00$  oranları için elde edilmiştir. Farklı elips geometrileri ve gerilme oranlarının yanı sıra elips deliğin referans eksene göre yaptığı açı değişimine göre  $\theta=0^0, 15^0, 30^0, 45^0$  ve  $90^0$  delik kenarlarında meydana gelen gerilme yoğunluğu faktörü hesaplanmıştır. Analitik ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak hata oranları grafikler kullanılarak karşılaştırılmıştır.

Şekil 2, 3 ve 4 farklı  $b/a$  ve  $\theta$  değerleri için normal ve kayma gerilmelerinin değişimini göstermektedir. Şekil 2 de plaka içindeki elipsin eğiminin ( $\theta$ ) artması ile delik kenarındaki minör yarıçap bölgesindeki (A noktası)  $\sigma_x$  gerilme bileşeninin arttığı gözlenmiştir.  $\sigma_1/\sigma_2$  oranının artarken gerilme bileşeni  $\sigma_y$ ;  $\theta=0^0$  da azalmış,  $\theta=15^0$  de sabit kalmış,  $\theta=30^0$  ve  $45^0$  de ise artmıştır.  $\sigma_1/\sigma_2$  oranı arttığında ise, elips deliğin A noktasında, kayma gerilme bileşeni,  $\theta=15^0$  ve  $30^0$  eğimleri için azalma eğilimi göstermiş, fakat  $\theta=0^0$  ve  $\theta=45^0$  için az da olsa artış gözlenmiştir. Şekil 3 te görülmektedir ki  $b/a=0,35$  de  $\sigma_x$  gerilme bileşeni sadece  $\theta=45^0$  elips eğiminde ve  $\sigma_1/\sigma_2=1$  oranında  $\sigma_y$  bileşeni ile eşit değere ulaşmıştır ve yaklaşık 50 MPa olarak elde edilmiştir.

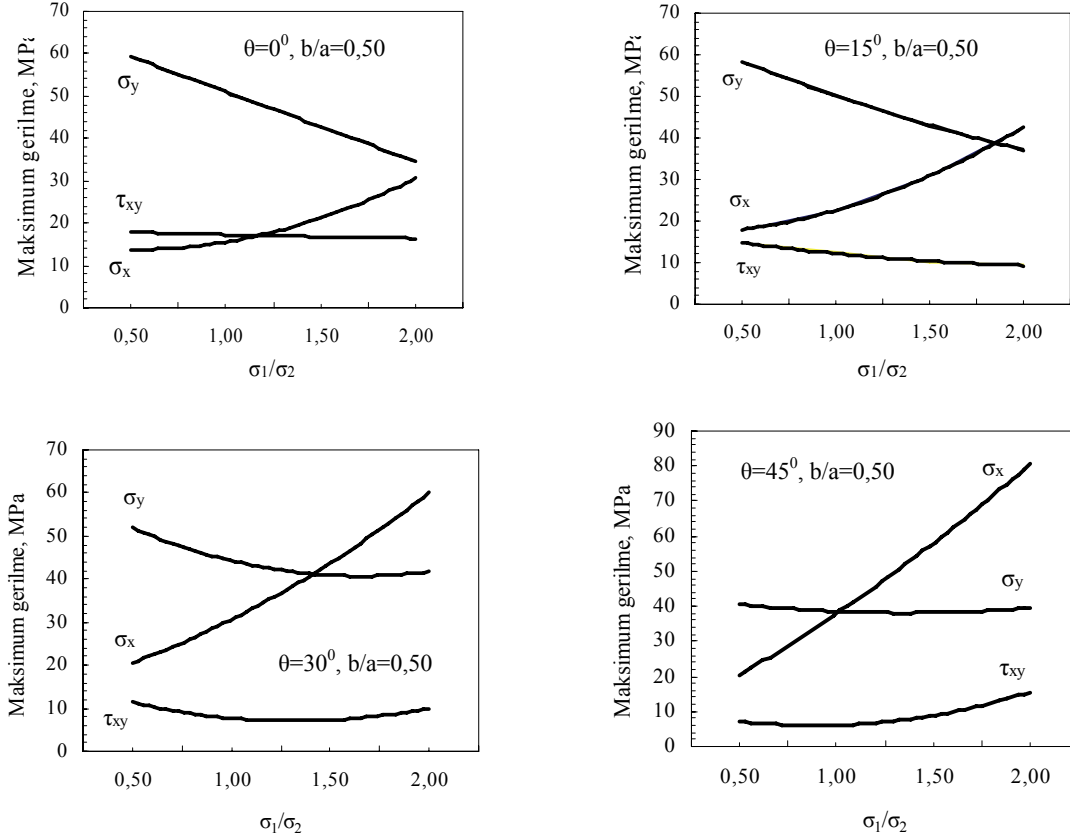
Maksimum kayma gerilmesi  $b/a=0,35$  oranında  $\theta=15^0$  eğimli elips deliğinde elde edilmiştir.  $b/a=0,5$  oranında ise  $\sigma_x$  ve  $\sigma_y$  gerilme bileşenlerinin aynı değere ulaşması farklı açılar için farklı gerilme oranlarında elde edilmiştir, sırasıyla;  $\theta=15^0$  için  $\sigma_1/\sigma_2=1,75$  de,  $\theta=30^0$  için  $\sigma_1/\sigma_2=1,35$ ,  $\theta=45^0$  için  $\sigma_1/\sigma_2=1$  de gerçekleşmiştir (Şekil 4).



Şekil 2.  $b/a=0.25$  ve farklı  $\theta$  açıları için normal ve kayma gerilmelerinin değişimi (Normal and shear stresses change for different  $\theta$  angle and  $n=0.25$ )



**Şekil 3.**  $b/a=0.35$  ve farklı  $\theta$  açıları için normal ve kayma gerilmelerinin değişimi (Normal and shear stresses change for different  $\theta$  angle and  $n=0.35$ )



**Şekil 4.**  $b/a=0.50$  ve farklı  $\theta$  açıları için normal ve kayma gerilmelerinin değişimi (Normal and shear stresses variation for different  $\theta$  angle and  $n=0.50$ )

$b/a=0,5$  oranında ise  $\sigma_x$  ve  $\sigma_y$  gerilme bileşenlerinin aynı değere ulaşması farklı açılar için farklı gerilme oranlarında elde edilmiştir, sırasıyla;  $\theta=15^\circ$  için  $\sigma_1/\sigma_2=1,75$  de,  $\theta=30^\circ$  için  $\sigma_1/\sigma_2 =1,35$  ve  $\theta=45^\circ$  için  $\sigma_1/\sigma_2=1$  de gerçekleşmiştir (Şekil 4).

Elips deliğin kısa ve uzun kenarları oranının araştırıldığı Şekil 5 de maksimum gerilme  $b/a=0,25$  de elde edilmiştir ve değeri 46,131 MPa dir.  $b/a$  oranı 0,35'e arttırıldığında (değişim % 28) delik kenarındaki maksimum gerilmede meydana gelen değişim % 18 olurken,  $b/a$  oranı 0,50 (değişim %50) olduğunda gerilmedeki değişim % 50 olarak elde edilmiştir.

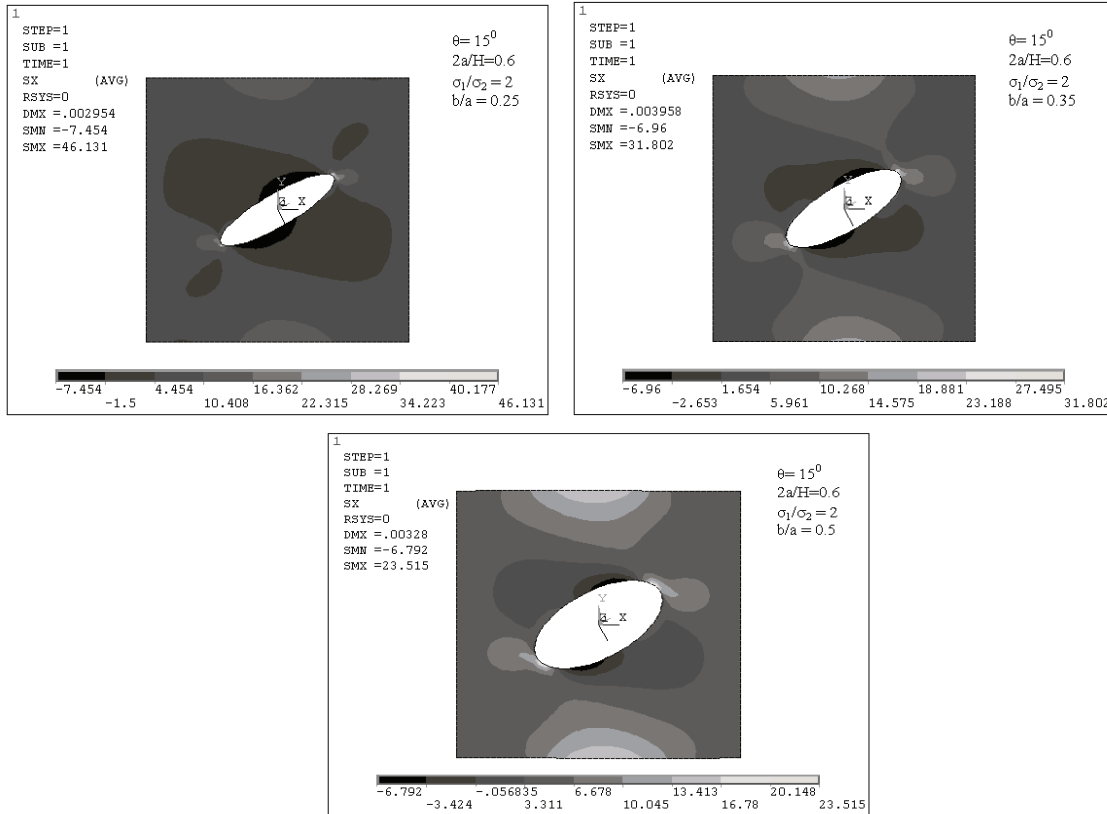
Asal gerilme oranlarının değişiminin plaka yüzeyinde meydana gelen gerilme alanı dağılımı ve delik kenarındaki gerilme yığılmasının incelendiği Şekil 6 da  $\sigma_1/\sigma_2$  oranının artışına bağlı olarak elips delik kenarında meydana gelen maksimum gerilme değeri lineer artış göstermiştir.

Elips büyük kenarı uzunluğunun plakaya oranının gerilme yoğunluğuna etkisinin incelendiği Şekil 7 de,  $2a/H=0,4$  den 0,5 e çıkarıldığında (değişim %25) maksimum gerilme artışı 51,86 MPa olmuştur ve artıştaki değişim yaklaşık %10 olmuştur.

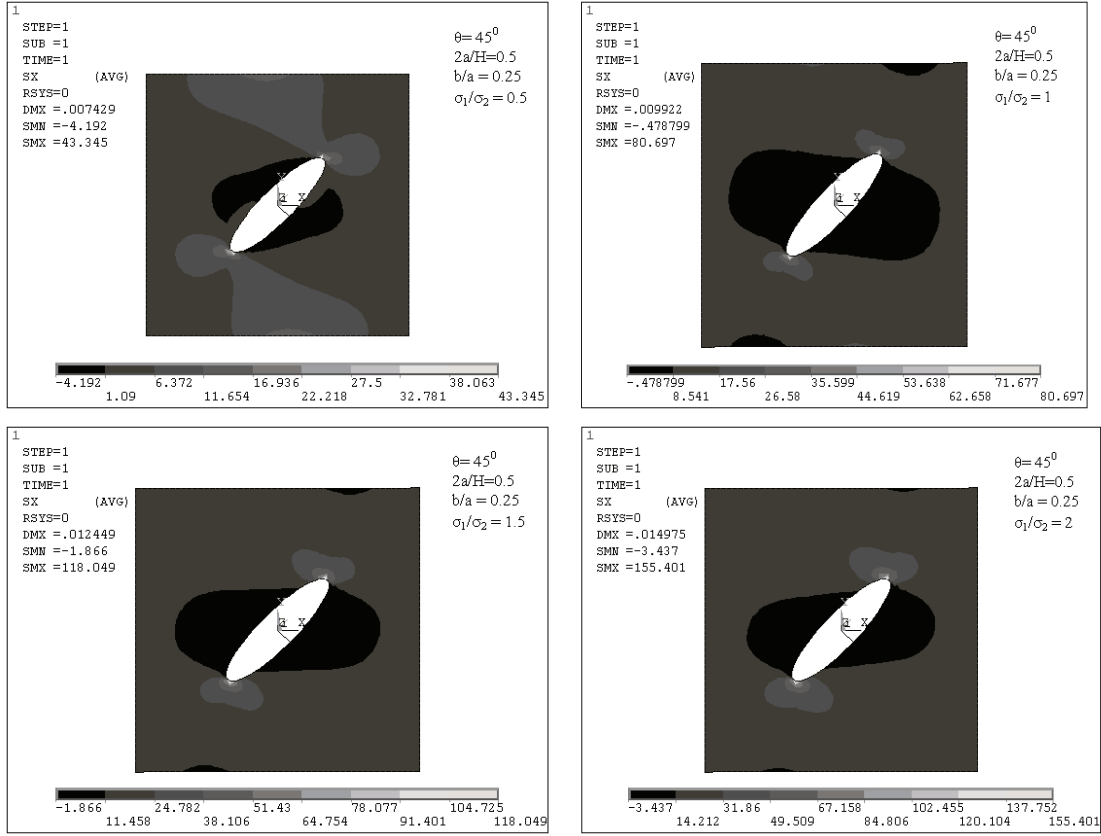
$\sigma_1=\sigma_2=10$  MPa ( $\sigma_1/\sigma_2=1$ ) olduğunda  $\theta=0^\circ$  ve  $15^\circ$  için maksimum gerilme elipsin büyük yarıçapına paralel plaka kenarında maksimum gerilme meydana gelmiştir, sırasıyla 26,731 ve 27,952 MPa dir. (Şekil 8). Elipsin eğimi arttıkça maksimum gerilme bölgesi elips deliğin küçük yarıçaplı kenarına doğru kaymıştır.  $\theta=30^\circ$  de plaka kenarındaki ile elips delik etrafındaki gerilme değerleri yaklaşık aynı olmakla beraber,  $\theta=45^\circ$  ve  $90^\circ$  için ise maksimum gerilme sadece elips delik civarında meydana gelmiştir.

Şekil 9 da  $b/a=0,25;0,35;0,50$  oranları ve  $\sigma_1/\sigma_2$  oranlarının her üçü için de benzer değişim eğrileri elde edilmiştir. Elips deliğin minör yarıçapında meydana gelen gerilme değerinin en büyüğü  $b/a=0,25$  ve 0,35 de elde edilmiştir ve değeri yaklaşık 130 MPa dir.

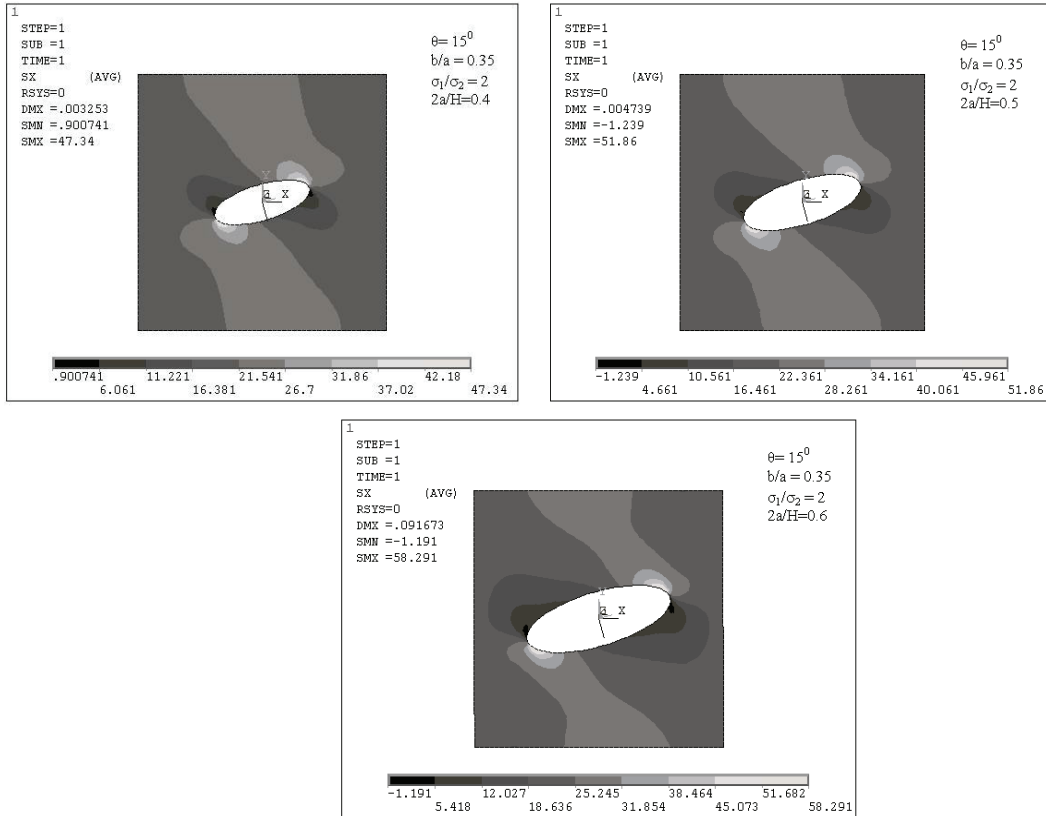
Şekil 10 analitik olarak eşitlik (1) ve (4) kullanılarak farklı gerilme oranları ve elips eğimi için gerilme yoğunluğu faktörünün elde edilen değişimini göstermektedir.  $\sigma_1/\sigma_2$  oranı arttıkça tüm elips delik eğimlerinde gerilme yoğunluğu faktörü ( $K_1$ ) in değeri azalmıştır.



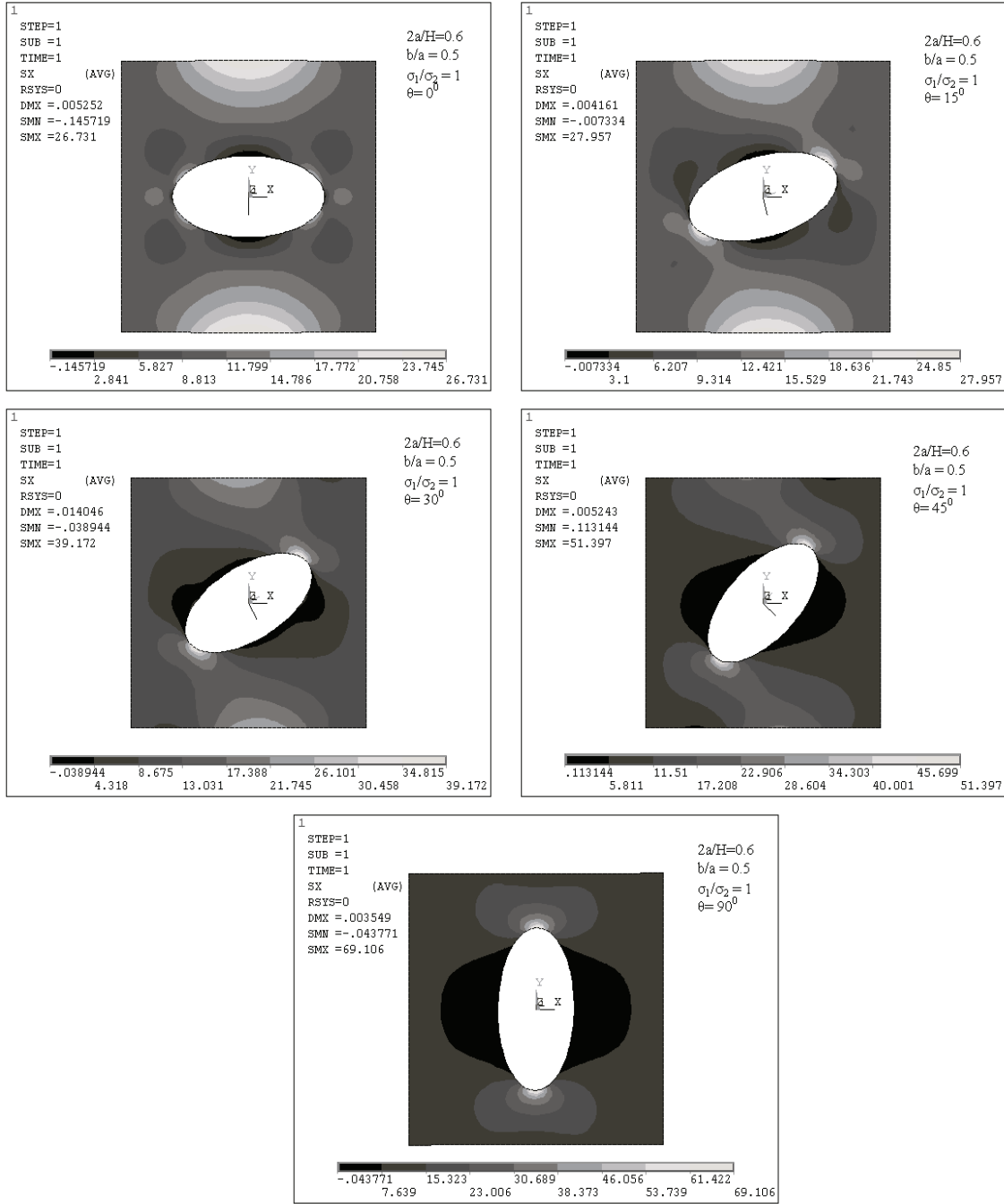
**Şekil 5.**  $\theta=15^\circ$  farklı  $b/a$  oranları için plaka yüzeyindeki gerilme dağılım grafiği (Contour plot of stress distributions in plate for different  $2a/H$  rates for  $\theta=15^\circ$ )



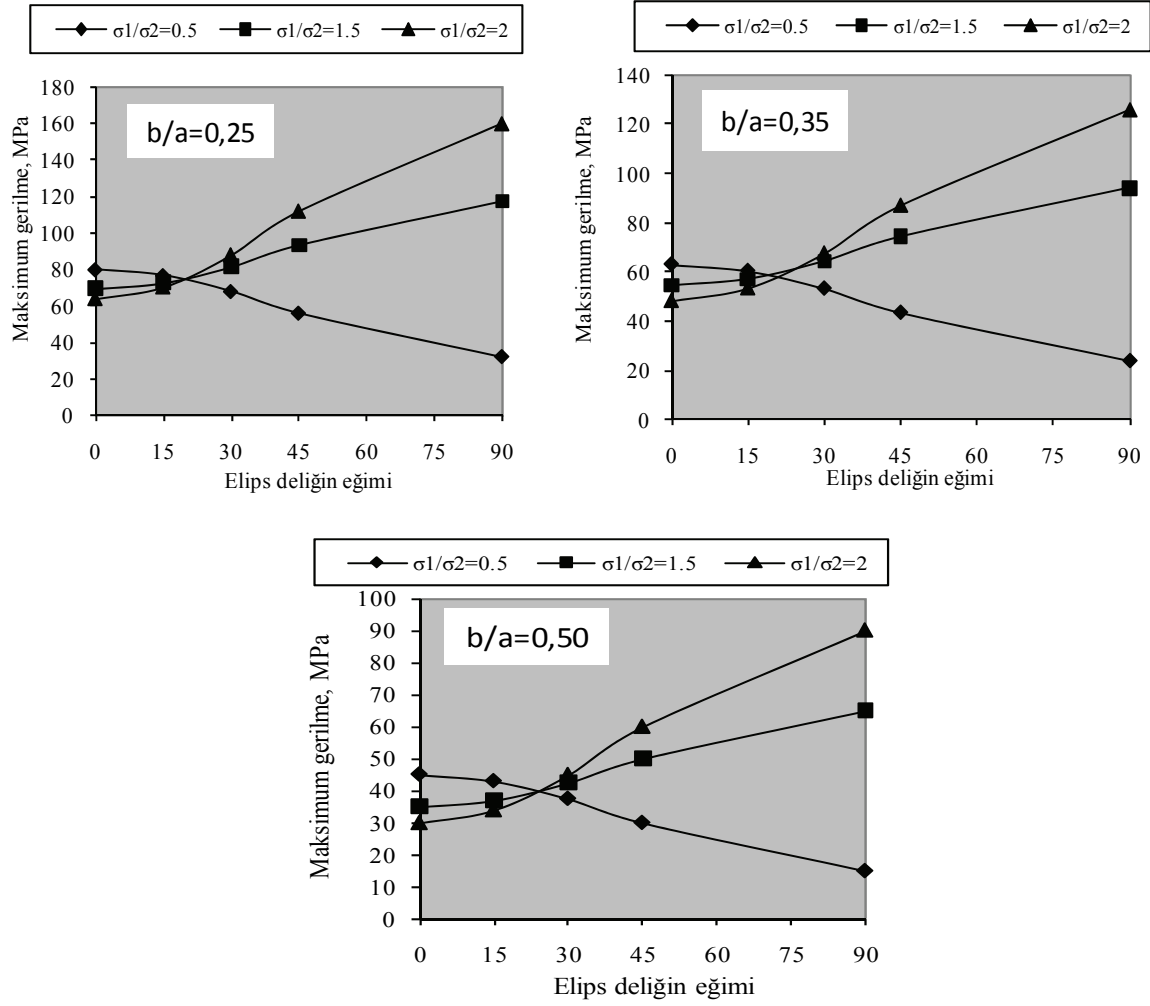
Şekil 6. Farklı  $\sigma_1/\sigma_2$  oranları için plaka yüzeyindeki gerilme dağılım grafiği (Contour plot of stress distributions in plate for different  $\sigma_1/\sigma_2$  rates)



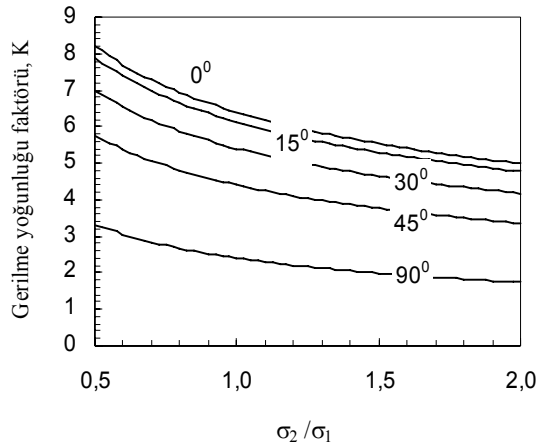
Şekil 7. Farklı  $2a/H$  oranları için plaka yüzeyindeki gerilme dağılım grafiği (Contour plot of stress distributions in plate for different  $2a/H$  rates)



Şekil 8. Farklı  $\theta$  açıları için plaka yüzeyindeki gerilme dağılım grafiği (Contour plot of stress distributions in plate for different  $\theta$  angle)



**Şekil 9.** Farklı  $b/a$  oranları için elips deliğın kenarında elde edilen maksimum gerilme (Different stress and  $b/a$  ratio of elliptical holes in plates for maximum stress graph changes)



**Şekil 10.** Farklı gerilme oranları ve elips eğimi için gerilme yoğunluğın faktörü (Stress intensity factor (K) at hole edge for different stress rate and ellipse incline)

#### 4. SONUÇ (CONCLUSION)

Küçük eğim açılarındaki ( $\theta=0^\circ$  ve  $15^\circ$ ) elipsin küçük yarıçap bölgesinde ve plaka kenarlarında gerilme

değerleri yaklaşık aynı olmuştur, ancak eğim büyüdükçe ( $\theta=30^\circ$ ,  $45^\circ$  ve  $90^\circ$ ) plaka kenarında gerilme yoğunluğu azalmış, minör yarıçap bölgesinde gerilme yoğunluğu artmaya başlamıştır.  $\sigma_1/\sigma_2$  oranı büyüdükçe kırılma yoğunluğu faktörü ( $K_A$ ) elips deliğın tüm açıları için azaldığı gözlemlenmiştir.  $b/a$  oranı artışı gerilme yoğunluğının plaka kenarına doğru kaymasına sebep olduğu gözlemlenmiştir. Elipsin uzun kenarının ( $2a$ ) büyümesi ile birlikte aynı genişlikte kalan plaka için elde edilen maksimum gerilme değerinin ve gerilme yoğunluğu faktörünün azaldığı gözlemlenmiştir. Ancak plaka yüzeyinde gerilme alanı dağılımında önemli bir değişikliğe neden olmamıştır.

#### 5. SEMBOLLER (SYMBOLS)

H : plaka genişliği  
W : plaka yüksekliği  
x,y : plaka eksenleri  
 $x', y'$  : elips deliğın eksenleri  
 $\beta$  : minör yarıçapın elips eksenine göre açısı  
 $\alpha$  : elips uzun ve kısa kenarlarının boyutlarının açılal konum değeri



$\theta$  : elips deliğin plaka eksenine göre açısı  
 B : "biaxially ratio"  $\sigma_1/\sigma_2$

## 6. KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Griffith, A. A. **The Phenomena of Rupture and Flow in Solids**, Philos. Trans., R. Soc. Lond., Ser. A., Vol. 221, 1920.
2. Irwin, G. R., **Fracture Dynamics, Fracture of Metals**, ASM, pp. 147-166, 1948.
3. Bouchard, O., Bay, F. ve Chastel, Y., "Numerical modelling of crack propagation: automatic remeshing and comparison of different criteria", **Computational Method Applied Mechanical Engineering**, 192, 3887–3908, 2003.
4. Schuller, T. ve Lauke, B., "Finite-element simulation of interfacial crack propagation: Methods and tools for the complete failure process under large scale yielding", **Engineering Fracture Mechanics**, 73, 2252–2263, 2006.
5. Shah, Q.H., Azram, M. ve Iliyas, M.H., "Predicting the Crack Initiation Fracture Toughness for a Crack Along The Bimaterials Interface", **Journal of Applied Science**, 5, 253-256, 2005.
6. Bouiadjra, B. Benguediab, M. Elmeguenni, M. Belhouari, M. Serier, ve Aziz, B. M. N. "Analysis of the effect of micro-crack on the plastic strain ahead of main crack in aluminium alloy 2024 T3 B", **Computational Materials Science**, 42, 100–106, 2008.
7. Partheepan, G., Sehgal, D.K.ve Pandey, R.K. "Fracture toughness evaluation using miniature specimen test and neural network", **Computational Material Science**, 44, 523–530, 2008.
8. Dirikolu, M. H., Aktas, A., "Analytical and finite element comparisons of stress intensity factors of composite materials", **Composite Structures**, 50, 99-102, 2000.
9. Pilkey W.D., Pilkey D.F., **Peterson's Stress Concentration Factors**, 3rd. ed, John Wiley & Sons, Inc, New York, 2008.
10. Madenci, E. ve Güven, İ., "The finite Elementh Method and applications in Engineering Using Ansys", **Springer Science-Buisness Media Inc**, 2006.
11. Inglis, C.E., "Stress in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners", **Transactions of the Institute of Naval Architects**, Vol.55, 219-241, 1913.
12. Y. S. Nakasone, T.A. Yoshimoto, Stolarski, **Engineering Analaysis with ANSYS Software, Elsevier Publishing**, 2006.
13. ANSYS User's Manuel (Version 9.0)

