

# DİŞDİBİ GERİLMELERİNİN ANALİZİ İÇİN DÜZ DİŞLİ ÇARKLARIN SONLU ELEMAN MODELLENMESİ

**M. Cüneyt FETVACI ve C. Erdem İMRAK**

İstanbul Teknik Üniversitesi, Makina Fakültesi, 34439, İstanbul, [fetvacic@itu.edu.tr](mailto:fetvacic@itu.edu.tr)

## ÖZET

Modellemede sağladığı kolaylıklar sonlu elemanlar metodunun dişli çarkların gerilme analizinde kullanılmasını sağlamıştır. Bu çalışmada, düz dişli çarkların temas simülasyonu için sonlu elemanlar modellenmesinde dikkat edilmesi gereken hususlar hakkında bilgi verilmiştir. Kavramadaki dişli çiftindeki dişdibi gerilmelerinin incelenmesine imkan sağlayan dişli çark sonlu eleman modeli elde edilmiş ve literatürdeki modellerle karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Dişli çark, sonlu elemanlar, gerilme analizi, dişdibi gerilmeleri, modelleme.

## FINITE ELEMENT MODELING OF SPUR GEARS FOR ANALYSING TOOTH BENDING STRESSES

### ABSTRACT

The facilities of finite element method in modeling provide to apply in the analysis of the gear tooth stresses. In this study, what should be taken into consideration for establishing the proper finite element model of spur gear for contact simulation. Finite element model of gear tooth that allows the examination of tooth root stress of a gear pair during engagement is established and compared with other models given in literature.

**Keywords:** Gears, Finite Elements, stress analysis, root stresses, modeling.

### 1. GİRİŞ

Mekanik gücün naklinde mühendislik ve maliyet avantajlarını bir arada sunan dişli çarklar, saat mekanizmaları gibi hassas cihazlardan, otomobil ve uçak-uzay teknolojisine kadar geniş bir alanda kullanılmaktadır. Son yıllarda mühendislik teknolojisindeki gelişmelere paralel olarak yüksek hızlarda çalışan ve daha fazla yük taşıyan dişli çarklara ihtiyaç artmaktadır. Yük taşıyan dişin kökündeki meydana gelen eğilme gerilmeleri, bu ihtiyacın karşılanmasında engel teşkil eden faktörlerden biridir. Bu gerilmelerinin bilinmesi, dizayn aşamasında dişli hasarına karşı önlem alınması ve yük taşıma kapasitesinin artırılması bakımından önem arz etmektedir. Dişli çarkların endüstride yaygın kullanılmaya başlamasından itibaren çeşitli analitik ve deneysel metodlarla gerilmeler incelenmektedir. Bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişmelere paralel olarak, çeşitli parametrelerin etkilerinin hızlı ve tatminkar bir şekilde incelenmesine olanak sağlayan sayısal metodlar, dişli

çarkların gerilme analizinde tercih edilmektedir. Konform tasvir, sonlu eleman ve sınır eleman metodları dişli çark analizinde kullanılan sayısal tekniklerdir.

Sonlu elemanlar metodu, kullanıcı dostu paket programların sağladığı kolaylıklar ile analizlerde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu metodda, problem geometrisi birbirine bağlı sonlu sayıda elemanlar topluluğu ile ifade edilmekte, sınır şartlarının uygulanarak çözümlene neticesinde gerçek yapının fiziksel davranışı simüle edilmektedir. Modellemenin ilk adımı olan diş geometrisinin elde edilmesi, dişli çark imalatının bilgisayar simülasyonu ile sağlanmaktadır. Dişli imalatı kesici takım ile ham dişlinin izafi hareketleri neticesinde gerçekleşmektedir. Dişli profilini tayin eden analitik ifadeler, dişli çarkların tasarımı için programlama ve modelleme ile ilgili çalışmalar literatürde mevcuttur [1-11].

Sonlu elemanlar metodunun dişli çarklara uygulanması çoğunlukla dişdibi gerilmelerine statik

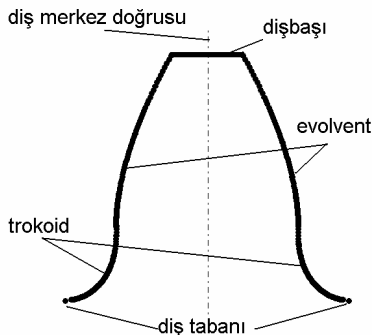
2-boyutlu yaklaşım şeklindedir [12]. Wilcox ve Coleman [13], bu konuda öncü olan çalışmalarında, sonlu eleman metodunu (SEM) dişdibi gerilmelerini analiz etmek için dişli çarka uygulamışlardır. Analiz neticesinde simetrik ve simetrik olmayan diş profilleri için dişdibi gerilmeleri hesaplanmıştır. Çalışmada iki boyutlu dişli çark sonlu eleman modelini tesisinde göz önüne alınan hususlar belirtilmiştir.

Chabert ve arkadaşları [14] tatminkar doğrulukta netice veren dişli çark sonlu elemanlar modelinin diş sayısı ve göbek derinliğini tayin etmişler ve kurdukları modelle gerçekleştirdikleri analizler neticesinde dişdibi gerilmeyi hesaplayan bir ifade tesis etmişlerdir. Tobe ve arkadaşları [15], geliştirdikleri sonlu eleman modeli ile dişteki gerilmeyi ve yükleme noktasındaki şekil değişimini incelemişlerdir.

Bu çalışmada düz dişli çarkın sonlu eleman modelinin tesisi ele alınmıştır. Kremayer takımla dişli çark imalatını simüle eden parametrik ifadeler kullanılarak diş profili elde edilmiştir. Bu profil, ANSYS® genel amaçlı sonlu eleman analiz paket programına aktarılarak dişlinin sonlu elemanlar modeli oluşturulmuştur. Modelin tesisinde takip edilen adımlar izah edilmiştir.

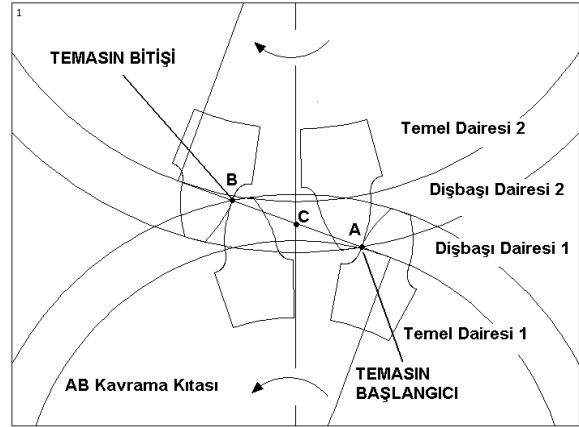
## 2. DİŞLİ ÇARK GEOMETRİSİ

Geometrik olarak incelendiğinde dişli çarkın farklı eğrilerden oluştuğu görülmektedir. Diş geometrisi Şekil 1'de görüldüğü gibi dişbaşında ve diş tabanında konsantrik daire yayları, diş yan yüzeylerinde evolvent eğrileri ve diş yan yüzeylerini diş dibi dairesine bağlayan bölgede trokoid eğrileri ile uzayda belirlenmektedir. Kesici takımın geometrisi diş profilini tayin etmektedir. Standart kesici takım ISO53 normuna göre seçilmiştir [16]. Trokoidal kök eğrisini ve evolvent profili tayin eden ifadeler dişli çarkların analitik mekaniğinden elde edilmektedir [5].



Şekil 1. Düz dişli çark geometrisi

Düz dişli çifti kavramaya girmesi hali ve temel kavramlar Şekil 2'de gösterilmiştir. Kavrama kütası [AB] yaklaşma ve uzaklaşma mesafelerine bağlı olarak 6 parçaya bölünmüştür. Dişli çiftinin kavramaya girmesinden yuvarlanma noktasındaki



Şekil 2. Kavrama şeması

temas haline kadar olan bölge [AC] yaklaşma bölgesi ve yuvarlanma noktasından [C] dişli çiftinin kavramadan çıkmasına kadar olan bölge [CB] ise uzaklaşma bölgesi olarak tanımlanmış olup, her bir bölge 3 eşit parçaya bölünmüştür. Bu noktalara karşılık gelen yarıçaplara göre evolvent profil oluşturulmuştur.

## 3. DİŞLİ ÇARK SONLU ELEMAN MODELLEME PRENSİPLERİ

Diş profilini tayin eden analitik ifadeler BASIC programlama lisanını kullanarak bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Bu program ANSYS® ortamında model tesisinde referans teşkil eden kontrol noktalarını formatlı olarak bir çıkış dosyasına yazdırmaktadır. Diğer bir çıkış dosyasına ise sonlu elemanlar modelinin tesisinde kolaylık sağlayan parametreler yazdırılmaktadır [9].

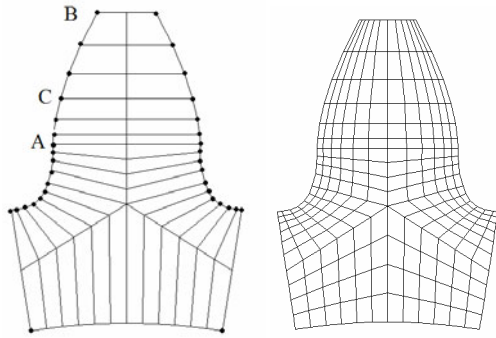
Düz dişli, radyal eksene (diş merkez doğrusu) göre simetrik olduğundan, diş formu genişlik doğrultusunda değişmediğinden ve teorik olarak diş genişliği boyunca kuvvet dağılımının düzgün olduğu kabul edilebildiğinden dişler iki boyutlu cisim olarak modellenebilir [17-19]. Malzeme homojen, isotropik ve Hook Kanuna göre elastiktir. Modellemede eleman tipi olarak 8-düğüm noktalı eşparametrik ikinci dereceden dörtgen eleman (PLANE82) kullanılmıştır. Bu tip elemanlar hesaplama etkinliği nedeniyle (sayısal integrasyon) sonlu eleman programlarında tercih edilir.

### 3.1. Modelinin Yaratılması

Dişlerin sonlu eleman ağı oluşturulmasında katı modellemeden faydalanılmaktadır. Elemanların geometrik şekil, sayı ve yoğunluğunu kontrol etmek için katı model çok sayıda bölgelerin topluluğu olarak tesis edilmiştir [20, 21]. Hesaplayıcı programın çıkış dosyasının ANSYS® önişlemci modülünde okunması ile profili tayin eden noktalar yaratılır. Noktalar çizgilerin tanımlanmasında kullanılmakta ve nihayet

yüzeyler çizgilerin uygun kombinasyonu ile oluşturulmaktadır.

Böylece sonlu eleman ağının yapısını tayin eden Şekil 3(a)'da görülen katı model yaratılmaktadır. Eleman sayısı ve yoğunluğunu belirleyen parametreler bölgelerin kenarlarına uygulanmaktadır. Bu işlemler tamamlandıktan sonra ağ oluşturma komutuyla dişli çark sonlu elemanlar modeli tesis edilmektedir. Yapıdaki gerilmenin hızla değiştiği bölgelerde eleman yoğunluğu yüksek tutulmuş, gerilmenin nispeten yavaş değiştiği bölgelerde ise eleman yoğunluğu düşük tutulmuştur. Bu iki bölge arasında eleman yoğunluğu tedrici olarak değişmektedir. Sonuç olarak sonlu elemanlar gerilme analizi için elde edilen dişin sonlu elemanlar modeli Şekil 3(b)'de gösterilmiştir.



(a) katı model (b) sonlu eleman modeli  
Şekil 3. Diş modelleri

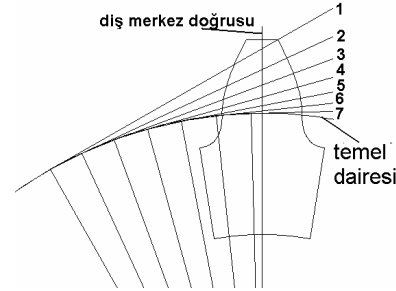
### 3.2. Sınır Şartları ve Çözüm Bölgesi

Sınır şartları statik ve kinematik olarak ikiye ayrılır. Kinematik sınır şartı diş sektörünün radyal kenarlarına ve tabanına tatbik edilen yer değiştirme kısıtlamalardır. Dişli çarkı modellerken modelin kaç dişten oluşacağını belirlemek en önemli husustur. Tüm dişleri ile modeli tesis etmek hesaplama süresi (maliyeti) nedeniyle tercih edilmez. Modellemeyi basitleştirmek ve hesaplama zamanını azaltmak için, dişli çarkı olduğu gibi modellemek yerine, bütün sınır şartları ve parametrelerin tanımlanmasına imkan sağlayan dişli sektörler göz önüne alınır [12].

Wilcox ve Coleman [13] ile Chabert ve arkadaşları [14] çalışmalarında modelleri tek bir dişten tesis etmişlerdir. Andrews [22] yükün tatbik edildiği dişin sağ ve soluna yarım diş ilavesi ile, bir tam diş ve iki yarım dişten oluşan model tesis etmiştir. Böylece dişdibi gerilmesini kinematik sınır şartının etkisinden muaf tutmuştur. Bahsedilen çalışmalarda, temas eden dişli çiftinin sadece pinyon dişi modellenmekte, diğer dişlinin etkisi pinyon modele temas kuvvetinin uygulanması ile simüle edilmektedir [23].

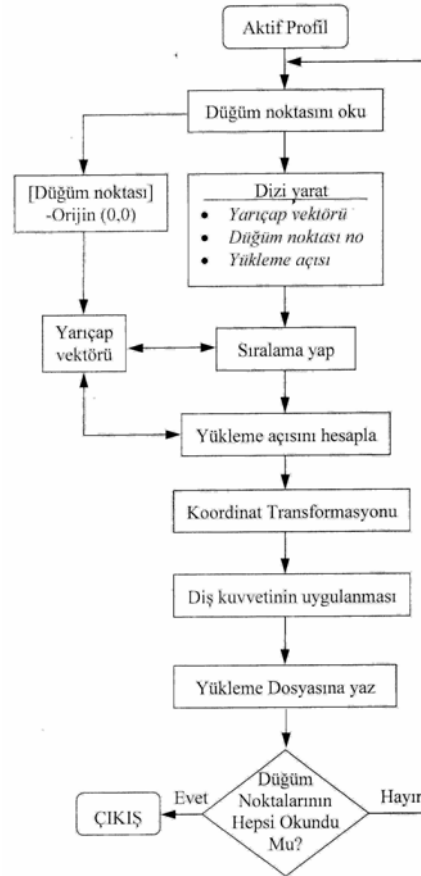
Statik sınır şartı diş kuvvetinin tatbik açısı, evolvent geometrisinden tayin edilmektedir. Kuvvetin radyal ve teğetsel bileşenleri bu açıya göre hesap edilerek tatbik edilir. Geometrik transformasyonlarla diş

kuvveti her noktada yüzeye normal doğrultuda da tatbik edilebilir. Kavramanın herhangi bir anında diş yükünün tatbik edilmesi Şekil 4'de gösterilmiştir.



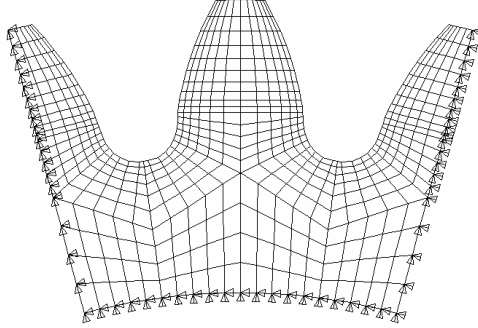
Şekil 4. Yük tatbik doğrultusu

Diş kuvvetinin diş ucuna tam değerinde tatbik edilmesi en kritik haldir. Gerçekte kavrama oranına bağlı olarak diş kuvveti, müteakip devreye giren dişli çifti ile paylaşılmaktadır. Dişler, yük paylaşımını sağlayacak hassasiyette imal edilmediği düşünülerek, diş kuvvetinin diş ucunda tam değerinde etki ettiği kabul edilmiştir. Bu nedenle diş dibinde azami gerilmeyi sağlayan yük tatbik noktası diş ucudur [19]. Dişli çark modellenmesinde kavrama çevriminin belirli noktalarında diş kuvvetinin modele sırasıyla uygulanması için Fetvacı tarafından ANSYS parametrik dizayn lisansı ile geliştirilen Şekil 5'de akış şeması görülen makro kullanılmıştır [9].



Şekil 5. Makro programın akış şeması

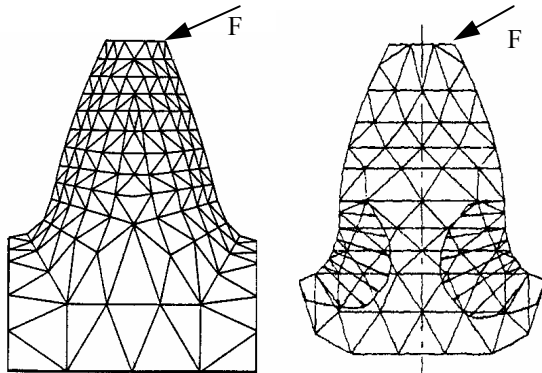
Andrews'ın teklif ettiği çözüm bölgesi esas alınarak, bu çalışmada Şekil 6'da görülen kinematik sınır şartları uygulanan dişli çark sonlu elemanlar modeli kullanılmıştır. Yük tatbik doğrultulardaki yüklenme açıları, 7 düğüm noktası için hesaplanmış, sırayla diş kuvveti uygulanmış ve çözülmüştür.



Şekil 6. Dişli çark sonlu eleman modeli

#### 4. DİŞLİ GERİLME ANALİZİ VE MODEL KARŞILAŞTIRMASI

Geliştirilen dişli çark sonlu eleman modeli, Chabert ve arkadaşları ile Tobe ve arkadaşları tarafından sunulan sonlu eleman modelleri (Şekil 7), diş sayısı 20 ile 40, kavrama açısı 20°, modül 3 mm ve nakledilen moment 38,2 Nm alınarak elde edilen gerilme analiz sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır [14,15].



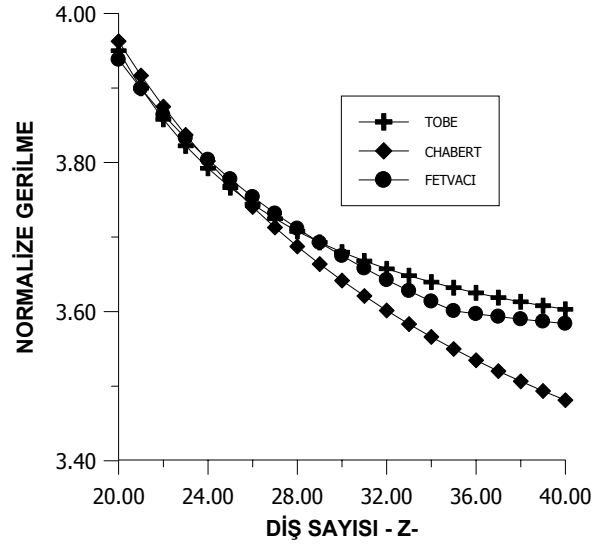
(a) Chabert ve arkadaşları (b) Tobe ve arkadaşları  
Şekil 7. Literatürde tesis edilmiş dişli modelleri

Normalize gerilme  $\sigma_N$ , çekme tarafındaki maksimum gerilme  $\sigma_T$ , diş kuvveti  $F$ , modül  $m$  ve  $b$  diş genişliğine bağlı olarak  $\sigma_N = \sigma_T / (F / b m)$  ifadesiyle verilmiştir.

Tablo 1. Çeşitli diş sayılarında gerilme değerleri

Diş sayısı	Diş kuvveti $F$ [N]	Maksimum Gerilme, $\sigma_T$ [N/mm <sup>2</sup> ]			Normalize Gerilme, $\sigma_N$ [N/mm <sup>2</sup> ]		
		Tobe'ye göre	Chabert'e göre	Geliştirilen model göre	Tobe'ye göre	Chabert'e göre	Geliştirilen model göre
20	1355,0530	1784,1530	1789,7990	1778,8610	3,95000	3,962500	3,938285
25	1084,0420	1360,9790	1362,2800	1365,0800	3,766400	3,770000	3,777749
30	903,3686	1108,021	1096,5890	1106,5700	3,679630	3,641667	3,674813
35	774,3160	937,4566	916,2739	929,4530	3,632070	3,550000	3,601061
40	677,5265	813,7375	786,2131	809,4144	3,603125	3,481250	3,583983

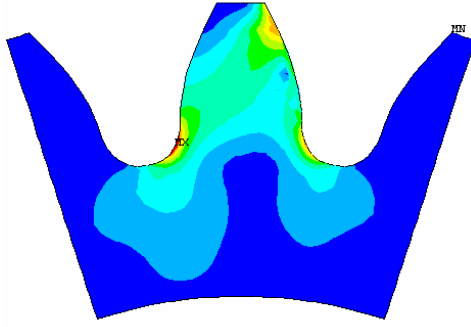
Çekme tarafındaki maksimum gerilme, diş kuvvetine göre normalize edilmiş değerler birim diş genişliği ( $b=1$ ) için Tablo 1'de ve Şekil 8'de gösterilmiştir.



Şekil 8. Dişli çark sonlu eleman modellerinin karşılaştırılması

Chabert'in modelinde çözüm bölgesine uygulanan sınır şartları kök bölgesine yakın olduğundan yerdeğıştirmeleri ve dolayısıyla gerilmeleri etkilemektedir. Çalışmada tesis edilen analitik ifade 12 ile 50 diş sayıları arasında güvenilir netice vermekte, yüksek diş sayılarında geçerli olmamaktadır. Diş sayısı yükseldikçe sınır şartlarının kök bölgesine yakınlığı artmaktadır. Bu nedenlerle yüksek diş sayılarında diğer modellerden belirgin bir şekilde düşük sayısal neticeler vermektedir. Bu çalışmada geliştirilen model, Tobe ve arkadaşlarının geliştirdiği model ile yakın neticeler vermiştir.

Deformasyonlar ve gerilmeler gerek sayısal tablolar gerekse renkli grafiksel dağılımlar şeklinde incelenebilmektedir. Şekil 9'da eşdeğer gerilmenin (Von Mises) yapıdaki değişimi gösterilmiştir. Renk dağılımının incelenmesinden önerilen diş modelinin bir tam diş ve 2 yarım diştten tesis edilmesinin hesaplama maliyeti ve tatminkar doğruluk için uygun olduğu anlaşılmaktadır."



Şekil 9. Diş modelinde Von Mises gerilme dağılımı

#### 4. SONUÇ

Sonlu elemanlar metodu modellemede sağladığı kolaylıklar ile dişli çarkların gerilme analizinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmada, diş dibi gerilmesinin analizi için sonlu eleman modellenmesinde takip edilen adımlar açıklanmış, geliştirilen model analiz edilmiş ve diğer araştırmacıların modelleri ile karşılaştırılmıştır. Geliştirilen model ile Tobe ve arkadaşlarının kullandığı modelle elde edilen neticelerle % 0.296 – 0.591 arasında değişen, Chabert ve arkadaşlarının kullandığı modelle elde edilen neticelerle % 0.611 – 2.951 arasında değişen farklar oluşmuştur. Tobe ve arkadaşlarının kullandığı eleman tipinden kaynaklanan fark kabul edilebilir miktardadır. Chabert ve arkadaşlarının kullandığı eleman tipinin formülasyonu ve sınır şartlarının çözüm bölgesine yakınlığı belirgin farklara neden olmuştur. Bu şekilde tek bir diştten oluşan model yerine, kök bölgesinin tamamen izole edildiği modellerin kullanılması yerinde olacaktır.

#### KAYNAKLAR

1. Buckingham, E., **Analytical Mechanics of Gears**, McGraw-Hill, New York, 1949.
2. Salamoun, C., Suchy, M., “Computation of Helical or Spur Gear Fillets,” **Mechanism and Machine Theory**, Vol.8, 305-323, 1973.
3. Hefeng, B., Savage, M., Knorr, R. J., “Computer Modelling of Rack Generated Spur Gears”, **Mechanism and Machine Theory**, Vol.20, No.4: 351-360, 1985.
4. Litvin, F.L., **Gear Geometry and Applied Theory**, PTR Prentice Hall, New Jersey, 1994.
5. Arıkan, M.A.S., “Determination of Maximum Possible Contact Ratios for Spur Gear Drives with Small Number of Teeth,” **ASME Design Eng. Technical Conferences**, 569-576, 1995.
6. Akkurt, M., Sevinç, A., “Bilgisayar Yardımıyla Dişli Profili Oluşturulması ve CAM için DXF ve IGES Formatına Veri Aktarılması”, **5. Ulusal Makina Tasarım ve İmalat Kongresi Bildiri Kitabı**, ODTÜ, Ankara, 63-70, 1992.
7. Akkurt, M., Engin, Ş., “Silindirik Helisel Dişli Çarkların Autocad ortamında ADS ile İnteraktif Tasarımı”, **6. Uluslararası Makina Tasarım ve İmalat Kongresi Bildiri Kitabı**, ODTÜ, Ankara, 463-471, 1994.
8. Karpat, F., Çavdar, K., F.C. Babalık, “Bilgisayar Yardımıyla Düz, Helisel, Konik ve Sonsuz Vida Dişli Mekanizmalarının Boyutlandırılması ve Analizi”, **Mühendis ve Makina**, Cilt 510, 26-32, 2002.
9. Fetvacı, M.C., “ANSYS Sonlu Elemanlar Analiz Programı ile Düz Dişli Çarkların Modellenmesi”, **Mühendis ve Makina**, Cilt 474, 41-44, 1999.
10. Rao, C.R.M., Muthuveerappan, G., “Finite Element Modelling and Stress Analysis of Helical Gear Teeth”, **Comp. & Str.**, Vol.49, No.6, 1095-1106, 1992.
11. Tsay, C.B., “Helical Gears with Involute Shaped Teeth”, **ASME J. of Mech. Design**, Vol.110, 482-491, 1988.
12. Sfakiotakis, V.G., Vaitsis, J.P., Anifantis, N.K., “Numerical Simulation of Conjugate Gear Action”, **Comp & Str.**, Vol.79, 1153-1160, 2001.
13. Wilcox, L., Coleman, W., “Application of Finite Elements to the Analysis of Gear Tooth Stresses”, **ASME J. of Eng. for Ind.**, 95: 1139-1148, 1973.
14. Chabert, G., Tran, T.D., Mathis, R., “An Evaluation of Stresses and Deflection of Spur Gear Teeth Under Strain”, **ASME J. of Eng. for Ind.**, Vol.96, 85-93, 1974.
15. Tobe, T., Kato, M., Inoue, K., “True Stress and Stiffness of Spur Gear Teeth”, **ASME Proc. of the 5th World Cong. on Theory of Machines & Mechanisms**, 1105-1108, 1979.
16. N.N, **ISO53, Cylindrical gears for general and heavy engineering-Basic Rack**, International Organization for Standardization, İsviçre, 1974.
17. Wilcox, L., “Finite Element Analysis Pinpoints Gear Tooth Stresses”, **Machine Design**, Vol.50, No.4, 88-92, 1978.
18. Akkurt, M., **Makina Elemanları Cilt 3 Dişli Çarklar**, Birsen Yayınevi, 1986.
19. Colbourne, J.R., **The Geometry of Involute Gears**, Springer-Verlag, New Jersey, 1987.
20. Barkah D., Shafiq B., Dooner D., “3-D Mesh Generation for Static Stress Determination in Spiral Noncircular Gear Used for Torque Balancing”, **ASME J. of Mech. Design**, Vol.124, 313-319, 2002.
21. Brauer, J., “Analytical Geometry of Straight Conical Involute Gears”, **Mechanisms and Machine Theory**, Vol.37, 127-141, 2002.
22. Andrews, J.D., “A Finite Element Analysis of Bending Stresses Induced in External and Internal Involute Spur Gears”, **J. of Strain Analysis**, Vol.26, 153-163, 1991.
23. Litvin, F.L., Lian, Q., Kapelevich, A.L., “Asymmetric Modified Spur Gear Drivers: Reduction of Noise, Localization of Contact, Simulation of Meshing and Stress Analysis”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol.188, 363-390, 2000.