

AÇISAL TEMASLI BİLYALI RULMANLARDA BİLYA TİTREŞİMLERİNİN İNCELENMESİ

Hakan ARSLAN* ve **Nizami AKTÜRK****

* Makina Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Kırıkkale Üniversitesi, 71450 Kırıkkale,
arslan71@yahoo.com

** Makina Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Gazi Üniversitesi, Maltepe 06570 Ankara,
nakturk@gazi.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada, sağlam ve kusurlu durumdaki bilyalı rulmanlardaki bilyaların titreşimini incelemek üzere bir şaft-rulman modeli geliştirilmiştir. Modelde şaft-rulman ikilisi kütle-yay sistemi olarak, bilyalar ise kütleli olarak kabul edilmiştir. Sistemin dinamik şartlar altında doğrusal olmayan bir davranış gösterdiği bilinmektedir. Buna göre şaft ve bilyalar için radyal yöndeki hareket denklemleri elde edilmiş ve bu denklemler geliştirilen bilgisayar programı yardımıyla farklı ön yükler için eş zamanlı olarak çözülmüştür. Simülasyon programından bulunan bu sonuçlar zaman ve frekans tanım bölgesinde incelenmiştir. Ön yük arttıkça bilyalar daha uzun süre yüklü bölgede kalarak daha fazla deformasyona uğramakta ve titreşim genlikleri artmaktadır. Frekans spektrumlarında frekans zirveleri, kafes frekansı ve katları, şaftın radyal yöndeki doğal frekansı ve bilyanın radyal yöndeki titreşim frekansında ortaya çıkmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Bilyalı rulman titreşimleri, bilyalı rulmanların dinamiği, açısız temaslı bilyalı rulman.

INVESTIGATION OF BALL VIBRATIONS IN ANGULAR CONTACT BALL BEARINGS

ABSTRACT

In this study, a shaft-bearing model is developed in order to investigate ball vibrations in case of defected and undefected ball bearings. In this model, shaft-bearing couple is considered as a mass-spring system and balls are massless. It is well known that the behavior of the system has a nonlinear character under dynamic conditions. In this case, equations of motions in radial direction were obtained for shaft and balls and these equations were solved for different preloads simultaneously by a developed computer program. The results obtained from the simulation program, were analyzed both in the time and the frequency domains. When preload increases, the balls deform more by staying longer in loaded region, and their vibration amplitudes increase. In frequency spectra frequency peaks, cage frequency and its harmonics, natural frequency of shaft in radial direction ball oscillation frequency in radial direction can be observed.

Keywords: Ball bearing vibrations, dynamics of ball bearing, angular contact ball bearing.

1. GİRİŞ

Rulmanlar makinaların vazgeçilmez parçaları olarak uzun süredir kullanılmaktadır. Dönen makina elemanlarındaki bozukluklar bütün endüstri dallarında gözle görülebilir bir üretim kaybına ve yüksek bakım-onarım masraflarına yol açmakta ve ayrıca çalışma zamanı açısından da büyük kayıplara sebep olmaktadır. Rulmanlarda imalat sırasında yüzeylerde üretim hataları, yanlış montaj ve işletme sırasında

değişik sebeplerden kaynaklanan hatalar oluşabilir. Bu hatalar rulmanın vazifesini yaparken sistemin titreşim yapmasına ve gürültüye, bazı durumlarda da işlevini tam olarak yerine getirememesine sebep olabilir [1].

Bilyalı rulmanlarla desteklenmiş olan bir milde hatalı çalışma hızları ve rulmanlar seçildiğinde titreşimler oldukça şiddetli olabilmektedir. Araştırmacılar bu titreşimleri dikkatli bir tasarımla önlemeye çalışmışlar

ve her tasarımdan sonra yeni tasarımlarının istedikleri gibi çalışıp çalışmadığına bakmışlardır. Deneyimlenme yönteminin maliyeti yüksek olduğu için, son yıllarda bu yöntemin alternatifini olarak simülasyon modeli kullanımına başlanmıştır. Bu şekilde tasarımın çalışıp çalışmayacağı tasarım aşamasında kontrol edilir ve sonuçlar deneysel çalışmayla da doğrulanabilir. Bu uygulama para ve zaman açısından da tasarruf sağlar.

1960'lı yıllardan itibaren güçlü bilgisayarların kullanılmaya başlamasıyla bilyalı rulmanların titreşim karakteristikleri üzerine çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda genellikle bilyalar kütsüz olarak modellenmiştir. Bazı araştırmacılar ise yaptıkları modellemede bilyaları kütsüz olarak almış fakat bilya titreşimlerini incelememişlerdir. Bu araştırmacılar, Gupta P. K. v.d. [2-6], küresel yuvarlanma elamanının iç bilezik etrafındaki hareketini altı serbestlik dereceli olarak modellemiştir. Modelde yuvarlanma elamanları kütsüz olarak kabul edilmiş ve yük-yer değiştirme etkisi Hertz tipi kabul etmişlerdir. Şaftın kütsüzünü değil de yuvarlanma elamanlarının kütsüzlerini göz önüne aldıklarından bilya ve bilya kafes etkileşimleri ile oluşan titreşimler üzerinde durmuşlardır. Yuvarlanma elamanları ve kafes arasındaki etkileri de hidrodinamik ve metalik temasları dikkate alarak modellemeye dahil etmişlerdir. Gad E. H. v.d. [7-9] yuvarlanma elamanı ve bilezikler arasındaki elastik ezilmeyi (Gupta P. K.'ya benzer bir yaklaşımla) modellemelerine karşın hidrodinamik yağlamayı ve yuvarlanma elamanının kütsüzünü hesaba katmamışlardır. Sürtünme kuvvetlerini de hesaba katmamış yuvarlanma elamanlarının hareketlerini 5 serbestlik dereceli olarak hesaplamışlardır.

Aktürk N. v.d. [10, 11] açısal temaslı iki rulman ile desteklenmiş şaft-rulman sisteminde sağlam ve bölgesel kusurlu rulmanlardan kaynaklanan eksenel ve radyal yöndeki titreşimleri incelemek için matematiksel bir model oluşturmuş modellemede bilyaları kütsüz olarak kabul etmiştir. Ayrıca bilya boyutundaki değişimin milin eksenel ve radyal titreşimlerine olan etkisini bu model yardımıyla incelemişlerdir. Datta J. ve Farhang K.[12] ise modelde yuvarlanma elamanı bilezik temasını eşit kütle yay sistemi ile göstermişler, temas deformasyonu ve bunun sonucunda oluşan kuvvetleri simüle etmek için sadece baskı yayı olarak ele almışlardır. Rulman makarası, iç ve dış bileziğin gerçek büyüklüklerine bağlı etkiler, iç ve dış bileziğin montajdan kaynaklanan eylemsizlikleri, bu bileziklere temas eden diğer dış sistem elemanlarının eylemsizliği gibi dış etkileri göz önüne alarak, rulmanın yapısal titreşimlerini incelemek üzere dinamik bir şaft-rulman modeli geliştirmişlerdir.

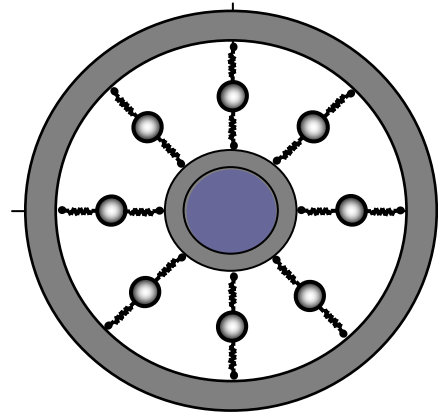
R. C. Meeks ve L. Tran [13] ise önemli kinematik, yapısal, dinamik ve yağlama etkilerini göz önünde

bulundurarak 3 boyutlu dinamik bir bilyalı rulman modeli geliştirmişlerdir. Bilya ve kafes dinamiğini analiz etmek için her türlü bilya, kafes ve bilezik malzemesi kombinasyonunu analiz edebilen bilya kafesi hareketlerinin 6 serbestlik dereceli modelini geliştirmişlerdir.

Bu çalışmada yapılan modellemede, şaft ve bilyaların kütle gibi, bileziklerin ise temas yayları gibi davrandığı varsayılmış ve bu modele göre sağlam rulman için bir simülasyon programı geliştirilmiştir. Simülasyon programı yardımıyla bilyaların zaman ve frekans ortamdaki titreşimleri elde edilmiştir.

2. SİSTEMİN MODELLENMESİ

Sistemin modellenmesinde şaft-rulman ikilisi kütle-yay sistemi olarak düşünülmüş ve ilave olarak bilyaların titreşimini incelemek için, bilyalar da kütsüz olarak kabul edilmiştir. Ayrıca modellemede Şekil 1'de görüldüğü gibi iç ve dış bilezik bilya yolları kütsüz lineer olmayan temas yayları ile gösterilmiştir.



Şekil 1. Bilyalı rulman için oluşturulan elastik m

Sistemin dinamik şartlar altında doğrusal olmayan bir davranış gösterdiği bilinmektedir. Bundan dolayı yerel Hertz temas teoremine göre bilya-bilya yolu arasındaki nokta teması yüklemesi durumunda yük ezilme arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi yazılabilir [18].

$$W = K \cdot \delta^{3/2} \quad (1)$$

Burada iç bilezik bilya temasındaki Rijitlik Katsayısı:

$$K_i = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)}{\left(\sum \rho_i\right)^{1/2}} \left(\frac{1}{\delta_i^*}\right)^{3/2} \quad (2)$$

Dış bilezik bilya temasındaki Rijitlik Katsayısı:

$$K_d = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)}{\left(\sum \rho_d\right)^{1/2}} \left(\frac{1}{\delta_d^*}\right)^{3/2} \quad (3)$$

ifadelerinden elde edilir [10]. Böylece yük-ezilme bağıntısı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$W = \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\left(\frac{E}{1-\nu^2} \right)}{\left(\sum \rho \right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{\delta^*} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \delta^{\frac{3}{2}} \quad (4)$$

Burada Boyutsuz ezilme miktarı (δ^*):

$$\delta^* = \frac{2\mathcal{N}}{\pi} \left(\frac{\pi}{2\mathcal{R}^2 \mathcal{I}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5)$$

şeklinde hesaplanır. Burada \mathcal{N} eliptik eksantriklik parametresi, \mathcal{N} ve \mathcal{I} ise tamamen eliptik integrallerdir. \mathcal{R} , bilyanın iç ve dış bilezikle olan temasına göre elips şeklinde oluşan izin a ve b boyutlarının oranıdır. Bu integrallerin nasıl hesaplanacağı [1] nolu referansta detaylı olarak anlatılmıştır.

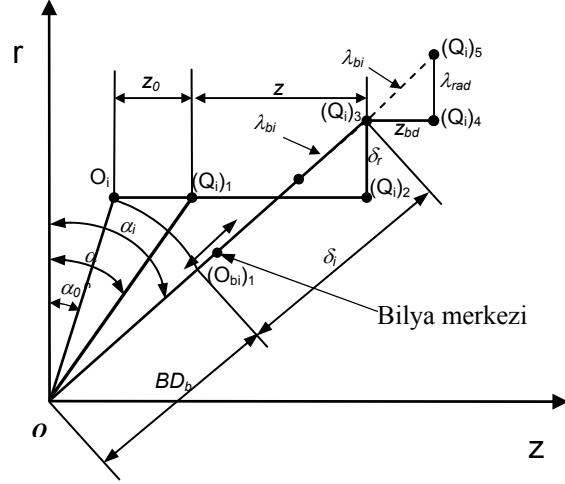
2.1. Bilezik ve Bilyalardaki Ezilmelerin Hesabı

Şaft ve bilyaya etki eden temas kuvvetlerinin hesaplanabilmesi için i 'inci bilyanın ezilmesinin hesaplanması gerekir. Dönme esnasında bilyalar sürekli olarak bileziklerin farklı noktalarında yüzeye temas eder. Şekil 2'de görüldüğü gibi bilya bileziklere temas halindeken O_i , O_d iç ve dış bilezik oluğu eğrilik merkezidir ve bilyalarla beraber hareket ederler. Moment için dış bileziği sabit kabul edersek o zaman O_d sabit eksen olarak alınabilir [14, 19]. Burada $O_i O_d = B.D_b$ olup iç ve dış bilezik eğrilik merkezleri arasındaki ilk mesafe olarak adlandırılır. Böylece O_i (ön yük olmadığı zaman) noktası, O_d noktasından itibaren $B.D_b$ ve α_0 ile tanımlanabilir.

Ön yük uygulandığında O_i noktası z_0 kadar hareket edecek $(Q)_1$ noktasına gelecek ve yeni temas açısı α_p ve ön yük ezilmesi δ_p tüm bilyalar için aynı olacaktır. Dış ekstenel ve radyal yük bileşenleri altında $(O_i)_1$ noktası z eksenini boyunca z kadar hareket ederek $(O_i)_2$ noktasına gelecek, radyal yük bileşenlerinin etkisiyle radyal yönde δ_r kadar ilerleyerek Şekil 2'de gösterildiği gibi $(O_i)_3$ noktasına gelecektir.

Daha sonra bilya merkezi, dış bilezik yönünde z_{bd} kadar hareket ederek $(O_i)_4$ noktasına gelir ve radyal yük bileşenlerinin etkisi ile λ_{rad} kadar ilerleyerek $(O_i)_5$ noktasına ulaşır. $\delta_i \lambda_{bi}$ kabul edildiği için bilya iç bilezik yönünde ($\delta_i - \lambda_{bi}$) kadar bir ezilmeye maruz kalır. Bu işlemin detaylı anlatımı Aktürk N. [2]'ün tezinde bulunabilir.

Burada i 'inci bilya için iç bileziğin radyal yöndeki ezilme miktarı;



Şekil 2. i 'inci bilya-bilezik temasındaki ezilmeler

$$\delta_r = x \cos(\theta_i) + y \sin(\theta_i) \quad (6)$$

şeklinde yazılabilir.

i 'inci bilyanın radyal yöndeki ezilme miktarı;

$$\lambda_{rad} = x_b \cdot \cos(\theta_i) + y_b \cdot \sin(\theta_i) \quad (7)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Şaftı 3 serbestlik dereceli olarak düşünersek yani shaftın sallanma ve yalpalama hareketleri göz ardı edilirse Şekil 3'e göre sağ ve sol taraftaki rulmanlar için iç bilezikteki toplam bağıl ezilme miktarı:

$$\delta_{bi}^R = \left[\begin{aligned} & [Bd_b \sin \alpha_0 + z_0 - z]^2 + \\ & [Bd_b \cos \alpha_0 + x \cos(\theta_i) + y \sin(\theta_i)]^2 \end{aligned} \right]^{1/2} - Bd_b \quad (8)$$

$$\delta_{bi}^L = \left[\begin{aligned} & [Bd_b \sin \alpha_0 + z_0 + z]^2 + \\ & [Bd_b \cos \alpha_0 + x \cos(\theta_i) + y \sin(\theta_i)]^2 \end{aligned} \right]^{1/2} - Bd_b$$

Temas açısı α_i ise;

$$\tan \alpha_i = \frac{Bd_b \cdot \sin(\alpha_0) + z_0 + z}{\delta_r + Bd_b \cdot \cos(\alpha_0)} \quad (9)$$

bağıntısından hesaplanabilir.

Burada $Bd_b = r_{go} + r_{gi} - d_b$ ve

$$z_0 = Bd_b \left(\frac{\sin(\alpha_p - \alpha_0)}{\cos(\alpha_p)} \right) \quad (10)$$

formüllerinden hesaplanır.

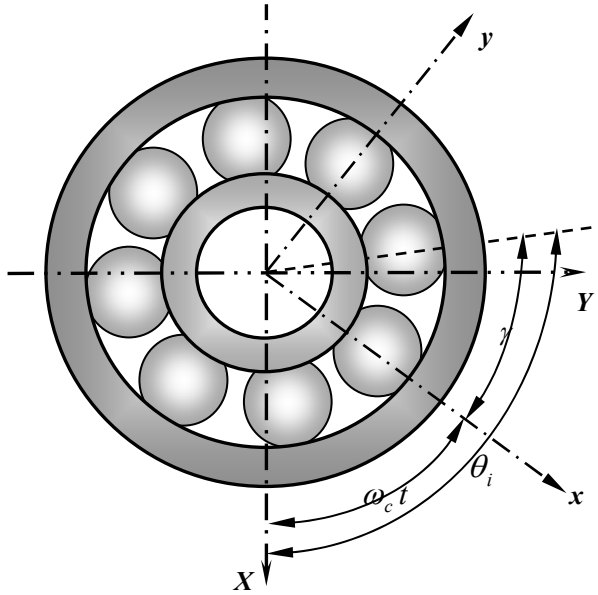
Tek bir bilyanın ezilmesi yüzünden oluşan kuvvet bulunabilir ve o zaman iç bileziğe etkiyen toplam kuvvet, bu bilyanın iç bilezik etrafında dönmesi ile oluşan kuvvetler toplanarak hesaplanabilir.

Şaft merkezinin hareketi sonucu iç bilezikte oluşan ezilmeleri bulmak için önce toplam kuvvetlerin hesaplanması gerekir.

x, y, z yönündeki toplam kuvvetler;

$$W_X = W_\eta \cdot \cos(\theta_i), \quad W_Y = W_\eta \cdot \sin(\theta_i), \quad W_Z = W_{ai} \quad (11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada W_{η} i 'inci bilyaya etkiyen normal kuvvet, θ_i ise i 'inci bilyanın x eksenine ile yaptığı açıdır. θ açısı Şekil 3'te gösterildiği gibi farklı açıların kombinasyonu şeklinde ifade edilebilir.



Şekil 3. Bilyalı rulmanda seçilen referans eksenler

Şekilde x, y, z eksenleri rotorla beraber hareket etmekte fakat onunla beraber dönmemektedir. Bu çalışmada X, Y ve Z eksenleri uzayda sabitlenmiş ve X eksenine yer çekimi kuvveti doğrultusunda olacak şekilde seçilmiştir. Normal şartlarda tüm bilyalar iç bileziğin etrafında kafes hızında bir kafesin içinde dönerler ve bu eksen seti de kafes hızıyla döner. İkinci referans eksenle bilya eksenine arasındaki açı $\omega_c \cdot t$ olup iki bilya arasındaki açı ise γ ile tanımlanır.

$$\gamma = \frac{2\pi}{m} \quad (12)$$

şeklinde ifade edilir. Burada m rulmandaki bilya sayısıdır. Buna göre θ açısı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\theta = \omega_c t + i\gamma \quad (13)$$

Burada kafes hızı:

$$\omega_c = \frac{1}{2} \omega_i \left[1 - \frac{d_b}{d_m} \cos(\alpha) \right] + \frac{1}{2} \omega_d \left[1 + \frac{d_b}{d_m} \cos(\alpha) \right] \quad (14)$$

bağıntısından hesaplanır. Burada

$$\omega_i = \frac{2m_i}{60} \text{ ve } \omega_d = \frac{2m_d}{60} \text{ dir [18].}$$

2.2. Şaft ve Bilyaların Hareket Denklemleri

İki açısız temaslı bilyalı rulman tarafından desteklenen rijit bir şaftın dinamiğini incelemek üzere bir modelleme yapılmıştır. Bu modellemede aşağıdaki gibi bazı kabuller yapılarak şaft ve bilyalar için hareket denklemleri elde edilmiştir.

1. Şaftın radyal yönde (x, y) ve aksel yönde (z) olmak üzere 3 serbestlik derecesine sahip olduğu kabul edildi.
2. Şaftın x ve y eksenleri etrafında dönme yapmadığı kabul edildi. Rulmanların eş zamanlı ve simetrik hareket ettikleri kabul edildiğinden bu hareket kolayca sağlanmıştır.
3. Bilyalar kütleli kabul edilmiş ve bilyaların sadece radyal yöndeki titreşimleri dikkate alınmıştır.
4. Bilezikler eğilmez (rijit) kabul edilmiş, sadece temas gerilmeleri yüzünden yerel ezilmelere uğradığı kabul edilmiştir. Ezilmeler Hertz Elastiklik teorisine uygun olarak gerçekleştirilmektedir.
5. İç bileziğin ezilme miktarının bilya merkezinin ivmesinden kaynaklanan ezilme miktarından daha büyük olduğu ve buna bağlı olarak ezilme fakının $(\delta - \lambda_{bi}) < 0$ olduğu durumda $(\delta - \lambda_{bi}) = 0$ alınmıştır.
6. Bilya merkezinin ivmesinden kaynaklanan ezilme miktarı $\lambda_{bi} < 0$ olduğu durumda λ_{bi} pozitif değere dönüştürülmüştür.
7. Yuvarlanma elamanları iç bileziğin etrafına eşit aralıkta yerleştirilmiş ve aralarında hiç bir etkileşim olmadığı kabul edilmiştir.
8. Dış bileziğin dönmediği ve şaftın bir parçası olduğu kabul edilmiştir.

Yukarıda yapılan kabullere göre Şaft için x, y, z yönündeki hareket denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + \sum_{i=1}^m K_i^i (\delta_i^R - \lambda_{bi}^R)^{\frac{3}{2}} \cos \alpha_i^R \cos \theta_i^R \\ + \sum_{i=1}^m K_i^i (\delta_i^L - \lambda_{bi}^L)^{\frac{3}{2}} \cos \alpha_i^L \cos \theta_i^L + Q_x - Mg = 0 \\ M\ddot{y} + \sum_{i=1}^m K_i^i (\delta_i^R - \lambda_{bi}^R)^{\frac{3}{2}} \cos \alpha_i^R \sin \theta_i^R \\ + \sum_{i=1}^m K_i^i (\delta_i^L - \lambda_{bi}^L)^{\frac{3}{2}} \cos \alpha_i^L \sin \theta_i^L + Q_y = 0 \\ M\ddot{z} + \sum_{i=1}^m K_i^i (\delta_i^R - \lambda_{bi}^R)^{\frac{3}{2}} \sin \alpha_i^R \\ + \sum_{i=1}^m K_i^i (\delta_i^L - \lambda_{bi}^L)^{\frac{3}{2}} \sin \alpha_i^L - Q_z = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Rulmanlarda 8'er tane bilya olduğu düşünülerek, bilyalar için radyal yöndeki hareket denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

Şaftın sağ ve sol tarafındaki rulman bilyaları için hareket denklemleri:

$$\begin{aligned}
m_{b1}\ddot{\lambda}_{b1}^R + K_1^d(\lambda_{b1}^R)^{3/2} - K_1^i(\delta_1^R - \lambda_{b1}^R)^{3/2} &= 0 \\
m_{b2}\ddot{\lambda}_{b2}^R + K_2^d(\lambda_{b2}^R)^{3/2} - K_2^i(\delta_2^R - \lambda_{b2}^R)^{3/2} &= 0 \\
m_{b3}\ddot{\lambda}_{b3}^R + K_3^d(\lambda_{b3}^R)^{3/2} - K_3^i(\delta_3^R - \lambda_{b3}^R)^{3/2} &= 0 \\
m_{b4}\ddot{\lambda}_{b4}^R + K_4^d(\lambda_{b4}^R)^{3/2} - K_4^i(\delta_4^R - \lambda_{b4}^R)^{3/2} &= 0 \\
m_{b5}\ddot{\lambda}_{b5}^R + K_5^d(\lambda_{b5}^R)^{3/2} - K_5^i(\delta_5^R - \lambda_{b5}^R)^{3/2} &= 0 \\
m_{b6}\ddot{\lambda}_{b6}^R + K_6^d(\lambda_{b6}^R)^{3/2} - K_6^i(\delta_6^R - \lambda_{b6}^R)^{3/2} &= 0 \\
m_{b7}\ddot{\lambda}_{b7}^R + K_7^d(\lambda_{b7}^R)^{3/2} - K_7^i(\delta_7^R - \lambda_{b7}^R)^{3/2} &= 0 \\
m_{b8}\ddot{\lambda}_{b8}^R + K_8^d(\lambda_{b8}^R)^{3/2} - K_8^i(\delta_8^R - \lambda_{b8}^R)^{3/2} &= 0 \\
m_{b1}\ddot{\lambda}_{b1}^L + K_1^d(\lambda_{b1}^L)^{3/2} - K_1^i(\delta_1^L - \lambda_{b1}^L)^{3/2} &= 0 \\
m_{b2}\ddot{\lambda}_{b2}^L + K_2^d(\lambda_{b2}^L)^{3/2} - K_2^i(\delta_2^L - \lambda_{b2}^L)^{3/2} &= 0 \\
m_{b3}\ddot{\lambda}_{b3}^L + K_3^d(\lambda_{b3}^L)^{3/2} - K_3^i(\delta_3^L - \lambda_{b3}^L)^{3/2} &= 0 \\
m_{b4}\ddot{\lambda}_{b4}^L + K_4^d(\lambda_{b4}^L)^{3/2} - K_4^i(\delta_4^L - \lambda_{b4}^L)^{3/2} &= 0 \\
m_{b5}\ddot{\lambda}_{b5}^L + K_5^d(\lambda_{b5}^L)^{3/2} - K_5^i(\delta_5^L - \lambda_{b5}^L)^{3/2} &= 0 \\
m_{b6}\ddot{\lambda}_{b6}^L + K_6^d(\lambda_{b6}^L)^{3/2} - K_6^i(\delta_6^L - \lambda_{b6}^L)^{3/2} &= 0 \\
m_{b7}\ddot{\lambda}_{b7}^L + K_7^d(\lambda_{b7}^L)^{3/2} - K_7^i(\delta_7^L - \lambda_{b7}^L)^{3/2} &= 0 \\
m_{b8}\ddot{\lambda}_{b8}^L + K_8^d(\lambda_{b8}^L)^{3/2} - K_8^i(\delta_8^L - \lambda_{b8}^L)^{3/2} &= 0
\end{aligned} \tag{16}$$

2.3. Hareket Denklemlerinin Çözümü

Şaft ve bilyalar için yazılan hareket denklemlerinin çözümü *Runge-Kutta İterasyon Metodu* kullanılarak bulunmuştur. Runge-Kutta metodunda ilk şartlar çok önemli olup, bu yüzden programa doğru girilmesi gerekir.

2.3.1. Başlangıç şartları

Başlangıç şartları ve aralık, başarılı ve ekonomik hesaplama çözümleri için çok önemlidir. Özellikle doğrusal olmayan sistemler için farklı şartlar tamamen farklı bir sistem ve bundan dolayı farklı çözümler anlamına gelebilir. $t = 0$ için aşağıdaki kabuller yapılmıştır.

1. Şaft rulmanının merkezinde tutuluyor. Şöyle ki; bilyalar üzerinde radyal yük olmadığı ve bütün bilyaların eşit aksenal ön yük ve yükleme temas açısına sahip olduğu farz edildi. Temas açısı α_p önceki bölümde de bahsedildiği gibi $P = m.K_i.\delta_o^{3/2}.\sin(\alpha_p)$ bağıntısından deneme yanılma yoluyla hesaplanmıştır.

2. Bilyaların kütlesi şafta göre çok küçük olduğu için bilya merkezlerinin radyal yöndeki yer değiştirme ve hızları 0'a yakın seçilmiştir. Hızlı bir yakınsama için ilk yer değiştirme ve hızlar aşağıdaki gibi seçilmiştir.

Şaft için yer değiştirme ve hızlar: $x_0 = 10^{-6}$ m, $y_0 = 10^{-7}$ m, $z_0 = 10^{-8}$ m, $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$
Bilya merkezleri için radyal yöndeki yer değiştirme ve hızlar: $\lambda_{bi} = 10^{-15}$ m, $\dot{\lambda}_{bi} = 10^{-15}$ m/s.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

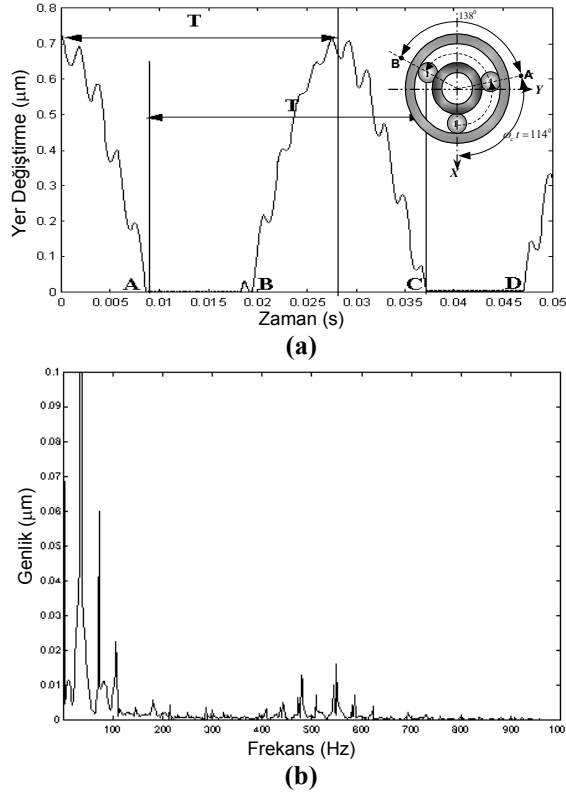
Sağlam rulmanlar için yazılan simülasyon programının doğruluğunu teyit etmek için, 5 serbestlik dereceli bir model kullanan Aktürk N.'ün simülasyon programında kullandığı veriler (Şekil 4) referans alınarak simülasyon programı çalıştırılmış bilya titreşimleri elde edilmiştir.



Şekil 4. Açısal temaslı bilyalı rulman ve şaftla ilgili boyut tanımlamaları

3.1. Sağlam Rulmanda Bilyaların Titreşimi

Bilyaların titreşimini incelemek için öncelikle birinci bilyanın zaman tanım bölgesindeki salınımına bakarak bilyaların yüklü ve yüksüz bölgedeki hareketini anlayabiliriz. Burada şaft hareketsizken 1'nolu bilya rulmanının en altında durmaktadır ve 1, 2, 3, 7, 8'nolu bilyalar yüklü bölgededir. Ön yük 5 N alınarak elde edilen birinci bilyanın zaman tanım bölgesindeki salınımı Şekil 5.a'da görülmektedir. Rulman saat yönünün tersi yönde dönmeye başladığında birinci bilya 114° dönerek yüklü bölgeden yüksüz bölgeye girer ve bu bölgede yaklaşık 252° kendi doğal frekansında salınarak, B noktasında tekrar yüklü bölgeye girerek deformasyona uğramaktadır. Bilya yüklü bölgede 222° kaldıktan sonra ikinci turda yine aynı noktalarda yüklü ve yüksüz bölgelere girerek periyodik olarak titreşimine devam etmektedir. Diğer bilyalar da birbirlerini 45° 'lik açı farkıyla takip ederek periyodik olarak salınmaktadır.



Şekil 5. $P_R = 5$ N için birinci bilyanın radyal yöndeki **a)** titreşimi **b)** frekans spektrumu

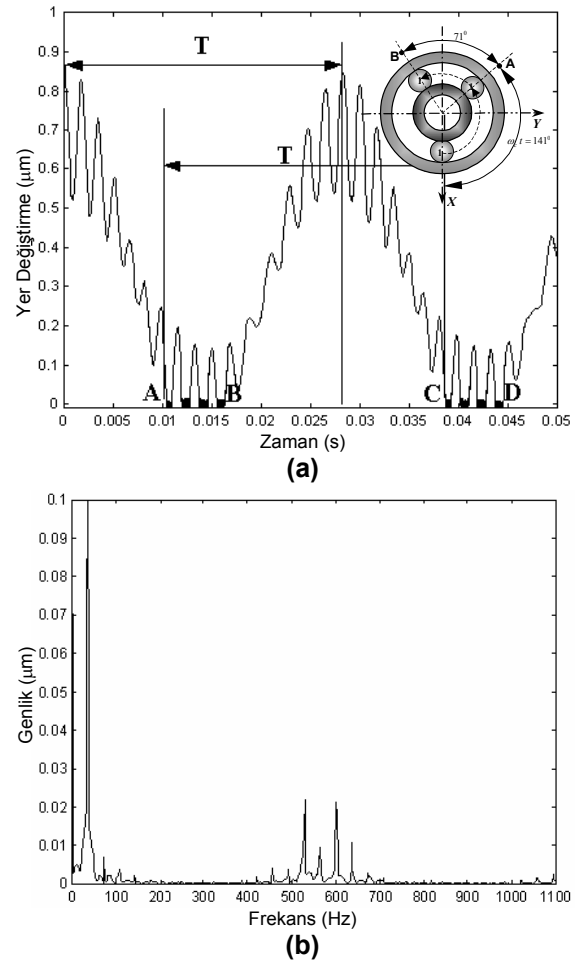
Birinci bilyanın frekans spektrumuna bakıldığında en büyük zirveler, kafes frekansı (35 Hz) ve onun harmoniklerinde, şaftın radyal yöndeki doğal frekansı (490 Hz) ve bilyanın radyal yöndeki salınım frekansında (560 Hz) görülmektedir.

Ön yük 10 N seçilerek birinci bilyanın salınımı incelendiğinde, rulman saat yönünün tersi yönde dönmeye başladığında Şekil 6.a'da görüldüğü gibi birinci bilya 141° dönerek yüklü bölgeden yüksüz bölgeye girer. Bilya bu bölgede yaklaşık 71° kendi doğal frekansında titreşir ve sonra tekrar yüklü bölgeye girerek deformasyona uğrar Bilya bu yüklü bölgede 282° kaldıktan sonra ikinci turda yine aynı noktalarda (A, B) yüklü ve yüksüz bölgelere girerek periyodik olarak titreşimine devam eder.

Görüldüğü gibi ön yük arttıkça bilya daha uzun süre yüklü bölgede kalarak daha fazla deformasyona uğramaktadır (Şekil 6.a). Diğer bilyalar da birbirlerini 45° 'lik açı farkıyla takip ederek periyodik olarak titreşirler.

Birinci bilya için çizdirilen frekans spektrumuna bakıldığında 5000 d/d şaft hızı için en büyük frekans zirvesi kafes frekansında (35 Hz) görülmektedir. Diğer baskın zirveler ise şaftın radyal yöndeki doğal frekansı (530 Hz) ve birinci bilyanın radyal yöndeki titreşim frekansında (600 Hz) ortaya çıkmaktadır.

Teoride bilyaların yüksüz bölgede hareket etmesi istenmediği için uygulanacak minimum ön yükün



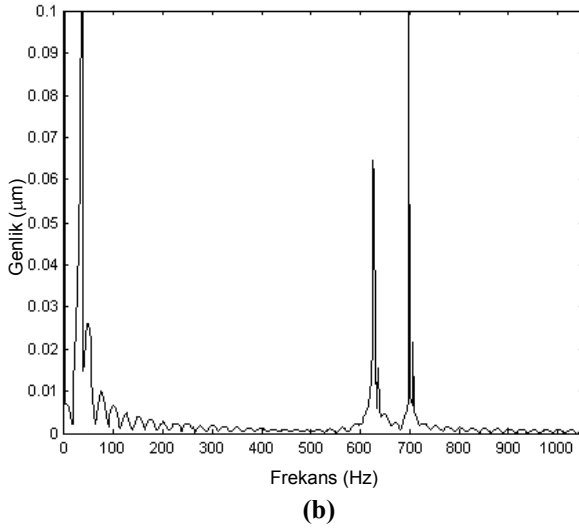
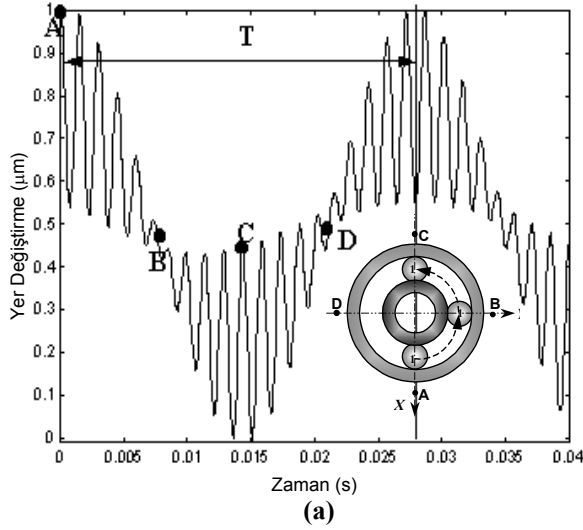
Şekil 6. $P_R = 10$ N için birinci bilyanın radyal yöndeki **a)** titreşimi **b)** frekans spektrumu

bulunması gerekir [10]. Ön yük 1 N artırılarak 18 N'a çıkarıldığında ise Şekil 7.a'da görüldüğü gibi bilya yüksüz bölgeye girmeden şaft titreşimine bağlı olarak titreşmektedir. Diğer bilyalarda yüklü bölgede periyodik olarak titreşirler. Bilya A noktasında daha rijit bir bölgede olduğu için B noktasına kadar daha fazla deformasyona uğrar, B noktasından (90°) C noktasına (180°) gelirken ise daha az rijit bir bölgeye girdiği için daha az deformasyona uğrar yani bilyanın titreşiminin genliği azalır.

Bu yük için birinci bilyanın frekans spektrumuna baktığımızda kafes frekansı ve onun katlarındaki zirveler ve ayrıca şaftın radyal yöndeki doğal frekansı (620 Hz) ve bilyanın radyal yöndeki titreşim frekansı (700Hz) görülmektedir. Spektrumlarda da görüldüğü gibi ön yük arttıkça spektrumdaki kafes frekansı, şaftın doğal frekansı ve bilyanın titreşim frekansı zirvelerinin genliği de artmaktadır.

4. SONUÇLAR

Sağlam durumdaki açısız temaslı bilyalı rulmanların titreşimini incelemek üzere geliştirilen simülasyon programı yardımıyla bilyaların zaman ve frekans tanım bölgesindeki titreşimleri bulunmuş ve öncelikle



Şekil 7. $P_R = 18$ N için birinci bilyanın radyal yöndeki **a)** titreşimi **b)** frekans spektrumu

kusursuz rulmanda birinci bilyanın zaman tanım bölgesindeki salınımına bakılarak bilyanın yüklü ve yüksüz bölgedeki davranışı incelenmiştir. Kusursuz rulmanda bilyalar yüksüz bölgede hareket ederken kendi doğal frekanslarında titreşirler. Teoride bilyaların yüksüz bölgede hareket etmesi istenmediği için uygulanacak minimum ön yük 18 N olarak bulunmuş ve titreşimler bu ön yüke göre elde edilmiştir. Ön yük arttıkça bilyalar daha uzun süre yüklü bölgede kalarak daha fazla deformasyona uğramakta ve titreşim genlikleri artmaktadır. Rulmandaki diğer bilyalarda 45° lik faz farkıyla birbirlerini takip ederek aynı titreşime maruz kalmaktadırlar.

Bilyalar için bulunan frekans spektrumlarına bakıldığında frekans zirveleri kafes frekansı ve katları, şaftın radyal yöndeki doğal frekansı ve bilyanın radyal yöndeki titreşim frekansında ortaya çıkmaktadır. Ön yük arttıkça bilyalar daha uzun süre yüklü bölgede kalarak daha fazla deformasyona

uğramakta ve spektrumdaki titreşim genlikleri artmaktadır.

SİMGELER

a	Temasta oluşan izin uzunluğu
b	Temasta oluşan izin genişliği
B	Toplam eğrilik
d_i	İç bileziğin çapı
d_m	Ortalama çap
d_d	Dış bileziğin çapı
D	Bilya çapı
E	Elastisite modülü
f_{BGF}	Dış Bilezik Bilya geçiş frekansı
f_{BGF_i}	İç Bilezik Bilya geçiş frekansı
f_c	Kafes dönme frekansı
f_n	Doğal frekans
$F(\rho)$	Eğrilik farkı
$F(\rho)_i$	Bilya-iç bilezik temasındaki eğrilik farkı
$F(\rho)_d$	Bilya-dış bilezik temasındaki eğrilik farkı
g	Yer çekimi ivmesi
G	Kayma modülü
K	Temas Rijitlik Faktörü
K^i	İç bilezik-bilya temasındaki rijitlik kats.
K^d	Dış bilezik-bilya temasındaki rijitlik kats.
M	Şaftın kütlesi
m_b	Bilyanın kütlesi
m	Bilya sayısı
n	Şaft dönme devri
n_i	İç bileziğin dönme devri
n_d	Dış bileziğin dönme devri
N	Veri noktası sayısı
Q	Şafta gelen dış yük
P_R	Ön yük
r_{gi}	İç bilezik eğrilik yarıçapı
r_{gd}	Dış bilezik eğrilik yarıçapı
r_i	İç bilezik bilya yolu yarıçapı
r_d	Dış bilezik bilya yolu yarıçapı
t	Zaman
\ddot{x}	Şaftın x yönündeki ivmesi
\ddot{y}	Şaftın y yönündeki ivmesi
\ddot{z}	Şaftın z yönündeki ivmesi
λ_b	Bilya kütlelerinin ivmelenmesinin neden olduğu yer değiş.
δ_b	Ön yükleme sonucu bilya merkezinin yer değiştirmesi
$\dot{\lambda}_b$	Bilya kütlelerinin ivmelenmesinin neden olduğu hız
$\dot{\delta}_b$	Ön yükleme sonucu oluşan bilya merkezinin hızı
$\ddot{\lambda}_b$	Bilya merkezinin radyal yöndeki ivmesi

KAYNAKLAR

1. Arslan, H., **Şaft-Rulman Sistemindeki Bilyalı Rulman Hasarlarının Titreşim Analizi Metodu İle Tespiti**, Doktora Tezi, Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ocak 2003.
2. Gupta, P. K., Winn, L. W., Wilcock, D. F., "Vibration Characteristic of Ball Bearings", **Journal of Lubrication Technology**, Cilt 98, 284-289, 1977.
3. Gupta, P. K., "Dynamics of Rolling Element Bearing Part I: Cylindrical Roller Bearing Analysis", **Journal of Lubrication Technology**, Cilt 101, 293-304, 1979.
4. Gupta, P. K., "Dynamics of Rolling Element Bearing Part I: Cylindrical Roller Bearing Results", **Journal of Lubrication Technology**, Cilt 101, 305-311, 1979.
5. Gupta, P. K., "Dynamics of Rolling Element Bearing Part I: Ball Bearing Analysis", **Journal of Lubrication Technology**, Cilt 101, 312-319, 1979.
6. Gupta, P. K., "Dynamics of Rolling Element Bearing Part I: Ball Bearing Results", **Journal of Lubrication Technology**, Cilt 101, 319-326, 1979.
7. Gad, E. H., Kandou, T. ve Tamura, H., "Spring Property of Ball Bearing", **Memoirs of the Faculty of Engineering**, Kyushu University, Cilt 43, No 3, 243-265, 1983.
8. Gad, E. H., Fukata, S. ve Tamura, H., "Computer Simulation of Rotor Radial Vibration due to Ball Bearings", **Memoirs of the Faculty of Engineering**, Kyushu University, Cilt 44, No 1, 114-133, 1984.
9. Gad, E. H., Fukata, S. ve Tamura, H., "Computer Simulation of Rotor Axial and Radial Vibrations Based on Ball Bearings", **Memoirs of the Faculty of Engineering**, Kyushu University, Cilt 44, No 2, 169-189, 1984.
10. Aktürk, N., **Rigid Shaft Supported by Angular Contact Ball Bearings**, PhD. Thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, London, April 1993.
11. Aktürk, N. ve Gohar, R., "The Effect of Ball Size Variation on Vibrations Associated with Ball-Bearings", **Proc. Instn. of Mechanical Engineers (Part J)**, Cilt 212, 101-109, 1998.
12. Datta, J. ve Farhang, K., "A Nonlinear Model for Structural Vibrations in Rolling Element Bearings: Part I- Derivation of the Governing Equations", **Journal of Tribology**, Cilt 119, 323-331, 1997.
13. Meeks, C. R. ve Tran, L., "Ball Bearing Dynamic Analysis Using Computer Methods- Part I: Analysis", **Journal of Tribology**, Cilt 118, 52-58, 1996.
14. Harris, T. A., **Rolling Bearings Analysis**, John Wiley & Sons, USA, 1991.
15. Franco, J., Aktürk, N. ve Gohar, R., "Vibration of a Rigid Shaft Supported by Radial Ball Bearings with Several Defects", **International Gas Turbine and Aero Engine Congress**, Cologne, Germany, 1-12, 1992.
16. Aktürk, N., Unee, M., Gohar, R., "Vibration of a Shaft Supported by Angular Contact Ball Bearings", **ESDA Joint Conferences on Engineering System Design and Analysis**, İstanbul, 95-101, 1992.