

# YANAL İZOTROPİK FİBER KOMPOZİT ÇUBUKLARDA BURULMA YÜKLEMELERİ İÇİN YENİ FORMDA KAYMA MODÜLÜ TANIMLAMALARI

**Ezgi GÜNAY ve Sedef KONAKLI\***

Makina Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Gazi Üniversitesi, Maltepe 06570 Ankara,  
[egunay@gazi.edu.tr](mailto:egunay@gazi.edu.tr)

\*Seçmak, Elektrik Elektronik Makina İnşaat Turizm İmalat San. Tic. Ltd. Şti, Ostim, Ankara

## ÖZET

Bu çalışma, ilk olarak homojen olmayan fiber kompozit malzemeler üzerinde uygulanmakta olan burulma yüklemeleri altındaki çubuklara ait kayma modülü elastisite modelleri ve modellerin aralarındaki farklılıkların araştırılmasını içermektedir. İkinci olarak, kayma modülü tanımlamasının yanal izotrop malzemeler için yeni formda oluşturulması ele alınmıştır. Literatürde, değişik kesitlere sahip çubuklar için kısaca verilen iki boyutlu  $G(x, y)$  kayma modülü formülasyonları, yeniden oluşturulmuştur. Yeni bir form olarak, yanal izotropiye sahip fiber kompozit malzemeler için onbir bağımsız elastik sabite sahip kayma modülünün en genel tanımlaması yapılmıştır. Tanımlamaları yapılan bu yeni modelde kayma modülü, denklemler sistemi formunda oluşturulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Burulma yüklemesi, fiber kompozit, yanal izotropik, kayma modülü, mikro-mekanik.

## THE NEW FORMED SHEAR MODULUS FORMULATIONS FOR THE TRANSVERSELY ISOTROPIC FIBER COMPOSITE BARS UNDER TORSION LOADING

### ABSTRACT

This study first includes the researches about the elasticity models for nonhomogeneous fiber composites under torsional loading and the differences between them. Secondly, constitution of the new formed shear modulus definition was held on for the transversely isotropic materials. In literature, the given two dimensional  $G(x, y)$  shear modulus brief formulations about various cross sectional bars were derived again. As a new model, the most general definition which has eleven independent elastic constants for the transversely isotropic fiber composite material was generated. In this new form in which the definitions were given, shear modulus was defined in the form of the system of equations.

**Keywords:** Torsional loading, fiber composite, transversely isotropic, shear modulus, micro-mechanics.

### 1.GİRİŞ

Kompozit malzemelerin genel tanımı, üstün özelliklere sahip bir malzeme oluşturmak için makro veya mikro düzeylerde iki veya daha fazla farklı malzeme özelliklerine sahip yapıların birleştirilerek yeni bir malzemenin oluşturulması şeklinde verilebilir. Bu karmaşık yapılarda yeni elastik sabit değerleri ortaya çıkmaktadır ki, günümüzde bu değerler eşdeğer malzeme elastik sabit değerleri cinsinden bulunarak kullanılmaktadır. Bu çalışmada,

kaynak taramaları sırasında bulunan kayma modülü analitik modelleri yeniden çıkarımları yapılarak oluşturulmuştur. Araştırmalar sonucunda, çalışmalarını iki ana alt basamakta toplamının gerekli olduğu ortaya çıkmaktadır. Buna göre ilk grubu, kayma modülü tanımlamaları iki boyutta  $G(x, y)$  fonksiyonu formunda tanımlanarak her çubuk kesiti üzerinde, her bir koordinat noktasının farklı bir kayma modülüne sahip eleman olduğu varsayımından yola çıkılarak oluşturulan tanımlamalar oluşturmaktadır (Stokes [1], Birlik [2] ve Yaraşık [3]). İkinci grubu

ise, ortotropik ve anizotropik fiber kompozit malzemeler için tanımlanan elastisite formülasyonları oluşturmaktadır. Bu çalışmada, günümüze kadar bu konuda yapılan araştırmalarda elde edilmiş kayma modülü denklemleri açıklanmış ve yanal izotropik fiber kompozitler için en genel kayma modülünün yeni formu bulunmaya çalışılmıştır. Yanal izotropik fiber kompozitlere en anlamlı örnek günlük ortamdan organik yapıya sahip ağaç malzeme verilebilir. Aşağıdaki bölümlerde, bu konu başlıkları ayrıntılarıyla açıklanmaktadır.

## 2. HOMOJEN OLMAYAN İNCE CİDARLI PRİZMATİK ÇUBUKLARIN TASARIMINDA KULLANILAN KAYMA MODÜLÜ TANIMLAMALARI

Bu bölümde burulma yüklemesi altındaki ince cidarlı, homojen olmayan prizmatik çubuklara ait kayma modülü formülasyonları yer almaktadır. Stokes [1], çalışmasında, rijit termoplastik yapıya sahip dış kabukları olan kompozit malzemeden yapılmış burulma çubuklarının formülasyonunu mekanik tasarım amaçlı olarak elektrik kablo dış yüzey kaplamaları için elde etmiştir. Stokes [1,4] makalelerinde, homojen olmayan ve her koordinat noktasında değişik kayma modülü değerine  $G(x, y)$  sahip burulma problemini ve eğilme çubukları için de her koordinat noktasında değişik Young modülü değerlerine sahip  $E(x, y)$  olan kompozit malzemeden hazırlanmış kiriş problemi için genel denklemleri çıkarmıştır. Stokes'un [1] makalesinde, ilgili formülasyonlar homojen olmayan malzemelerde elastik modül değerlerinin noktadan noktaya değiştiği kabul edilerek ve kesit alanlarının geometrik değişimlerine bağlı olarak ortalama bir kayma modülünün formüle edilmesiyle açıklanmaktadır. Birinci ve ikinci grup çalışmalardan elde edilmiş olan genel denklemler, ileride yapılacak yeni çalışmalara taban yaratması amacıyla bir bütün halinde aşağıdaki bölümlerde kısaca özetlenmektedir.

- Prizmatik çubukların burulması (Stokes [1], Timoshenko ve Goodier [5], Oden ve Ripperger [6], Ugural ve Fenster [7]) aşağıdaki eşitliklerle verilmektedir.

$$\tau_{xz}(x, y) = G(x, y)\gamma_{xz} \quad (1-a)$$

$$\tau_{yz}(x, y) = G(x, y)\gamma_{yz} \quad (1-b)$$

$$\tau_{xz}(x, y) = G(x, y)\theta_0 \left( \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} - y \right) \quad (2-a)$$

$$\tau_{yz}(x, y) = G(x, y)\theta_0 \left( \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} + x \right) \quad (2-b)$$

Burada,  $\tau(x, y)$  kayma gerilmesini,  $G(x, y)$  kayma modülünü,  $\psi(x, y)$  çarpılma (warping) fonksiyonunu ve  $\theta_0$  ise sabit bir katsayı olarak burulma açısını tanımlamaktadır.

- Dikdörtgenel yanal kesite sahip, ince cidarlı çubukların ortalama kayma modülüne ait ifade Stokes [1] tarafından aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$G_{TR} = \frac{\int_0^{t/2} Gy^2 dy}{\int_0^{t/2} y^2 dy} = 3 \int_0^1 G\eta^2 d\eta = G_2 \quad (3)$$

Burada  $\eta$  eğrisel koordinat sistemini,  $t$  et kalınlığını tanımlamaktadır.

- Dairesel kesitli, içi dolu rijit çubukların ortalama kayma modülü ifadesi ise Denklem (4) ile verilmektedir.

$$G_{TC} = \frac{T}{I_P \theta_0}, \quad I_P = 2\pi \int_0^R r^3 dr, \quad G_{TC} = \frac{\int_0^1 G(r)r^3 dr}{\int_0^R r^3 dr} = 4 \int_0^1 G(\eta)\eta^3 d\eta = G_3 \quad (4)$$

Burada karşılıklı olarak,  $G_{TC}$  kayma modülünü,  $I_P$  atalet momentini,  $R$  yarıçap değerini  $T$  tork ve  $\theta_0$  burulma açısını belirtmektedir.

- Dairesel tüplerin ortalama kayma modülü ifadesi ise (5) denkleminde görülmektedir.

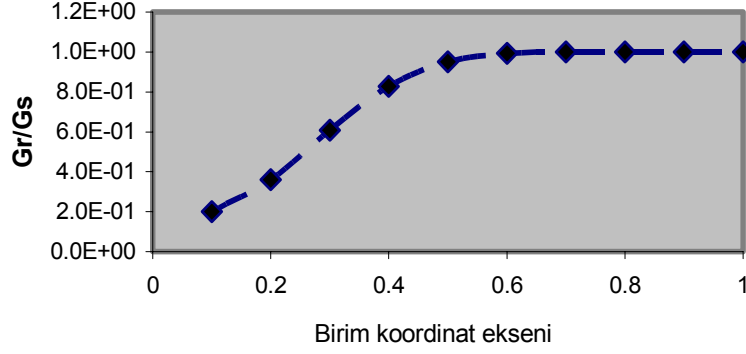
$$\frac{T}{2\pi R^3 t} = G_T \theta_0, \quad G_T = \int_0^1 G(\eta)d\eta = G_0 \quad (5)$$

Burada  $G_T$  efektif kayma modülü,  $T$  tork,  $R$  yarıçap ve  $\theta_0$  burulma açısı cinsinden ifade edilmiştir.

- Değişik kesit geometrilerine sahip, ince cidarlı tüplerin burulma problemini ait ortalama kayma modülü  $G_{TW}$ , Denklem (6) ile verilmektedir.

$$G_{TW} = \frac{\oint ds/t}{\oint ds/(G_a t)}, \quad G_a(s) = \frac{1}{t} \int_0^{t(s)} G(s, \eta)d\eta \quad (6)$$

Burada  $G_a(s)$ ,  $t$  sabit kalınlığa sahip, ince cidarlı dairese kesitli tüpler için sabit kayma modülüdür. Şekil 1 ile verilen eğri, Stokes [1] tarafından tanımlanmakta olan  $G_r$ ,  $G_s$  ortalama kayma modüllerine ait ifade oranlarının, eğrisel koordinatlar üzerinde hareket ederken gösterdiği davranışı açıklamaktadır. Grafik, eğrisel koordinat sisteminde, koordinat eksenlerinin  $-1 \leq \eta_0 \leq +1$  ve  $-1 \leq \xi_0 \leq +1$  değerleri arasında değiştiği dikkate alınarak, radyal yönde tanımlanmakta olan belirli  $\eta_0$ 'a karşılık  $\beta = G_r/G_s$ 'nin çizilmesiyle oluşturulmuştur.  $G_r$ , herhangi bir  $r$  radyal koordinattaki kayma modülünü,  $G_s$  ise burulma çubuğunun yüzeyinde eriştiğimiz ortalama kayma modülünü göstermektedir. İlgili denklemler EK-A'da verilmektedir.



Şekil 1. Eğrisel koordinat sisteminde  $\eta_0$ 'ya karşılık  $\beta = G_r/G_s$  grafiği

### 3. BURULMA VE MATEMATİKSEL MODELLEMELER

#### 3.1. Genel Burulma Teoremleri

Bu konuda yapılan ilk çalışmalarda elde edilen denklemler, burulma esnasında burulma yüklemesi etkisindeki kesitlerin düzlemselliklerini koruyarak rijit dönme hareketi yaptığı, biçimleri bozulmaksızın döndüğü kabulleri ile elde edilmişti. Coulomb [8] tarafından geliştirilen bu teori, daha sonra Navier [9] tarafından enine kesit alan yüzeyleri dairesel olmayan prizmatik çubuklar üzerinde uygulanmıştır. Yukarıdaki belirtilen ana kabul altında çalışan Navier [9], verilen bir burulma momenti için çubukların burulma açısının kesitin ağırlık merkezine göre kutupsal atalet momenti ile ters orantılı olduğu ve maksimum kayma birim şekil değiştirmesinin kesit ağırlık merkezinden en uzak noktalarında ortaya çıktığı gibi, günümüzde elde edilen formülasyona ters sonuçlara ulaşmıştır. Daha sonra yapılan çalışmalarla, prizmatik çubukların uçlarına uygulanan kuvvet çiftleriyle burulma probleminin doğru çözümü Saint-Venant [4] tarafından verilmiştir. Günümüzde yapılan son çalışmalara örnek olarak, Ergüven [10]'in homojen olmayan aynı zamanda yanal izotrop olan dairesel kesitli çubuğun burulma yüklemesi altında iki boyutta modellenmesi verilebilir. Ergüven [10] çalışmasında, yanal izotrop fiber-kompozit malzemeden yapılmış katı çubuklarda  $G$  kayma modülünü,  $C_{44}$  ve  $C_{66}$  elastik sabitlerinin bir fonksiyonu olarak  $G(C_{44}, C_{66})$  formunda tanımlanmaktadır. Denge denklemi  $\phi(r, z)$  gerilme fonksiyonu cinsinden ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem formunda oluşturulmuştur. Bu ifadeye, gerilme-birim yerdeğiştirme ifadelerinin içerisinde yer alan birim yer değiştirmelerin,  $\phi(r, z)$  gerilme fonksiyonunun simetrik bir fonksiyon olan  $\cosh(z)$  hiperbolik fonksiyonu cinsinden ifadesinin tanımlanarak yerleştirilmesi ile ulaşılmıştır. Aşağıdaki bölümde,  $\tau_{\theta z}, \tau_{r\theta}$  kayma gerilmesine ait denklemler, yanal izotrop fiber kompozit katı silindirik çubuğun burulma etkisi altında kısaca açıklanarak gösterilmiştir. Ergüven [10]'in çalışmasındaki

yöntem, bizim çalışmamızda üç boyutta en genel ifadelerin tanımlanmasına taban teşkil ederek kullanılmıştır (Konaklı [11]).

#### 3.2. Homojen Olmayan Yanal İzotropiye Sahip Fiber Yapılı Silindirik Kompozit Katı Çubuğun Burulma Yüklemesi Altında İki Boyutta Analitik Modellemesi

Eksenel simetriye sahip burulma deformasyonu tanımlamaları (Ergüven [10]), silindirik koordinatlarda  $\alpha^2 = C_{66}/C_{44}$ ,  $z' = z/\alpha$ ,  $\alpha^2 = \mu_{66}/\mu_{44}$ ,  $k' = k/\alpha$  ve  $\sqrt{\mu_{66}\mu_{44}} = \bar{\mu}$  parametrik dönüşüm eşitliklerinin kullanılması ile  $r, \theta, z'$  koordinatlarına bağlı olarak ifade edilmiştir (Konaklı [11]). Burada  $k$  sabit bir sayıdır. Bu dönüşümlerde görülmekte olan  $\mu_{44}$  ve  $\mu_{66}$ ,  $\cosh^2(k'z')$  hiperbolik fonksiyonun  $C_{44}(r, z)$  ve  $C_{66}(r, z)$  elastik sabitlerin ifadelerini oluşturan denklemlerin çarpanlar halindeki sabit katsayılarıdır. İleride görüleceği gibi, bu dönüşümler sayesinde denge denklemi simetrik bir yapı kazanarak, ikinci mertebeden kısmi bir diferansiyel denklem formuna gelmektedir ve buradan  $\phi(r, z)$  analitik olarak Bessel fonksiyonlarına bağlı olarak çözülebilmektedir. Formülasyonda, teğetsel yöndeki sıfır olmayan tek yer değiştirme vektör bileşeni olan  $u_\theta = u_\theta(r, z')$ ,  $r$  ve  $z'$  koordinatlarının bir fonksiyonudur. Kayma gerilmesi-birim yerdeğiştirme ifadeleri  $C_{66}(r, z')$  ve  $C_{44}(r, z')$  kayma modülü tanımlamalarıyla fonksiyonel formda ifade edilir. Böylece (7) ve (8) denklemlerine ulaşılmaktadır.  $C_{66}(r, z')$  kayma modülü,  $r, z'$  koordinatlarına bağlı olan, çubuk yanal kesiti üzerinde noktadan noktaya bağlı bir fonksiyonun ifadesi şeklindedir. Böylece, bu tanımlama sayesinde mikro düzeyde malzeme sabitlerini açıklamak da mümkün olabilecektir. Ayrıca aşağıda belirtildiği üzere  $C_{66}(r, z')$ , diğer iki sabit olan  $C_{11}, C_{12}$ 'ye bağlı bir fonksiyonudur. Bu aşamada, bilinmeyenler  $C_{11}, C_{12}, C_{44}, \mu_{44}, \mu_{66}, k$  ve gerilme fonksiyonu  $\phi(r, z)$ 'in de dikkate alınmasıyla, yedi olarak belirlenebilir.

$$\tau_{r\theta}(r, z') = C_{66}(r, z') \left[ \frac{\partial u_{\theta}(r, z')}{\partial r} - \frac{u_{\theta}(r, z')}{r} \right] \quad (7)$$

$$\tau_{\theta z}(r, z') = C_{44}(r, z') \left[ \frac{\partial u_{\theta}(r, z')}{\partial z'} \right], \quad (8)$$

$$C_{66} = (C_{11} - C_{12}) / 2$$

Yukarıda verilen (7) ve (8) denklemlerinde  $\tau_{r\theta}$ ,  $\tau_{\theta z}$  karşılıklı olarak,  $r$  radyal doğrultudaki yüzey normalinin tanımlandığı silindirik yüzeylere karşılık gelen birim alanlar üzerindeki teğetsel kayma ve normal vektörü  $z$  eksenine paralel olan dairesel kesitli yanal yüzey üzerindeki  $\theta$  açısı yönündeki kayma gerilmeleridir. Silindirik koordinatlarda tanımlanan denge denklemi (EK-A), (7) ve (8) denklemleri yerlerine yazılırsa;

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}(r, z')}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}(r, z')}{\partial z'} + \frac{2\tau_{r\theta}(r, z')}{r} = 0 \quad (9)$$

bulunur.  $C_{66}(r, z')$  ve  $C_{44}(r, z')$  kayma modülü tanımlamaları (10) ve (11) denklemlerinde  $\cos^2 h$  fonksiyon tanımlaması yardımıyla yapılmıştır (Şekil 2).

$$C_{66}(r, z') = \mu_{66} \cosh^2(k' z') \quad (10)$$

$$C_{44}(r, z') = \mu_{44} \cosh^2(k' z') \quad (11)$$

Çevrimsel yönde tanımlanmakta olan  $u_{\theta} = u_{\theta}(r, z')$  yine hiperbolik cosh fonksiyonu sayesinde denklem (12)'deki gibi ifade edilmiştir.

$$u_{\theta}(r, z) = \frac{\phi(r, z)}{\cosh(kz)} \quad (12)$$

Tanımlanan yerdeğiştirme fonksiyonu birim deformasyon tanımlamalarında ve onlarda gerilme ifadeleriyle birlikte denklem (9) ile verilen denge denkleminde yerlerine konduğunda, ilk olarak denge denklemi teğetsel yerdeğişimleri  $u_{\theta} = u_{\theta}(r, z)$  cinsinden denklem (13)'de görüldüğü gibi oluşturulur ve daha sonra da denklem (12)'deki  $u_{\theta} = \phi(r, z)/\cosh(kz)$  ifadesinin  $u_{\theta}$  yerdeğişimi alan ifadelerinde yerinde kullanılması ile (14) numaralı denklem  $\phi(r, z)$  fonksiyonu cinsinden elde edilir.

$$\frac{\partial^2 u_{\theta}(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial u_{\theta}(r, z)}{\partial r} - \frac{u_{\theta}(r, z)}{r} \right] + \frac{\partial^2 u_{\theta}(r, z)}{\partial z^2} + 2k \tanh(kz) \frac{\partial u_{\theta}(r, z)}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\phi}{r} \right] + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - k^2 \phi = 0 \quad (14)$$

Bu aşamada Denklem (14)  $\phi(r, z)$  gerilme fonksiyonu için çözüldüğünde,  $\tau_{r\theta}$ ,  $\tau_{\theta z}$  kayma gerilme ifadeleri elde edilecektir. Hook kanununda, seçilen kompozit malzemeye ait elastik sabitler  $C_{44}(r, z)$  ve  $C_{66}(r, z)$ 'in  $r$  ve  $z$  noktasal koordinatlarına bağımlı bir fonksiyon formunda tanımlandığı dikkate alınarak, kayma gerilmesi dağılımlarının bu ifadellere bağımlı olarak ortaya çıkacağı açıkça görülebilir.  $\tau_{r\theta}$ ,  $\tau_{\theta z}$  kayma gerilmesi dağılımları aşağıda açıklanmakta olan analitik yöntem sonucunda elde edilen son formuyla (26) ve (27) numaralı denklemlerde verilmektedir.  $\phi(r, z)$  fonksiyonu Denklem (15) ve (16)'da verilmekte olan Hankel dönüşümlerinin [12] uygulanması elde edilmiştir. Gerekli işlemler aşağıda kısaca açıklanmaktadır.

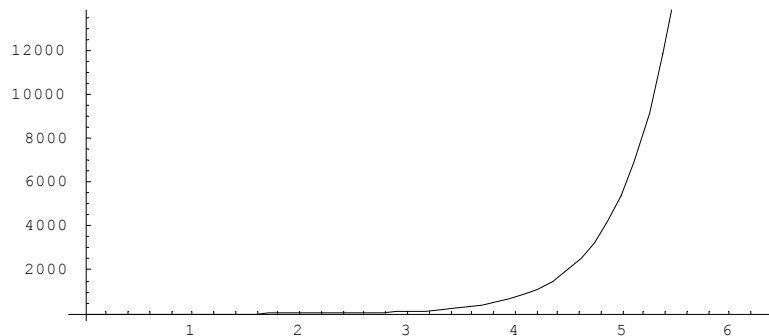
$$H_m \left[ f''(t) + \frac{1}{t} f'(t) - \frac{m^2}{t^2} f(t) \right] = -s^2 H_m [f(t)] \quad (15)$$

$$f^{H_v}(s) = H_v [f(r)] = H_v [f^{H_v}(s) : r \rightarrow s] = \int_0^{\infty} r J_v(sr) f(r) dr \quad (16)$$

Ters hankel dönüşümü ile Denklem (17) kullanılarak Denklem (18) elde edilir.

$$f(r) = H_v [f(s)] = H_v [f^{H_v}(s) : s \rightarrow r] = \int_0^{\infty} s f^{H_v}(s) J_v(sr) dr \quad (17)$$

Aşağıda (18) numaralı denklemde görülmekte olan integralin değeri  $s, r$  parametreleri cinsinden oluşturulur. Bu eşitliği göz önüne aldığımızda ve Denklem (14) içerisinde  $r$  değişkenine göre birinci dereceden hankel dönüşümü uygulandığı zaman;



Şekil 2.  $x$ 'in  $0 - 2\pi$  aralığındaki değerleri için  $\cos^2 h(x)$  fonksiyonunun  $x - f(x)$  grafiği

$$\phi^{H_1} = H_1[\phi] \text{ tanımlaması ile } H_1 \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial^2 \phi^{H_1}}{\partial z^2}$$

eşitliği bulunacaktır. Bu değerler Denklem (14)'de yerine yazılarak Denklem (19) elde edilmiştir.

$$\int_0^\infty r \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\phi}{r} \right] \right) J_\nu(sr) dr = -s^2 \phi^{H_1}(s, z, k) \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \phi^{H_1}}{\partial z^2} - (k^2 + s^2) \phi^{H_1} = 0 \quad (19)$$

Yukarıdaki denklemlerde görülmekte olan ikinci dereceden kısmi türevler  $z$ 'ye göre alınmakta olup Denklem (14)  $k$ ,  $s$  ve  $\phi$ 'in da fonksiyonu konumundadır. Bu denklemin kökleri  $m_1$  ve  $m_2$  ise;

$$m^2 - \alpha^2 = 0 \Rightarrow m_1 = -\alpha, m_2 = \alpha \quad (20)$$

$$\alpha^2 = s^2 + k^2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{s^2 + k^2} \quad (21)$$

olur. Burada çözüm  $\phi^{H_1}$ ,  $\alpha$ 'nın cinsinden aşağıdaki formda oluşturmuştur.

$$\phi^{H_1} = C e^{-z\alpha} + D e^{z\alpha} \quad (22)$$

$$\phi^{H_1} = C e^{-z(s^2+k^2)^{1/2}} + D e^{z(s^2+k^2)^{1/2}} \quad (23)$$

Denklem (23)'e ters Hankel dönüşümü uygulandığı zaman elde edeceğimiz fonksiyon  $\phi(r, z)$  gerilme fonksiyonu olacaktır ve Denklem (24)'de verilmektedir (Konaklı [11]).

$$\phi(r, z) = \int_0^\infty s \left\{ C e^{-z(s^2+k^2)^{1/2}} + D e^{z(s^2+k^2)^{1/2}} \right\} J_1(rs) ds \quad (24)$$

$$u_\theta(r, z) = [\cosh(kz)]^{-1} \int_0^\infty s C e^{-z(s^2+k^2)^{1/2}} J_1(rs) ds \quad (25)$$

Denklemlerde,  $H_\nu[f(s)]$  Henkel dönüşümünü,  $J_\nu(sr)$ ,  $J_1(rs)$   $\nu$ 'inci ve birinci mertebeden Bessel fonksiyonları (Granino ve Theresa [12], Hildebrand [13], Spiegel [14]) olup  $C$  ve  $D$  ise dönüşümler sırasında ortaya çıkan iki sabittir. Denklem (25)'den yararlanılarak aşağıdaki (26-31) denklemleri yardımıyla gerilme dağılımlarına ulaşılmış olacaktır.

$$\tau_{\theta z}(r, z) = \mu_{44} \cosh^2(k\alpha \frac{z}{\alpha}) \sqrt{\frac{\mu_{66}}{\mu_{44}}} \frac{\partial u_\theta(r, z)}{\partial z} \quad (26)$$

$$\tau_{\theta z}(r, z) = \bar{\mu} \cosh^2(kz) \frac{\partial u_\theta(r, z)}{\partial z} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}(r, z) = & \bar{\mu} \cosh(kz) \left[ \left( \frac{-k \sinh(kz)}{\cosh^2(kz)} \right) \int_0^\infty C(s) e^{-z(s^2+k^2)^{1/2}} J_1(rs) ds \right. \\ & \left. + \frac{1}{\cosh(kz)} \int_0^\infty C(s) [-(s^2+k^2)^{1/2}] e^{-z(s^2+k^2)^{1/2}} J_1(rs) ds \right] \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}(r, z) = & \mu_{66} \cosh^2(kz) \left[ \frac{1}{\cosh(kz)} \int_0^\infty C(s) e^{-z(s^2+k^2)^{1/2}} J_1'(rs) ds \right. \\ & \left. - \frac{1}{\cosh(kz)} \int_0^\infty C(s) e^{-z(s^2+k^2)^{1/2}} \left( \frac{J_1(rs)}{r} \right) ds \right] \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}(r, z) = & \mu_{66} \cosh(kz) \left[ \int_0^\infty C(s) e^{-z(s^2+k^2)^{1/2}} \left[ J_1'(rs) - \frac{J_1(rs)}{r} \right] ds \right] \quad (30) \end{aligned}$$

$$J_1'(rs) = -s J_2(rs) + \frac{1}{r} J_1(rs) \quad (31)$$

Gerilme dağılımları  $\tau_{\theta z}(r, z)$  ve  $\tau_{r\theta}(r, z)$ , Denklem (32) ve (33) ile  $\sinh(kz)$  ve  $\cosh(kz)$  cinsinden tanımlanmış olacaktır.

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}(r, z) = & -\bar{\mu} \int_0^\infty C(s) [k \sinh(kz) + (s^2+k^2)^{1/2} \cosh(kz)] \\ & \cdot e^{-z(s^2+k^2)^{1/2}} J_1(rs) ds \quad (32) \end{aligned}$$

$$\tau_{r\theta}(r, z) = \mu_{66} \cosh(kz) \int_0^\infty s C(s) e^{-z(s^2+k^2)^{1/2}} J_2(rs) ds \quad (33)$$

#### 4. EN GENEL FORMDA HOMOJEN OLMAYAN YANAL İZOTROPİK FİBER-KOMPOZİT ÇUBUĞUN BURULMA YÜKLEMESİ ALTINDA KAYMA MODÜLÜ MODELLEMESİ

Yanal-izotropik fiber kompozitler, birbirlerinden bağımsız beş elastik sabit ile tanımlanmaktadır (Gibson [15]). Bunun yerine, bu çalışmamızda en genel durumda içerilen onbir elastik sabit ile başlıyarak yanal izotropik kompozit yapı tanımlanmaya çalışılmıştır. Yerdeğişimi fonksiyonları birbirlerine dik iki eksen boyunca  $u(r, z) = v(r, z) = \phi(r, z)/\cosh(kz)$  ifadesi ile ifade edilmiştir (Ugural [7]). Katı silindirik çubuğun her kesiti üzerinde oluşmakta olan gerilme-birim uzama denklemleri en genel halde Denklem (34) ve Denklem (35)'de görüldüğü gibi tanımlanmıştır.

$$\tau_{\theta z} = c_{14}[r, z] \varepsilon_r + c_{24}[r, z] \varepsilon_\theta + c_{34}[r, z] \varepsilon_z + c_{44}[r, z] \gamma_{z\theta} + c_{45}[r, z] \gamma_{rz} + c_{46}[r, z] \gamma_{r\theta} \quad (34)$$

$$\tau_{r\theta} = c_{16}[r, z] \varepsilon_r + c_{26}[r, z] \varepsilon_\theta + c_{36}[r, z] \varepsilon_z + c_{46}[r, z] \gamma_{z\theta} + c_{56}[r, z] \gamma_{rz} + c_{66}[r, z] \gamma_{r\theta} \quad (35)$$

Burada onbir birbirlerinden bağımsız elastik sabit  $C_{ijkl}$  veya  $C_{ML}$  indeks notasyonunda görülmektedir.

Bu ifadeleri, birim şekil değiştirme - yerdeğiştirme tanımlamalarını'da kullanarak (EK-A) denge denklemlerinde yerine koyduğumuzda aşağıdaki Denklem (36) elde edilir. Daha önce burulma

yüklemeleri konusunda yapılan çalışmalarda,  $\varepsilon_z, \varepsilon_r, \gamma_{rz}$  birim şekil değiştirme ifadeleri denklemlere izotropik yapının özelliği ve yüzeylerin burulma yüklemesinden sonra yine düzlemsel kalacağı kabulü ile çarpılmanın olmaması nedeniyle dahil edilmemiştir.

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{r} \frac{\partial C_{24}[r, z]}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_{26}[r, z]}{\partial r} + \frac{C_{26}[r, z]}{r^2} \right) \frac{\phi(r, z)}{\cosh(kz)} + \\ & \left( \frac{\partial C_{14}[r, z]}{\partial z} + \frac{\partial C_{16}[r, z]}{\partial r} + \frac{2C_{16}[r, z]}{r} + \frac{C_{26}[r, z]}{r} \right) \\ & \cdot \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r} \frac{1}{\cosh(kz)} + \\ & \left( \frac{\partial C_{45}[r, z]}{\partial z} + \frac{\partial C_{56}[r, z]}{\partial r} + \frac{2C_{56}[r, z]}{r} + \frac{C_{24}[r, z]}{r} \right) \\ & \cdot \left( \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial z} - k \tanh(kz) \phi(r, z) \right) \cdot \frac{1}{\cosh(kz)} \\ & + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial C_{46}[r, z]}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_{66}[r, z]}{\partial r} + \frac{C_{66}[r, z]}{r^2} \right) \times 0 \\ & + \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial C_{46}[r, z]}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial C_{66}[r, z]}{\partial r} - \frac{C_{66}[r, z]}{r^2} \right) \frac{\phi(r, z)}{\cosh(kz)} \\ & + \left( \frac{\partial C_{46}[r, z]}{\partial z} + \frac{\partial C_{66}[r, z]}{\partial r} + \frac{C_{66}[r, z]}{r} \right) \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r} \frac{1}{\cosh(kz)} \\ & + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial C_{24}[r, z]}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_{26}[r, z]}{\partial r} + \frac{C_{26}[r, z]}{r^2} \right) \times 0 \\ & + \left( \frac{\partial C_{44}[r, z]}{\partial z} + \frac{\partial C_{46}[r, z]}{\partial r} + \frac{C_{46}[r, z]}{r} \right) \\ & \cdot \frac{1}{\cosh(kz)} \left[ \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial z} - k \tanh(kz) \phi(r, z) \right] \\ & + \left( \frac{\partial C_{45}[r, z]}{\partial z} + \frac{\partial C_{56}[r, z]}{\partial r} + \frac{2C_{56}[r, z]}{r} \right) \theta_0 \frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial r} + 0 \\ & + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial C_{44}[r, z]}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_{46}[r, z]}{\partial r} + \frac{C_{46}[r, z]}{r^2} \right) \theta_0 \frac{\partial \psi(r, z)}{\partial \theta} \\ & + \frac{C_{16}[r, z]}{\cosh(kz)} \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial r^2} + \frac{C_{45}[r, z]}{\cosh(kz)} \left( \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial z^2} \right. \\ & \left. - 2k \tanh(kz) \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial z} + (k^2 \tanh^2(kz) - k^2) \phi(r, z) \right) + \\ & \frac{C_{66}[r, z]}{\cosh(kz)} \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial r^2} + C_{56}[r, z] \theta_0 \frac{\partial^2 \psi(r, \theta)}{\partial r^2} \\ & + C_{34}[r, z] \times 0 + C_{66}[r, z] \times 0 + \frac{C_{44}[r, z]}{\cosh[r, z]} \left( \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial z^2} \right. \\ & \left. - 2k \tanh(kz) \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial z} + (k^2 \tanh^2(kz) - k^2) \phi(r, z) \right) + \\ & \frac{(C_{14}[r, z] + C_{56}[r, z])}{\cosh(kz)} \left( \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial r \partial z} - k \tanh(kz) \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r} \right) \\ & + \frac{C_{46}[r, z]}{r} \times 0 + \frac{C_{66}[r, z]}{r} \times 0 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2C_{46}[r, z]}{r \cosh(kz)} \left( \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial r \partial z} - k \tanh(kz) \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r} \right) \\ & + \frac{C_{24}[r, z]}{r} \times 0 + \frac{C_{26}[r, z]}{r} \times 0 + \frac{C_{46}[r, z]}{r} \theta_0 \frac{\partial^2 \psi(r, \theta)}{\partial r \partial \theta} \\ & + (C_{45}[r, z] + C_{36}[r, z]) \times 0 + \frac{C_{44}[r, z]}{r} \times 0 = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

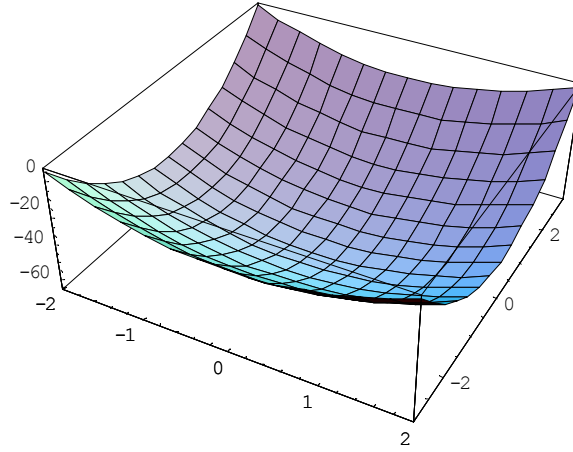
Burada  $\phi(r, z)$ ,  $\psi(r, \theta)$  sırasıyla gerilme ve burkulma fonksiyonlarıdır (EK-A, Denklem (A4-A6)). Denklem (36)'nın aşağıdaki formda yeniden yazılması ile genel bir ifade haline getirilmiştir (Konaklı [11]).

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r} (I) + \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial r^2} (II) + \phi(r, z) (III) + \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial z} (IV) \\ & + \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial z^2} (V) + \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial r \partial z} (VI) + \frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial r} (VII) \\ & + \frac{\partial^2 \psi(r, \theta)}{\partial r^2} (VIII) + \frac{\partial^2 \psi(r, \theta)}{\partial r \partial \theta} (IX) + \frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial \theta} (X) = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Denklem (37) içerisinde görülmekte olan (I), (II), (III), (IV), (V), (VI), ve (VII), (VIII), (IX), (X), parantezleri içerisindeki ifadelerin açık yazılışları Ek-A kısmında Denklemler (A9-A18) ile ekte verilmektedir. Uygun bir  $\phi(r, z)$  gerilme fonksiyonu seçebilmek için kabuller yapılmıştır (Denklem (38)). Örneğin, silindirin orta merkezinden geçen ve z-eksenine paralel kesit alındığı zaman oluşacağını beklediğimiz dikdörtgen alanların, bu eksen etrafında  $\theta = 360^\circ$  döndürülmesi ile oluşacak silindirlerin, yanal izotrop yapıyı oluşturan silindirik fiber ve matris katlı yapıyı oluşturduğu düşünülmüştür. Buna uygun olarak seçilen  $\phi(r, z)$  gerilme fonksiyonu aşağıdaki gibi olup, (Şekil 3) ileride açıklanmakta olan sınır şartlarını en uygun şekilde sağlamaktadır. Şekil 3'de parabolik  $\phi(r, z)$  fonksiyonun grafiği örnek olarak  $-2 \leq r \leq 2$  ve  $-3 \leq z \leq 3$  aralıklarında alınarak gösterilmiştir.

$$\phi(r, z) = K_1(r^2 - R^2) + K_2(z^2 - L^2) \quad (38)$$

Burada,  $K_1, K_2$  sabit çarpanlar,  $r, R$  iç ve dış yarıçap koordinatları,  $L$  ise çubuğun toplam uzunluğudur. Bu problemde uygulanmakta olan kompozit malzeme yanal izotropik malzeme olup, (38) denklemi ile tanımlanarak, ifadenin bütün yanal kesitlerde geçerli olduğu kabul edilmektedir. Veya diğer bir deyişle, her z kesitinde silindirik çubuğun dairesel kesitli yanal yüzeylerindeki  $r, \theta$  parametrelerine bağlı olan malzeme sabitlerinin hep aynı kalması beklenecektir. Bu malzemeye örnek olarak yüzey fiber eğrileri (yaş eğrileri) hep aynı kalan ağaç numuneleri gösterilebilir. Burulma probleminde, seçilen gerilme fonksiyonu  $\phi(r, z)$ , Denklem (39) ve Denklem (40) ile verilen sınır şartlarını sağlamalıdır. Bunlardan ilki, dış yüzey üzerinde  $\phi(R, z)$  fonksiyonunun sıfır veya sabit bir

Şekil 3. Gerilme  $\phi(r, z)$  fonksiyonunun yüzeysel grafiği

değere eşit olması şeklinde aşağıdaki gibi verilerek açıklanabilir.

$$r = \pm R \quad ; \quad \phi = 0 \quad (39)$$

$$z = \pm L \quad ; \quad \phi = 0 \quad (40)$$

Ayrıca bunlara ek olarak, biharmonik denklemin silindirik koordinatlardaki aşağıdaki ifadesinin sağlanması ana şartlardan biridir.

$$\nabla^4 \phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\nabla^2 \phi) = 0 \quad (41)$$

Bunlarla beraber, yukarıda  $\phi(r, z)$  ve  $\psi(r, \theta)$  fonksiyonlarının cinsinden görülmekte olan (37) numaralı denklem parçalanarak  $r, \theta, z$  üç geometrik parametre cinsinden, üç tane bağımsız (uncoupled) diferansiyel denklemler grubu formunda oluşturulmuştur. Örneğin;  $F(r, \theta, z) = F_1(r) + F_2(\theta) + F_3(z)$  formundaki bu fonksiyona benzer bir ifade, gruplandırılarak görülmüş olacaktır. Böylece, bu çalışmada üç ayrı fonksiyon birbirlerinden lineer bağımsız olarak çözülebilir hale getirilmiştir. Şekil 3'den de görüldüğü gibi  $\phi(r, z)$  fonksiyonu ikinci derece parabolik bir yüzey oluşturmaktadır. Bu eğri yüzey, çubuğun  $z$  eksenini boyunca  $r = 0$ 'dan kesit alınmasıyla elde edilen yüzey olup  $\theta = 0^\circ - 360^\circ$  açı aralığında silindir ana eksenini etrafında çevrilmesiyle katı silindir çubuğun malzeme dağılımına ait geometrik şeklini ifade etmektedir.  $r, \theta$  yüzeyinin en baştan dairesel kesit olarak alındığı belirtilmiştir. Eliptik kesitli çubukların, gerilme fonksiyonu Denklem (42) gibi olacaktır (Ugural [7]). Eliptik ve dairesel kesitli burulma problemindeki farkı, dairesel kesitli çubuklarda  $\psi(r, \theta)$  çarpılma fonksiyonunun doğrudan sıfıra eşit olması ile açıklanabilir.

$$\phi = c \left( \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 \right) \quad (42)$$

$$\nabla^2 \phi = -2G\theta \quad (43)$$

Çünkü dairesel kesitli çubuklar aksenal simetriye sahiptirler ve burulma sonucunda çarpılmazlar

( $\psi = 0$ ) (Ugural [7]). Denklem (42)'yi (43) denkleminde yerinde uygulayarak;

$$c \left( \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \right) = -2G\theta, \quad c = -G\theta \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \quad (44)$$

$c$  sabiti çözülmüştür. Daire kesitli çubuklarda,  $a=b$  olduğu için Denklem (44), aşağıdaki gibi olacaktır.

$$c = -G\theta \frac{a^4}{2a^2} = -G\theta \frac{a^2}{2} \quad (45)$$

Bu denklemi kutupsal koordinatlarda yazabilmek için aşağıdaki işlemler gerçekleştirilmiştir.

$$r = a; \quad c = -G\theta \frac{a^2}{2} \quad (46)$$

Denklem (46) ve  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  eşitlikleri, Denklem (42)'de yerine yazılacak olursa,  $\phi(r, z)$  gerilme fonksiyonu;

$$\begin{aligned} \phi(r, z) &= -\frac{G\theta a^2}{2} \left( \frac{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}{a^2} \right) \\ &= -\frac{G\theta}{2} (r^2 - a^2) \end{aligned} \quad (47)$$

formunda görülecektir. Burulma probleminde, (43) eşitliğinin ( $\nabla^2 \phi = -2G\theta$ ) sağlanması gerektiğinden, yukarıda açıklanan ifadelerin kullanılması ile  $2K_1 = -2G\theta$  olması gerektiği görülür. Denklem (37)'nin yukarıda açıklandığı üzere, birbirinden bağımsız üç denklem grubuna ayrılması gerektiği düşünülerek,  $\phi(r, z)$  ve  $\psi(r, \theta)$  fonksiyonları  $r, \theta, z$  parametreleri cinslerinden ayrı ayrı gruplandırılarak ayrılmıştır.

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 2rK; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 2zK; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 2K; ;$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 2K; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} = 0 \quad (48)$$

$$\frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r} (I) + \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial r^2} (II) + \phi(r, z) (III) \quad (49)$$

$$+ \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial z} (IV) + \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial z^2} (V) + \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial r \partial z} (VI) = 0$$

$$\frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r}(I) + \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial r^2}(II) + \phi(r, z)(III) = 0 \quad (50)$$

$$\frac{\partial \phi(r, z)}{\partial z}(IV) + \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial z^2}(V) + \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial r \partial z}(VI) = 0 \quad (51)$$

Böylece, (38) ve (48) denklemleri, (50) ve (51) numaralı denklemin içerisinde uygulanarak, aşağıda verilen iki ana grup denklem, yeni  $K_1, K_2, K$  veya  $C_1, C_2$  sabitleri cinsinden aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

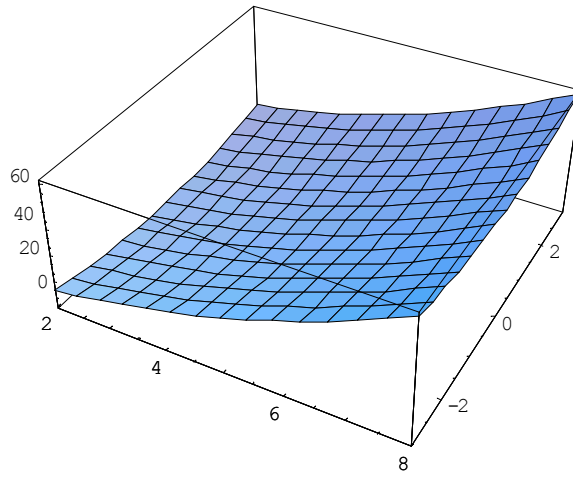
$$(r^2 - R^2)(III) + 2r(I) + 2(II) = K_1 / K = C_1 \quad (52)$$

$$(z^2 - L^2)(III) + 2z(IV) + 2(V) = K_2 / K = C_2 \quad (53)$$

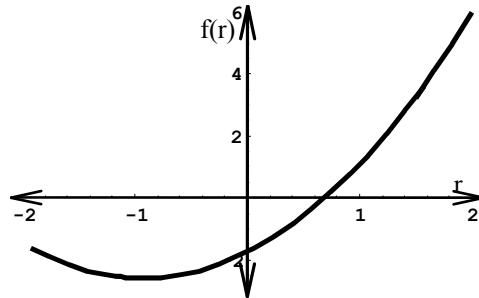
Bu denklemlerin elde edilmesiyle, yüzey fonksiyonlarına ait grafikler çizilerek, kayma modülünün

malzeme sabitlerinin her noktadaki belirli yönlü doğrultularında tanımlaması sağlanmıştır. Örnek olarak çizilen Şekil 5 ve Şekil 6'daki iki grafiğin birleştirilmesiyle üç boyutlu görüntüsü olan Şekil 3 kolaylıkla oluşturulabilir. Üç boyutlu uygulamaya diğer bir örnek,  $2 \leq r \leq 8, -3 \leq z \leq 3$  aralığında çizilen  $\phi(r, z) = r^2 - (2)^2 + z^2 - (3)^2$  gerilme fonksiyonunun,  $C_1 = C_2 = 1$  olarak seçilmesi ile Şekil 4 ile verilmektedir.

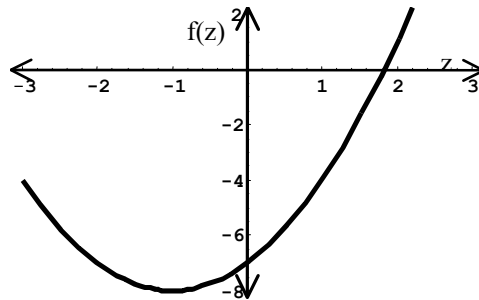
Gruplanan denklemlerden  $\psi(r, \theta)$  çarpılma fonksiyonuna ait olan diferansiyel denklem, Denklem (54)'de görüldüğü gibi tanımlıdır.



**Şekil 4.**  $\phi(r, z) = K_1(r^2 - R^2) + K_2(z^2 - L^2)$  gerilme fonksiyonunun  $2 \leq r \leq 8, -3 \leq z \leq 3$  aralığında üç boyutlu dağılım grafiği



**Şekil 5.**  $f(r) = r^2 + 2r - 2$  fonksiyonunun kompozit malzeme değişiminin r-radyal yönde grafiksel tanımlaması



**Şekil 6.**  $f(z) = z^2 + 2z - 7$  fonksiyonunun kompozit malzemenin değişimi anlamında z eksenini boyunca grafiksel tanımlaması



$$\frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial r} (VII) + \frac{\partial^2 \psi(r, \theta)}{\partial r^2} (VIII) + \frac{\partial^2 \psi(r, \theta)}{\partial r \partial \theta} (IX) + \frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial \theta} (X) = 0$$

$$\tau_{\theta z} = c_{14} \left( \frac{2rK_1}{\cosh(kz)} \right) + c_{24} \left( -\frac{K_1(r^2 - R^2) + K_2(z^2 - L^2)}{r \cosh(kz)} \right) + c_{44} \left[ \left( \frac{1}{\cosh(kz)} \right) (2K_2z - k \tanh(kz)(K_1(r^2 - R^2) + K_2(z^2 - L^2)) + \frac{1}{r} \theta_0 \frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial \theta} \right] \quad (55)$$

$$+ c_{45} \left[ \frac{1}{\cosh(kz)} [2K_2z - k \tanh(kz) [K_1(r^2 - R^2) + K_2(z^2 - L^2)]] + \theta_0 \frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial r} \right] + c_{46} \left[ \frac{2rK_1}{\cosh(kz)} - \frac{K_1(r^2 - R^2) + K_2(z^2 - L^2)}{r \cosh(kz)} \right] \tau_{r\theta} = c_{16} \left( \frac{2rK_1}{\cosh(kz)} \right) + c_{36} \left( \frac{K_1(r^2 - R^2) + K_2(z^2 - L^2)}{r \cosh(kz)} \right) + c_{46} \left[ \left( \frac{1}{\cosh(kz)} \right) (2K_2z - k \tanh(kz)(K_1(r^2 - R^2) + K_2(z^2 - L^2)) + \frac{1}{r} \theta_0 \frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial \theta} \right] + c_{56} \left[ \frac{1}{\cosh(kz)} [2K_2z - k \tanh(kz) [K_1(r^2 - R^2) + K_2(z^2 - L^2)]] + \theta_0 \frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial r} \right] + c_{66} \left[ \frac{2rK_1}{\cosh(kz)} - \frac{K_1(r^2 - R^2) + K_2(z^2 - L^2)}{r \cosh(kz)} \right] \quad (56)$$

Gerilme-birim deformasyon ifadeleri, Denklemler (55) ve (56) ile  $\cosh(kz)$  ve  $\tanh(kz)$  cinsinden tanımlanmıştır.

## 5. SONUÇLAR

Homojen olmayan malzemelerin üzerinde uygulanmakta olan standart kayma ve burulma testleri yalnızca ortalama ve yaklaşık  $E, G$  elastik sabit değerleri vermektedir ve bu nedenle de ortalama bir kayma modülü değeri olduğu kabul edilmektedir. Çünkü bu konuda yapılmakta olan testlerde, ortalama kayma modülünün test numunesinin geometrisine ve testin çeşidine (çekme/burulma/ kayma) bağlı olduğu bilinmektedir. Dünyada yapılan bu konudaki analitik çalışmalarda ince cidarlı tüplerin değişik geometrileri için denklemler ortalama değerleri verecek şekilde

çıkartılmıştır (Stokes [1,4]). Ayrıca bu çalışmalarda elde edilen formülasyonları da gruplamak gerekmektedir. Örneğin, *i*) koordinat bağımlı noktasal değerlere göre değişiklik gösteren, ortalama kayma modülü formülasyonları  $G(x, y)$ , *ii*) fiber yapılu yanal izotrop yapıya sahip kompozitler için tanımlamalar (Ergüven [10]), *iii*) fiber kompozit problem tanımlamalarına bağlı çözümler (Johnson [16], Ting [17], Martynovich [18], Kardomateas [19], Zidi [20], Senitskii [21], Reissner [22], Chui ve Smith [23]) olarak gruplandırılarak özetlenebilir. Bu çalışmada, elastisite matrisinde ve burulma yüklemesini tanımlamakta olan elastik sabitlerin içerisinde bulunduğu gerilme-birim şekil değiştirme ve denge denklemlerinde sırasıyla uygulanmasıyla, genel kayma modülü formülasyonları çıkarılmıştır. Böylece, yanal izotrop yapıdaki elyaf takviyeli kompozit malzemeden yapılmış rijit silindirik burulma çubuk kesitlerinde oluşmakta olan gerilme dağılımlarına, daha doğru bir yaklaşımla ulaşılabilirlik sağlanmış olmaktadır. İleride yapılacak ek sayısal ve deneysel çalışmalarla, yeniden oluşturulmuş olan  $\tau_{\theta z}(r, \theta, z)$ ,  $\tau_{r\theta}(r, \theta, z)$  denklemleri, çubuk kesitlerinde koordinat tanımlı olarak verebilecektir.

## KAYNAKLAR

1. Stokes, V.K., "Design with Nonhomogeneous Materials-Part II: Torsion of Thin-Walled Prismatic Bars", **ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design**, Vol.109., 87-91, 1987.
2. Birlik, G., **Solid Mechanics Courses I-II, Undergraduate Lecture Notes**, Eng. Sci. Dept., METU, Ankara, 1984.
3. Yaraşık, C.A., **Torsional Elasticity Formulations for Deformation of Nonhomogeneous Bars and Literature Survey on Composite Type Beams and Plates**, Graduation Project, G.U. Mech. Eng. Dept., Ankara, 2001.
4. Stokes, V.K., "Design with Nonhomogeneous Materials-Part I: Pure Bending of Prismatic Bars", **ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design**, Vol.108., 82-86, 1987.
5. Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., **Theory of Elasticity**, 3<sup>rd</sup>. Ed., McGraw-Hill, New York, 291-297, 1970.
6. Oden, J.T., and Ripperger, E.A., **Mechanics of Elastic Structures**, 2<sup>nd</sup> ed., McGraw-Hill, New York, 1980.
7. Ugural, A.C., Fenster, S.K., **Advanced Strength and Applied Elasticity**, 3<sup>rd</sup>.Ed., Prentice Hall., PTR, New Jersey, 1999.
8. Coulomb, **Histoire de l'Academie**, 1784, 229-269, Paris, 1787.

9. Navier, **Ressume des Leçons sur l'Application de la Mécanique**, 3<sup>rd</sup>.Ed., Paris, Edited by Saint-Venant, 1864.
10. Ergüven, M.E., "Torsion of a Nonhomogeneous transversely isotropic half-space", **Lett. App. Engng. Sci.**, 20(5), 675-679, 1982.
11. Konaklı, S., **Burulma Yüklemesi Altındaki Yanal-İzotrop Malzemeden Yapılmış Dairesel Kesitli Çubuklarda Kayma Modülünün Matematiksel Modellemesi**, Gazi Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara, Temmuz, 2003.
12. Granino, A.K., Theresa, M.K., **Mathematical Handbook for Scientists and Engineers**, 2<sup>nd</sup> Ed., Mc-Graw Hill, New York, 236-237, 1968.
13. Hildebrand, F.B., **Advanced Calculus for Applications**, 2<sup>nd</sup> Ed, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
14. Spiegel, M.R., **Matematik Formülleri Tabloları El Kitabı**, Bilim Teknik Yayınevi, Eskişehir, 1968.
15. Gibson, R.F., **Principles of Composite Material Mechanics**, McGraw-Hill Inc., Singapore, 1994.
16. Johnson, A.F., "Bending and Torsion of Anisotropic Beams", **Int.J.Solids Structures**, Vol.9, 527-551, 1973.
17. Ting, T.C.T., "Pressuring Shearing Torsion and Extension of a Circular Tube or Bar of Cylindrically Anisotropic Material", **Proc. R. Soc. Lond. A**, Vol.452, 2397-2421, 1996.
18. Martynovich, B.T., Martynovich, T.L., "Use of Integral Equations in the Solution of Problems of Torsion of Rectilinear-Anisotropic Rods", **Izv. AN SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela**, Vol.19, No.2, 112-118, Allerton Press, 1984.
19. Kardomateas, G.A., "Theory of Elasticity of Filament Wound Anisotropic Ellipsoids with Specialization to Torsion of Orthotropic Bars", **Journal of Applied Mechanics**, Vol.55, 837-844, 1988.
20. Zidi, M., "Finite Torsion and Shearing of a Compressible and Anisotropic Tube", **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Vol.35,1115-1126, 2000.
21. Senitskii, Y.E., "Dynamic Torsion of a Finite Anisotropic Cylindrical Layer", **Kuibyshev Civil Engineerin Institute, Prikladnay Mekhanika**, Vol.21, No.6, 11-17, 1985.
22. Reissner, E., "On a One-Dimensional Theory of Finite Torsion and Flexure of Anisotropic Elastic Plates", **Journal of Applied Mechanics**, Vol.48,601-605, 1981.
23. Li, D.B., Chui, Y.H., Smith, I., "A Vibration-Based Method for Determining St.Venant Torsional and Warping Stiffnesses of Members with Open Cross-Sections", **American Society for Testing and Materials**", 141-144, 1995.

## EK-A

Üç parametre için kabuk-merkez (skin-core) modelde, ince cidarlı shaftın, burulma yüklemesi altındaki analizinde G kayma modülünün et kalınlığıyla orantılı olarak ve çevrimsel yönde değiştiği kabul edilmektedir.

Silindirik kabuklu yapının yarıçap koordinatına bağlı ortalama kayma modülü formülleri aşağıdakilerdir;

$$G_r = G_s \left[ 1 - \frac{1-\beta}{1+r} \sum_{m=0}^r \eta_1^{r-m} \eta_2^m \right], \quad r = 0,1,2,\dots \quad (A1)$$

$G=G_c$  için  $0 \leq \eta \leq 1 - \eta_0$  ve  $G=G_s$  için  $1 - \eta_0 \leq \eta \leq 1$

$$G_r = G_s \left[ 1 - (1-\beta)(1-\eta_0)^r \right], \quad r = 0,1,2,\dots, \quad \beta = G_c / G_s \quad (A2)$$

Silindirik koordinatlarda denge denklemleri;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (A3)$$

Burulmada yer değiştirme alan tanımlamaları;

$$u(r, z) = \frac{\phi(r, z)}{\cosh(kz)} = \phi(r, z) \sec h(kz) \quad (\text{A4})$$

$$v(r, z) = \frac{\phi(r, z)}{\cosh(kz)} = \phi(r, z) \sec h(kz) \quad (\text{A5})$$

$$w(r, z) = \theta_0 \psi(r, \theta) \quad (\text{A6})$$

Genel birim şekil değiştirme-yerdeğiştirme ifadeleri;

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}, \\ \gamma_{z\theta} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

Yanal-ortotropik fiber-kompozit bünye denklemi;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11}-C_{12})/2 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{A8})$$

Denklem (A8) ile verilen ifade  $\underline{\sigma} = \underline{C} \underline{\varepsilon}$  Hook kanununu ifade etmektedir.

$$\begin{aligned} \phi(r, z) \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial C_{24}[r, z]}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_{26}[r, z]}{\partial r} + \frac{C_{26}[r, z]}{r^2} \right) \frac{1}{\cosh(kz)} + \right. \\ \left. \left( \frac{\partial C_{45}[r, z]}{\partial z} + \frac{\partial C_{56}[r, z]}{\partial r} + \frac{2C_{56}[r, z]}{r} + \frac{C_{24}[r, z]}{r} \right) \frac{(-k \tanh(kz))}{\cosh(kz)} + \right. \\ \text{(I) : } \left. \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial C_{46}[r, z]}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial C_{66}[r, z]}{\partial r} - \frac{C_{66}[r, z]}{r^2} \right) \frac{1}{\cosh(kz)} + \right. \\ \left. \left( \frac{\partial C_{44}[r, z]}{\partial z} + \frac{\partial C_{46}[r, z]}{\partial r} + \frac{C_{46}[r, z]}{r} \right) \frac{(-k \tanh(kz))}{\cosh(kz)} + \right. \\ \left. C_{45}[r, z] \frac{(k^2 \tanh^2(kz) - k^2)}{\cosh(kz)} + C_{44}[r, z] \frac{(k^2 \tanh^2(kz) - k^2)}{\cosh(kz)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r} \left[ \left( \frac{\partial C_{14}[r, z]}{\partial z} + \frac{\partial C_{16}[r, z]}{\partial r} + \frac{2C_{16}[r, z]}{r} + \frac{C_{26}[r, z]}{r} \right) \frac{1}{\cosh(kz)} + \right. \\ \text{(II) : } \left. \left( \frac{\partial C_{46}[r, z]}{\partial z} + \frac{\partial C_{66}[r, z]}{\partial r} + \frac{C_{66}[r, z]}{r} \right) \frac{1}{\cosh(kz)} + \right. \\ \left. (C_{14}[r, z] + C_{56}[r, z]) \frac{(-k \tanh(kz))}{\cosh(kz)} + \left( \frac{2C_{46}[r, z]}{r} \right) \frac{(-k \tanh(kz))}{\cosh(kz)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial C_{45}[r, z]}{\partial z} + \frac{\partial C_{56}[r, z]}{\partial r} + \frac{2C_{56}[r, z]}{r} + \frac{C_{24}[r, z]}{r} \right) \frac{1}{\cosh(kz)} + \right. \\ \text{(III) : } \left. \left( \frac{\partial C_{44}[r, z]}{\partial z} + \frac{\partial C_{46}[r, z]}{\partial r} + \frac{C_{46}[r, z]}{r} \right) \frac{1}{\cosh(kz)} + \right. \\ \left. C_{45}[r, z] \frac{(-2k \tanh(kz))}{\cosh(kz)} + C_{44}[r, z] \frac{(-2k \tanh(kz))}{\cosh(kz)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

$$(IV) : \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial r \partial z} \left[ (C_{14}[r, z] + C_{56}[r, z]) \frac{1}{\cosh(kz)} + \left( \frac{2C_{46}[r, z]}{r} \right) \frac{1}{\cosh(kz)} \right] \quad (A12)$$

$$(V) : \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial r^2} \left[ \frac{C_{16}[r, z]}{\cosh(kz)} + \frac{C_{66}[r, z]}{\cosh(kz)} \right] \quad (A13)$$

$$(VI) : \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial z^2} \left[ \frac{C_{45}[r, z]}{\cosh(kz)} + \frac{C_{44}[r, z]}{\cosh(kz)} \right] \quad (A14)$$

$$(VII) : \theta_0 \frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial r} \left( \frac{\partial C_{45}[r, z]}{\partial z} + \frac{\partial C_{56}[r, z]}{\partial r} + \frac{2C_{56}[r, z]}{r} \right) \quad (A15)$$

$$(VIII) : \theta_0 \frac{\partial^2 \psi(r, \theta)}{\partial r^2} (C_{56}[r, z]) \quad (A16)$$

$$(IX) : \theta_0 \frac{\partial \psi(r, \theta)}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial C_{44}[r, z]}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_{46}[r, z]}{\partial r} + \frac{C_{46}[r, z]}{r^2} \right) \quad (A17)$$

$$(X) : \theta_0 \frac{\partial^2 \psi(r, \theta)}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{C_{46}[r, z]}{r} \right) \quad (A18)$$