

## PARABOLİK KALINLIKLIL DÖNEN DİSKLERİN ELASTİK DEFORMASYONU: ANALİTİK ÇÖZÜMLER

**Tunç APATAY\*** ve **Ahmet N. ERASLAN\*\***

\* Makina Mühendisliği Bölümü, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Gazi Üniversitesi,  
Maltepe, 06570, Ankara, [jtempest@hotmail.com](mailto:jtempest@hotmail.com)

\*\* Mühendislik Bilimleri Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Orta Doğu Teknik  
Üniversitesi, 06531, Ankara, [aderaslan@metu.edu.tr](mailto:aderaslan@metu.edu.tr)

### ÖZET

Bu çalışmada, yüksek hızlarda dönen değişken kalınlıklı diskler için iki parametrelili, parabolik formda yeni bir kalınlık fonksiyonu önerilmiştir. Bu kalınlık fonksiyonu kullanılarak dönen içi dolu ve içi boş disklerin elastik analitik çözümleri hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden elde edilmiştir. İçi boş diskler için serbest, radyal bağımlı ve basınçlandırılmış sınır koşulları ayrı ayrı incelenmiştir. Disk kalınlığının geometrik parametrelerin ayarlanmasıyla sabit kalınlıklı diske yaklaştığı limit durumunda, elde edilen çözümün sabit kalınlıklı disk çözümüne indirgenmediği matematiksel olarak ispatlanmıştır. Gerilme ve yer değiştirme dağılımları hesaplanmış ve bu dağılımlar aynı açısız hızda sabit kalınlıklı disk için bulunan dağılımlarla karşılaştırılmıştır. Aynı koşullarda parabolik diskler içerisinde gerilme ve yer değiştirmelerin sabit kalınlıklı disklerden çok daha az olduğu gösterilmiştir. Von Mises akma kriteri kullanılarak çeşitli parametrelerin elastik limit açısız hız üzerine etkisi araştırılmıştır. Hesaplanan limit açısız hızların disk ucunun incelişmesiyle önemli ölçüde değiştiği saptanmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Dönen diskler; değişken kalınlık; von Mises akma kriteri

### ELASTIC DEFORMATION OF ROTATING PARABOLIC DISCS: ANALYTICAL SOLUTIONS

#### ABSTRACT

A new thickness profile in parabolic form containing two geometric parameters is proposed for rotating variable thickness disks. Using this profile function analytical solutions are obtained in terms of hypergeometric functions for the elastic deformation of rotating solid and annular disks. In the case of annular disks, free, radially constrained and pressurized boundary conditions are treated. It is shown

mathematically that in the limiting case the variable thickness solution reduces to the solution of constant thickness disk. The distributions of stress and displacement are obtained and compared to those in the uniform thickness disks at the same angular velocity. It is shown that the stresses in parabolic disks are lower in magnitude than those in uniform thickness disks under the same conditions. Using the von Mises yield criterion the effect of various parameters on the elastic limit angular velocities is investigated. The calculated elastic limit angular velocities are found to be affected significantly by the reduction in the edge thickness of the disk.

**Keywords:** Rotating disks; variable thickness, von Mises criterion

## 1. GİRİŞ

Yüksek hızlarda dönen disklerin mühendislikte birçok uygulaması bulunmaktadır [1-3]. Bu uygulamalar içerisinde dişi çarklar, rotorlar ve volanlar sayılabilir. Dönen disklerin mühendislikteki önemi nedeniyle bu elemanlar içerisinde operasyon sırasında gerilme ve yer değiştirmelerin teorik ve deneysel analizi bilim dünyasının uzun yıllardır ilgisini çekmektedir.

Sabit kalınlıklı ve içi dolu dönen disklerin ilk doğru elastik-plastik analitik çözümü 1984 yılında Gamer [4-5] tarafından elde edilmiştir. Gamer'in bu çözümü düzlem gerilme varsayımına dayalıdır ve elastik-plastik deformasyon için lineer şekil değiştirme pekleşmesi esas alınmıştır. Tresca akma kriteri ve ilgili akma kuralı kullanılarak tüm deformasyon adımlarının kapalı çözümleri yapılmıştır. Gamer'in bu çalışmasından yola çıkarak daha sonra birçok araştırmacı değişken kalınlıklı disklerin elastik ve elastik-plastik çözümlerini elde etmek için çaba harcamışlardır.

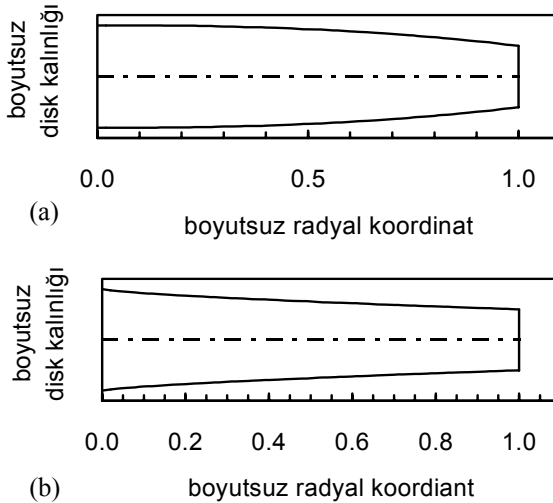
Güven [6-7] içi dolu dönen diskler için biri eksponensiyel ve bir diğeri kuvvet fonksiyonu tipinde iki değişik kalınlık fonksiyonu öne sürmüş ve kalınlıkları bu fonksiyonlarla değişen disklerin analitik çözümleri Eraslan, Orçan [8] ve Orçan, Eraslan [9] tarafından elde edilmiştir. Konkav kalınlıklı içi dolu dönen disklerin kapalı çözümleri Eraslan ve Orçan [10] tarafından sunulmuştur. Yazarlar bu çalışmalarında konkav disklerin elastik ve elastik-plastik davranışlarının sabit kalınlıklı disklerden tamamen farklı olduğunu göstermişlerdir. Ortasından rijid bir şaftta monte edilmiş hiperbolik kalınlıklı dönen bir diskin teorik analizi Güven [11] tarafından yapılmıştır. Değişken kesitli dönen disklerle ilgili kapsamlı bir çalışmada Eraslan ve Argeşo [12] tarafından gerçekleştirilmiştir. Araştırmacılar bu çalışmalarında kalınlığı bir kuvvet fonksiyonuyla tanımlanan dönen bir diskin elastik ve plastik limit açısal hızlarına disk kalınlığını belirleyen fonksiyonun geometrik parametrelerinin etkisini araştırmışlardır. Bu çalışmada plastik limit açısal hızlar için von Mises akma kriteri kullanılmış ve bilgisayar çözümleri bulunmuştur. Değişken kalınlıklı diskler ile ilgili son yıllarda yapılan tüm araştırmalar, bu diskler içerisinde gerilme ve yer değiştirmelerin aynı hızda dönen sabit kalınlıklı disklerle

göre çok daha düşük olduğunu göstermektedir. Böylece, daha az malzeme kullanarak daha dayanıklı diskler tasarlamak mümkün olmaktadır.

Bu çalışmanın amacı iki parametrelili yeni bir kalınlık fonksiyonu önermek ve kalınlığı bu fonksiyonla değişen içi dolu ve içi boş döner disklerin elastik çözümlerini elde etmektir. Kalınlık fonksiyonunu  $h(r)$  ile gösterilirse, bu fonksiyon

$$h(r) = h_0 \left[ 1 - n \left( \frac{r}{b} \right)^k \right] \quad (1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $h_0$  diskin merkez  $r = 0$ 'da kalınlığını,  $n$  ve  $k$  diskin kalınlığını ve şeklini belirleyen geometrik parametreleri ( $0 \leq n < 1$ ,  $k \geq 0$ ),  $b$  ise diskin yarıçapını göstermektedir. (1) denklemi radyal koordinat  $r$  boyunca parabolik formda değişen sürekli nonlinear bir kalınlığı ifade etmektedir. Bu fonksiyonla değişik profiller elde etmek mümkündür.  $n = 0$  alındığında sabit kalınlıklı disk elde edilir. Ayrıca,  $k = 1$  için lineer olarak azalan kalınlık,  $k < 1$  değerleri için konkav ve  $k > 1$  için ise konveks disk kalınlıkları tasarlanabilir. Örnek olarak, tipik konkav ve konveks içi dolu disk kalınlık profilleri Şekil 1'de gösterilmektedir. Şekil 1a'da verilen profil  $n = 0.4$  ve  $k = 2.4$ , Şekil 1b'de ise  $n = 0.4$  ve  $k = 0.7$  değerleri kullanılarak çizilmiştir. Bu şekillerde boyutsuz kalınlık ve radyal koordinat sırasıyla  $\bar{h} = h/h_0$  ve  $\bar{r} = r/b$  tanımları kullanılarak hesaplanmıştır.



**Şekil 1.** Parabolik disk kalınlık profilleri (a)  $n = 0.4$ ,  $k = 2.4$ , (b)  $n = 0.4$ ,  $k = 0.7$

## 2. TEMEL DENKLEMLER

Disk kalınlığının yarıçapa oranla küçük olduğu kabulüyle simetri eksenine doğrultusundaki gerilme bileşeni,  $\sigma_z$ , ihmal edilerek problem için düzlem gerilme durumu ele alınabilir.

Diskin dönme eksenine göre simetrik olmasından dolayı gerilmeler  $\theta$ -yönünden bağımsızdır ve yine simetri nedeniyle  $\tau_{r\theta} = 0$  olur. Ayrıca disk ağırlığından kaynaklanan gerilmeler diğerlerine oranla küçük olduğundan disk ağırlığı ihmal edilebilir. Böylece sadece radyal doğrultudaki kuvvetlerin dengesinden kalınlığı  $h(r)$  fonksiyonuyla değişen ve  $\omega$  açısal hızıyla (rad/s) dönen disk için denge denklemi;

$$\frac{d}{dr}(hr\sigma_r) - h\sigma_\theta + h\rho\omega^2 r^2 = 0 \quad (2)$$

şeklinde olur [1]. Burada  $\rho$  disk malzemesinin kütle yoğunluğu,  $\sigma_r$  radyal doğrultudaki gerilme bileşeni,  $\sigma_\theta$  teğetsel doğrultudaki gerilme bileşenidir.

Polar koordinatlardaki şekil değiştirme yer değiştirme bağıntıları şu şekildedir:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (3)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (4)$$

Düzlem gerilme durumu, aksenal simetri ile polar koordinatlarda Hooke Kanunu ise

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \quad (5)$$

$$\gamma_{r\theta} = 0$$

olarak verilir. Bu denklemlerde,  $\varepsilon_r$  ve  $\varepsilon_\theta$  sırasıyla radyal ve teğetsel şekil değiştirme bileşenlerini,  $u$  radyal yer değiştirmeyi,  $E$  elastisite modülünü ve  $\nu$  ise Poisson oranını ifade etmektedir.

(3), (4) ve (5) denklemleri yardımıyla gerilme bileşenleri yer değiştirmeler cinsinden yazıldığında;

$$\sigma_r(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{\nu u}{r} + \frac{du}{dr} \right] \quad (6)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right] \quad (7)$$

denklikleri elde edilir.

### 3. ELASTİK ÇÖZÜM

Radyal yer değiştirme  $u(r)$  cinsinden ifade edilen gerilmeler (6)-(7),  $h(r)$  kalınlık fonksiyonu (1) ile birlikte denge denkleminde (2) yerlerine yazıldığında gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$r^2 \left[ 1 - n \left( \frac{r}{b} \right)^k \right] \frac{d^2 u}{dr^2} + r \left[ 1 - n(1+k) \left( \frac{r}{b} \right)^k \right] \frac{du}{dr} - \left[ 1 - n(1-k\nu) \left( \frac{r}{b} \right)^k \right] u = - \frac{\left[ 1 - n \left( \frac{r}{b} \right)^k \right] (1-\nu^2)}{E} \rho \omega^2 r^3 \quad (8)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin homojen kısmı  $z = n(r/b)^k$  yeni değişkeni ve  $u(r) = r y(z)$  dönüşümü ile

$$z(1-z) \frac{d^2 y}{dz^2} + \left[ \frac{2+k-2(1+k)z}{k} \right] \frac{dy}{dz} + \frac{\nu-1}{k} y = 0 \quad (9)$$

haline gelir. Bu denklem özel bir diferansiyel denklem türü olan hipergeometrik diferansiyel denkleminin genel formudur ve çözümü;

$$y(z) = C_1 F(\alpha, \beta, \gamma, z) + C_2 z^{-2/k} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) \quad (10)$$

şeklinindedir [13]. Burada  $C_i$  keyfi bir integrasyon sabiti ve  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  ise hipergeometrik fonksiyon olup aşağıdaki şekilde verilmektedir [13].

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma!} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)3!} z^3 + \dots \quad (11)$$

Bu denklemden görüldüğü gibi  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  fonksiyonu aslında bir sonsuz seri olup  $-1 < z < 1$  aralığında çok yavaş yakınsamaktadır. Ancak burada ele alınan problem fiziksel bir problem olduğundan (11) serisi her zaman yavaş da olsa yakınsar. (10) denklemindeki hipergeometrik fonksiyonun argümanları ise,

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{k} - \frac{\sqrt{k^2 + 4(1-k\nu)}}{2k} \quad (12)$$

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{k} + \frac{\sqrt{k^2 + 4(1-k\nu)}}{2k} \quad (13)$$

$$\gamma = 1 + \frac{2}{k} \quad (14)$$

olarak bulunur. (8) diferansiyel denkleminin homojen çözümü  $y(z)$  çözümünün  $u(r) = r y(z)$  dönüşümünde yerine yazılmasıyla

$$u(r) = C_1 P(r) + C_2 Q(r) \quad (15)$$

olarak elde edilir. Burada;

$$P(r) = rF\left(\alpha, \beta, \gamma, n\left(\frac{r}{b}\right)^k\right) \quad (16)$$

$$Q(r) = \frac{1}{r}F\left(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, n\left(\frac{r}{b}\right)^k\right) \quad (17)$$

tanımlamaları yapılmıştır. Diğer taraftan, (8) denkleminin genel çözümü ise,

$$u(r) = C_1 P(r) + C_2 Q(r) + R(r) \quad (18)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $R(r)$  özel çözümü göstermektedir ve parametrelerin değişimi yöntemiyle aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$R(r) = P(r)U_1(r) + Q(r)U_2(r) \quad (19)$$

Bu denklemde

$$U_1(r) = -\int_a^r \frac{Q(\xi)f(\xi)}{W(\xi)} d\xi \quad (20)$$

$$U_2(r) = \int_a^r \frac{P(\xi)f(\xi)}{W(\xi)} d\xi \quad (21)$$

$$f(r) = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 r \quad (22)$$

Yukarıdaki integrallerin alt limiti  $a$  elastik bölgenin başlangıç koordinatı ve integraller içerisindeki  $W(r)$  ise diferansiyel denklemin Wronskianı olup;

$$W(r) = P \frac{dQ}{dr} - Q \frac{dP}{dr} \quad (23)$$

denkliğinden hesaplanır.

(18) ile verilen yer değiştirme genel çözümü, (6) ve (7) ile verilen gerilme denklemlerinde yerine yazıldığında radyal ve teğetsel gerilme bileşenleri için

$$\sigma_r(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ C_1 \left( \nu \frac{P}{r} + \frac{dP}{dr} \right) + C_2 \left( \nu \frac{Q}{r} + \frac{dQ}{dr} \right) + \nu \frac{R}{r} + \frac{dR}{dr} \right] \quad (24)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ C_1 \left( \frac{P}{r} + \nu \frac{dP}{dr} \right) + C_2 \left( \frac{Q}{r} + \nu \frac{dQ}{dr} \right) + \frac{R}{r} + \nu \frac{dR}{dr} \right] \quad (25)$$

eşitlikleri elde edilir. (16)-(17) eşitlikleriyle tanımlanan  $P(r)$  ve  $Q(r)$  fonksiyonlarının türevini almak için hipergeometrik fonksiyonun türevinin alınması gerekmektedir, bu ise aşağıdaki türev kuralı [13]

$$\frac{d}{dr} F(\alpha, \beta, \gamma, z(r)) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{dz}{dr} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z(r)) \quad (26)$$

kullanılarak elde edilir. Yukarıda sunulan elastik çözüm limit durumunda sabit kalınlıklı diskin elastik çözümünü vermektedir.  $n=0$  değeri alırsa (1) denkleminde  $h(r) = h_0$ , (16) denkleminde  $P(r) = r$ , (17) denkleminde ise  $Q(r) = 1/r$  olarak bulunur. Bu bulunanlar yardımıyla (19)-(22) denkliklerinden özel çözüm  $a=0$  alınarak kolayca

$$R(r) = -\frac{(1-\nu^2)\rho\omega^2 r^3}{8E} \quad (27)$$

olarak belirlenir.  $P$ ,  $Q$  ve  $R$  değerleri genel çözüm ifadesinde (18) yerine konularak elastik çözüm için

$$u(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{(1-\nu^2)\rho\omega^2 r^3}{8E} \quad (28)$$

ifadesi elde edilir. Bu ise sabit kalınlıklı diskin bilinen elastik çözümüdür [1,4].

Elastik çözüm  $C_1$  ve  $C_2$  integrasyon sabitlerinin belirlenmesiyle tamamlanır. Bunun için çeşitli sınır koşulları söz konusudur ve bu koşullar içerisinde mühendislikte en yaygın uygulamaları olanlar aşağıda ayrı ayrı ele alınacaktır.

### 3.1. İçi Dolu Disk

Teknikde içi dolu bir diskin hiçbir uygulaması olmamasına rağmen böyle bir diskin çözümü teorisinin gelişmesi açısından önemlidir. İçi dolu dönen bir diskin simetri ekseninde, yani  $r = 0$  da gerilmeler sonlu olmalıdır. (24) ve (25) denklemleriyle verilen gerilme ifadelerinde  $Q(r)$  fonksiyonunun tanımı da gözönüne alındığında integral sabitlerinden  $C_2$  sıfır olmalıdır. Diskin serbest ucu  $r = b$  de ise radyal gerilme bileşeni sıfırdır, yani  $\sigma_r(b) = 0$ . Radyal koordinat  $r$  ye göre türevleri  $\phi'(r)$  şeklinde göstererek, bu sınır koşulu yardımıyla diğer integral sabiti;

$$C_1 = -\frac{\nu R(b) + bR'(b)}{\nu P(b) + bP'(b)} \quad (29)$$

olarak hesaplanır. Ayrıca simetri ekseninde ( $r = 0$ ) radyal ve teğetsel gerilme bileşenleri (24) ve (25) denklemlerinden gerekli limitler alınarak hesap edilirse, bu eksen de gerilme bileşenlerinin birbirine eşit olduğu ve

$$\sigma_r(0) = \sigma_\theta(0) = \frac{E}{1-\nu} C_1 \quad (30)$$

denkliğiyle elde edilebileceği bulunur.

### 3.2. İçi Boş Diskler

Ortasında  $a$  yarıçapında bir delik bulunan dönen bir disk için çok değişik sınır koşulları mümkün olabilir. Bunlardan bazıları aşağıda incelenmektedir.

#### 3.2.1. Uçları Serbest Disk

İki tarafı serbest bir disk için sınır koşulları  $\sigma_r(a) = \sigma_r(b) = 0$  şeklindedir. Bu sınır koşullarının (24) ile verilen radyal gerilme bileşeni ifadesinde yerine yazılmasıyla integrasyon sabitleri;

$$C_1 = \frac{[\nu Q(a) + aQ'(a)][\nu R(b) + bR'(b)]}{T + L} \quad (31)$$

$$C_2 = -\frac{[\nu P(a) + aP'(a)][\nu R(b) + bR'(b)]}{T + L} \quad (32)$$

olarak elde edilir, burada

$$T = -\nu P(b)[\nu Q(a) + aQ'(a)] + bQ'(b)[\nu P(a) + aP'(a)] \quad (33)$$

$$L = \nu Q(b)[\nu P(a) + aP'(a)] - bP'(b)[\nu Q(a) + aQ'(a)] \quad (34)$$

tanımları kullanılmıştır.



### 3.2.2. Rijid Şafta Sabitlenmiş Disk

Ortasından rijid bir şafta sabitlenmiş bir disk gözönüne alındığında diskin iç çapında deformasyon olmayacağı için radyal yer değiştirme  $u(a) = 0$  olmalıdır. Diskin serbest ucunda ise sınır koşulu daha önce olduğu gibi  $\sigma_r(b) = 0$  şeklindedir. Buna göre integral sabitleri

$$C_1 = -Q(a)K \quad (35)$$

$$C_2 = P(a)K \quad (36)$$

olarak belirlenir. Burada

$$K = \frac{\nu R(b) + bR'(b)}{Q(a)[\nu P(b) + bP'(b)] - P(a)[\nu Q(b) + bQ'(b)]} \quad (37)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

### 3.2.3. Sıkı Geçme ile Şafta Monte Edilmiş Disk

Bir şafta ortasından sıkı geçme yöntemiyle monte edilmek için ısıtılan disk soğuduğunda iç kısmında  $p$  kadar bir basınca maruz kalır, böylece diskin iç kısmı için sınır koşulu  $\sigma_r(a) = -p$  şeklinde yazılabilir. Diğer sınır koşulu ise  $\sigma_r(b) = 0$  olmalıdır. Buna göre  $C_1$  ve  $C_2$

$$C_1 = \left\{ \begin{array}{l} a \left( b \left[ EQ(a)R'(b) - p(1-\nu^2)Q'(b) \right] + \nu \left[ EQ(a)R(b) - p(1-\nu^2)Q(b) \right] \right) \\ + E \left[ \nu^2 Q(a)R(b) + b\nu Q(a)R'(b) \right] \end{array} \right\} / M \quad (38)$$

$$C_2 = \left\{ \begin{array}{l} -a \left( b \left[ EP(a)R'(b) - p(1-\nu^2)P'(b) \right] + \nu \left[ EP(a)R(b) - p(1-\nu^2)P(b) \right] \right) \\ + E \left[ \nu^2 P(a)R(b) + b\nu P(a)R'(b) \right] \end{array} \right\} / M \quad (39)$$

olarak belirlenir, burada

$$M = E \left\{ \begin{array}{l} bQ'(b)[aP'(a) + \nu P(a)] - aQ'(a)[bP'(b) + \nu P(b)] - \\ \nu(Q(a)[bP'(b) + \nu P(b)] - Q(b)[aP'(a) + \nu P(a)]) \end{array} \right\} \quad (40)$$

olarak tanımlanmıştır.

#### 4. SAYISAL SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde elde edilen sonuçlar aşağıdaki boyutsuz büyüklükler kullanılarak sunulacaktır.

$$\text{Açısal hız (rad cinsinden): } \Omega = \omega b \sqrt{\frac{\rho}{\sigma_0}}$$

$$\text{Gerilmeler: } \bar{\sigma}_j = \frac{\sigma_j}{\sigma_0}$$

$$\text{Yer değiştirme: } \bar{u} = \frac{uE}{b\sigma_0}$$

Bu tanımlarda kullanılan  $\sigma_0$  sabiti malzemenin akma gerilmesinin başlangıcını göstermektedir. Düzlem gerilme durumunda deviyatorik gerilme tensörü aşağıdaki forma indirgenir:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_r - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_m \end{bmatrix} \quad (41)$$

burada,  $\sigma_m$  hidrostatik gerilme olup,  $\sigma_m = (\sigma_r + \sigma_\theta)/3$  denkleğinden hesaplanır. Plastik deformasyonun başlamasını belirleyen akma gerilmesi von Mises akma kriterine göre deviyatorik gerilme bileşenleri cinsinden;

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} \quad (42)$$

şeklinde verilmektedir [14].  $i$  ve  $j$  indisleri üzerinden gerekli toplamalar yapılırsa, von Mises akma kriteri

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2} \quad (43)$$

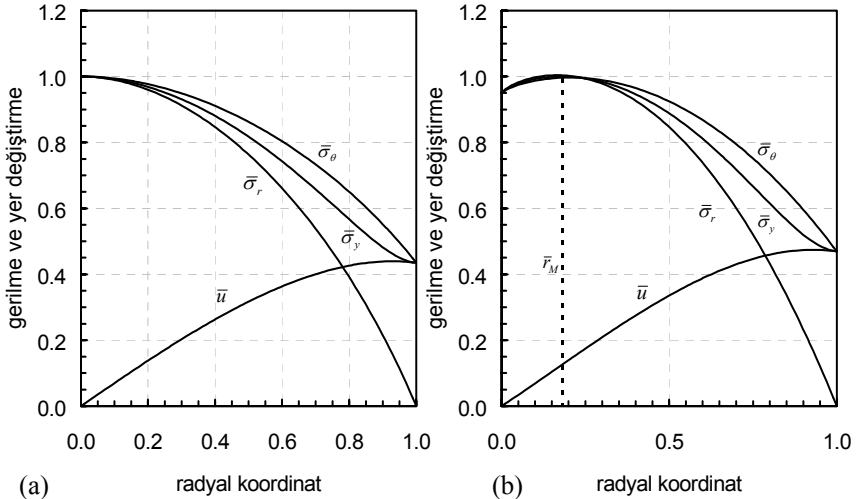
şeklinde elde edilir [12,14]. (41) denklemi yardımıyla hesaplanan boyutsuz akma gerilmesi  $\bar{\sigma}_Y = \sigma_Y / \sigma_0 = 1$  olduğu açısal hızda ve radyal konumda akma başlar.

##### 4.1. İçi Dolu Disk

$\nu = 0.3$  alınarak farklı profillere sahip bazı diskler için plastik deformasyonun başladığı kritik açısal hızlar hesaplanmıştır. Kalınlık profili Şekil 1a'da gösterilen ve geometrik parametreleri  $n = 0.4$  ve  $k = 2.4$  olan diskin kritik açısal hızı  $\Omega = 1.6886$  olarak hesaplanır. Bu açısal hızda elde edilen gerilme ve yer değiştirme

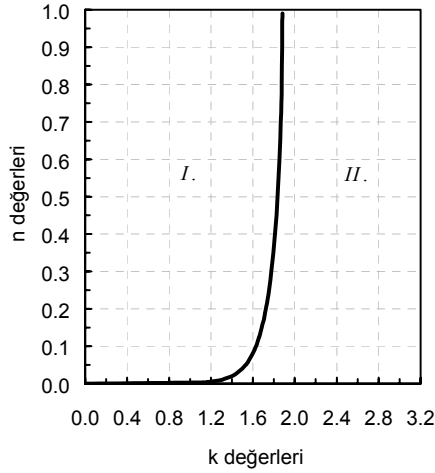
dağılımları ise Şekil 2a'da gösterilmektedir. Bu şekil [4] nolu referansda verilen grafiklerle karşılaştırıldığında bu diskin deformasyon davranışının sabit kalınlıklı diskin davranışına çok benzer olduğu anlaşılır. Gerilmeler tüm disk içerisinde  $\sigma_\theta \geq \sigma_r > 0$  eşitsizliğini sağlamaktadır. Böylece, plastik akma gerilmelerin en büyük olduğu disk merkezinde başlamakta ve burada oluşan plastik bölge artan açısız hızlarla diskin serbest ucuna doğru yayılmaktadır. Kalınlık profili Şekil 1b'de gösterilen konkav kalınlıklı diskin geometrik parametreleri  $n=0.4$  ve  $k=0.7$  kullanılarak elastik limit açısız hız  $\Omega=1.7223$  olarak belirlenir. Bu kritik hızda hesaplanan gerilme ve yer değiştirmeler Şekil 2b'de çizilmiştir. Bu şekilde görüldüğü gibi, konkav diskin gerilme durumu bir önceki diskten farklıdır. Bu diskde gerilmeler diskin merkeze yakın bölgesinde  $\sigma_r \geq \sigma_\theta > 0$  ve geri kalan kısmında ise  $\sigma_\theta \geq \sigma_r > 0$  eşitsizliklerini sağlamaktadırlar. Bu durum Eraslan ve Orçan [10] tarafından ele alınan konkav eksponensiyel diskin davranışını anımsatmaktadır. Plastik deformasyon diskin içerisinde bir konumda başlamakta ve artan açısız hızlarda bu plastik bölgenin her iki yönde yayılacağı anlaşılmaktadır. Şekil 2b'de  $\bar{r}_M$  ile gösterilen akmanın başladığı noktanın radyal koordinatı  $\bar{r}_M = 0.1818$  olarak hesaplanmıştır.

Görüldüğü gibi bazı  $n$  ve  $k$  değerleri için radyal gerilme bileşeni diskin tamamında teğetsel gerilme bileşeninden küçük, diğer bazı  $n$  ve  $k$  değerleri için ise diskin merkez bölgesinde teğetsel gerilme bileşeninden büyük olmaktadır ve buna göre de diskin plastik deformasyon karakteri değişmektedir. Şekil 2a ve 2b dikkatlice

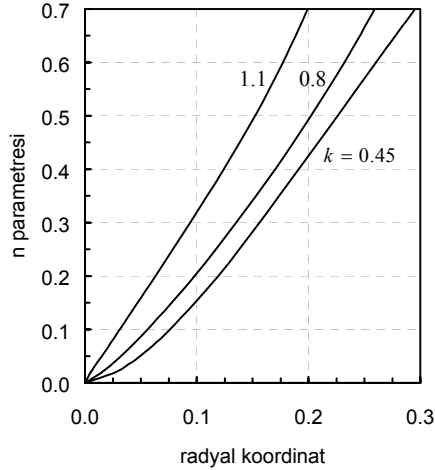


**Şekil 2.** İçi dolu disklerde gerilme ve yer değiştirmeler (a)  $n=0.4$ ,  $k=2.4$ ,  
(b)  $n=0.4$ ,  $k=0.7$

karşılaştırılırsa 2a diskinde disk simetri ekseninde  $\sigma'_r < 0$ , 2b de ise  $\sigma'_r > 0$  olduğu görülür. Diskin merkezinde  $\sigma'_r = 0$  sağlayan  $n$  ve  $k$  değerleri bulunarak bu iki farklı davranış arasındaki sınır çizilebilir. Bu sınır eğrisi Şekil 3'de verilmektedir. Bu şekilde I bölgesine düşen  $n$  ve  $k$  değerleri kullanılarak elde edilen diskler Şekil 2b'deki disk gibi, II bölgesine düşen geometrik parametrelerle elde edilen diskler ise sabit kalınlıklı disk gibi davranmaktadır. Şekil 4'de ise I bölgesinde bulunan diskler için plastik deformasyonun başladığı radyal koordinat  $\bar{r}_M$  nin  $n$  ve  $k$  parametreleri ile değişimi hesaplanarak çizilmiştir. Görüldüğü gibi kullanılan tüm  $k$  parametreleri



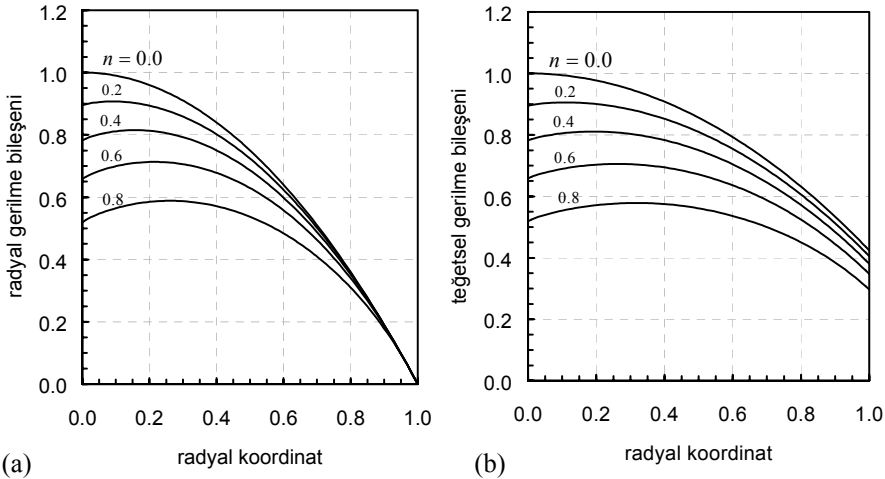
Şekil 3. Merkez  $r = 0$  da  $\sigma'_r(0) = 0$  değerini veren  $n - k$  eğrisi



Şekil 4. Plastik deformasyonun başladığı  $\bar{r}_M$  radyal koordinatının  $n$  ile değişimi

için  $n$  arttıkça, yani diskin ucu inceldikçe plastik deformasyonun başladığı radyal konum merkezden uzaklaşmaktadır. Bu bölümde son olarak, değişken kalınlıklı diskler içerisindeki gerilmeler sabit kalınlıklı disk gerilmeleri ile karşılaştırılacaktır. Bu amaçla önce  $n=0$  alınarak sabit kalınlıklı disk için elastik limit açısal hız hesaplanmış ve daha sonra aynı açısal hızda  $k=0.8$  ve değişik  $n$  değerleri için gerilmeler bulunmuştur.

Tüm bu hesaplamaların sonuçları Şekil 5a ve 5b’de sunulmuştur. Bu şekillerden görüldüğü gibi kalınlığı sabit diskde plastik deformasyonun başladığı hızda değişken kalınlıklı diskler elastik davranmakta ve en büyük gerilmeler sabit kalınlıklı disklerde meydana gelmektedir. Ayrıca, diskin ucu inceldikçe gerilme bileşenleri de küçülmektedir.



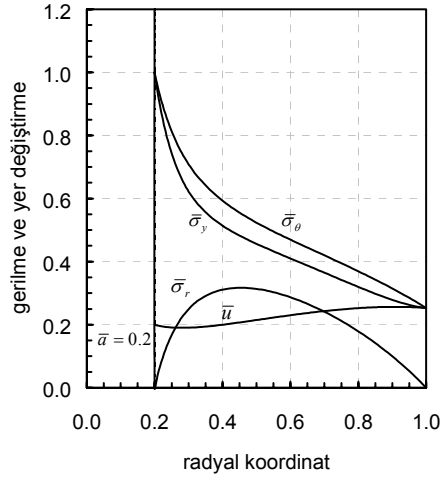
Şekil 5. Değişik  $n$  değerleri için içi dolu disklerde (a) radyal, (b) teğetsel gerilmeler

## 4.2. İçi Boş Diskler

### 4.2.1. Uçları Serbest Disk

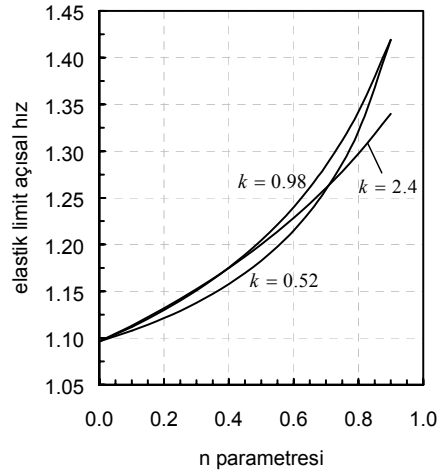
İçi dolu disklerde olduğu gibi  $\nu=0.3$  ve iç yarıçap  $\bar{a}=0.2$  alınarak  $n=0.4$ ,  $k=2.4$  değerleri için, iki ucu serbest içi boş diskde elastik limit açısal hız hesaplanmış ve bu hızda gerilme ve yer değiştirme dağılımları Şekil 6’da verilmiştir.

Bu şekilde görüldüğü gibi, bu diskde teğetsel gerilme bileşeni her yerde radyal gerilme bileşeninden büyüktür ve plastik deformasyon, teğetsel gerilme bileşeninin en büyük değerini aldığı disk iç yüzeyinde başlar. Çeşitli  $k$  değerleri için elastik



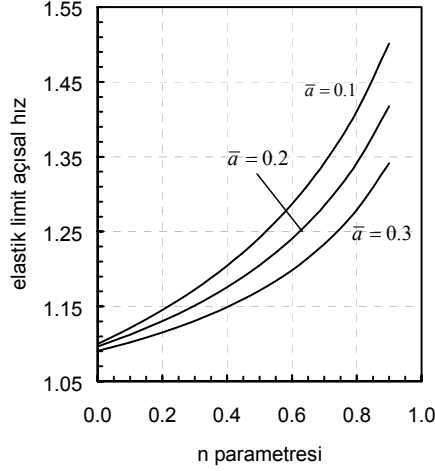
Şekil 6. Uçları serbest disklerde  $n = 0.4$ ,  $k = 2.4$  için gerilme ve yer değiştirmeler

limit açılma hızının  $n$  parametresi ile değişimi Şekil 7'de gösterilmektedir. Görüldüğü gibi elastik limit açılma hızı ile  $k$  parametresi arasında düzgün bir ilişki yoktur, ancak her  $k$  değeri için  $n$  arttıkça elastik limit açılma hızı da artmaktadır.  $k$  parametresine bağlı olmaksızın  $n = 0$  değerine karşılık gelen hız sabit kalınlıklı diske ait limit hızdır. Sabit kalınlıklı diskin elastik limit açılma hızı tüm değişken kalınlıklı disklerin hızlarından çok daha düşüktür. Diğer taraftan, diskin iç yarıçapı arttıkça elastik limit açılma hızı azalmaktadır.

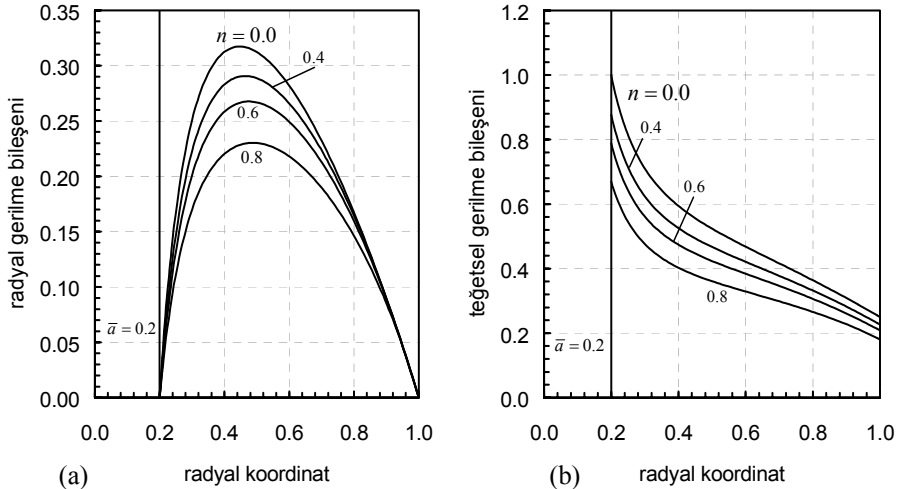


Şekil 7. Uçları serbest diskde elastik limit açılma hızının  $n$  parametresi ile değişimi

Şekil 8’de değişik iç yarıçapa sahip, lineer azalan kalınlıklı  $k=1$ , diskler için hesaplanan limit hızların  $n$  ile değişimi verilmiştir. Görüldüğü gibi aynı  $n$  değerindeki disklerden iç yarıçapı küçük olanın elastik limit açılma hızı daha büyüktür. Buradan aynı disk profiline sahip diskler için kütlesi az olanın limit açılma hızının da küçük olacağı sonucu çıkarılabilir. Değişken kalınlıklı içi boş ve uçları serbest diskler içerisindeki gerilmeler  $k=0.8$  alınarak ve aynı açılma hızı



Şekil 8. Uçları serbest diskde iç yarıçapın elastik limit açılma hızına etkisi

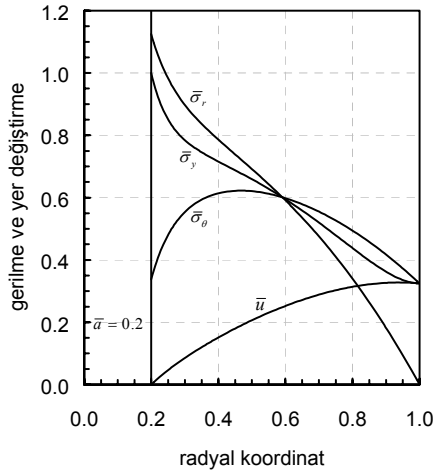


Şekil 9. Değişik  $n$  değerleri için uçları serbest disklerde (a) radyal, (b) teğetsel gerilmeler

kullanılarak Şekil 9'da sabit kalınlıklı disk gerilmeleri ile karşılaştırmalı olarak verilmektedir. Bu grafiklerden de anlaşılacağı gibi en büyük gerilmeler sabit kalınlıklı diskde ( $n = 0$ ) meydana gelmektedir ve diskin ucu inceldikçe gerilmeler azalmaktadır.

#### 4.2.2. Rijid Şafta Sabitlenmiş Disk

$\nu = 0.3$ ,  $\bar{a} = 0.2$ ,  $n = 0.4$  ve  $k = 0.8$  değerleri kullanılarak elastik limit açılma hızda rijid şafta sabitlenmiş değişken kalınlıklı bir disk içerisinde gerilme ve yer değiştirme profilleri Şekil 10'da verilmiştir.

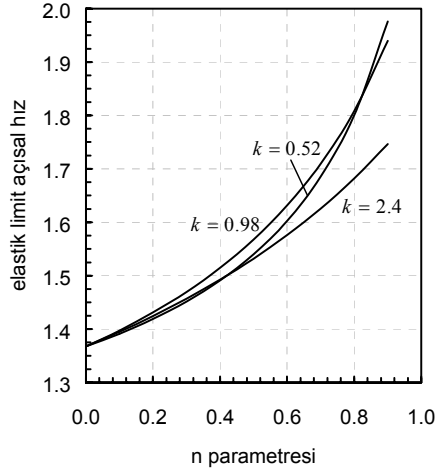


**Şekil 10.** Rijid şafta sabitlenmiş disklerde  $n = 0.4$ ,  $k = 0.8$  için gerilme ve yer değiştirmeler

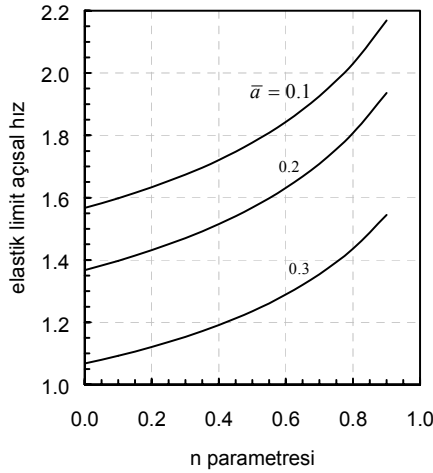
İki ucu serbest diskdeki gerilme dağılımının aksine bu disk içinde gerilmeler  $\sigma_r \leq \sigma_\theta < 0$  ve  $\sigma_\theta \leq \sigma_r < 0$  eşitsizliklerini sağlayan iki ayrı bölge oluşturmaktadırlar. Şekil 10'da akma gerilmesini gösteren  $\bar{\sigma}_y$  dağılımı takip edildiğinde plastik deformasyonun uçları serbest diskde olduğu gibi diskin iç yüzeyinde başladığı görülür. Değişik  $k$  değerleri için elastik limit açılma hızının  $n$  parametresi ile değişimi Şekil 11'de verilmektedir.

Her  $k$  parametresi için  $n$  arttıkça elastik limit açılma hızının arttığı görülmektedir.  $k = 1$  değeri kullanılarak iç yarıçapla elastik limit açılma hızı ilişkisi Şekil 12'de çizilmiştir.



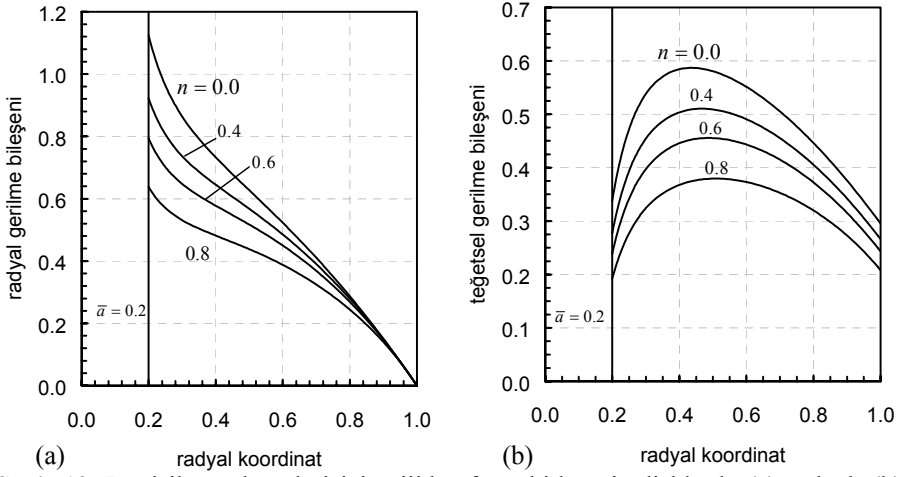


**Şekil 11.** Rijid şafta sabitlenmiş diskde elastik limit açısal hızın  $n$  parametresi ile değişimi



**Şekil 12.** Rijid şafta sabitlenmiş diskde iç yarıçapın elastik limit açısal hızı etkisi

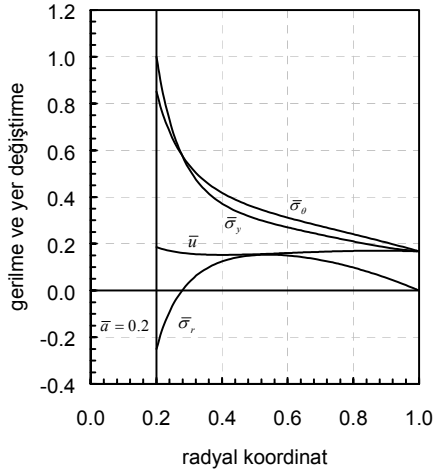
Şekil 13 ise kalınlığı uniform diskler için hesaplanan elastik limit açısal hızda  $k = 0.8$  ve değişik  $n$  değerleri kullanılarak elde edilen radyal ve teğetsel gerilme dağılımlarının değişimi görülmektedir. En büyük gerilmeler aynı hız için kalınlığı sabit disklerde meydana gelmektedir.



Şekil 13. Değişik  $n$  değerleri için rijid şafta sabitlenmiş disklerde (a) radyal, (b) teğetsel gerilmeler

#### 4.2.3. Sıkı Geçme ile Şafta Monte Edilmiş Disk

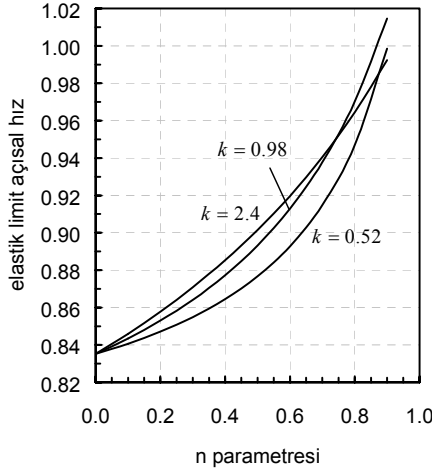
$\nu = 0.3$ ,  $\bar{a} = 0.2$ , iç yarıçapta oluşan basınç değeri  $\bar{p} = p/\sigma_0 = 0.25$  ve geometrik parametreler  $n = 0.4$ ,  $k = 0.8$  alınarak elastik limit açılarda elde edilen gerilme ve yer değiştirme dağılımları Şekil 14’de verilmiştir.



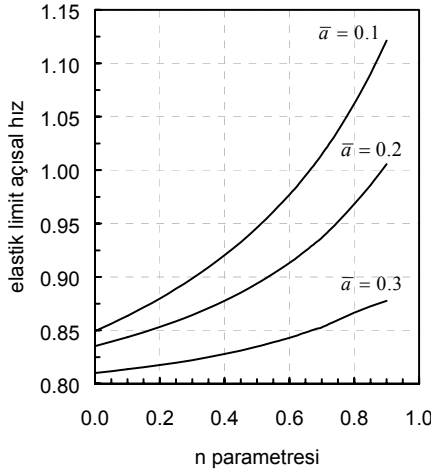
Şekil 14. Sıkı geçme ile rijid şafta bağlanan disklerde  $n = 0.4$ ,  $k = 0.8$  için gerilme ve yer değiştirmeler

Bu gerilim dağılımı uçları serbest disklerdeki benzer olmakla beraber burada radyal gerilme bileşeni disk arayüzünde kompresif olmaktadır. Plastik deformasyon bu disklerde de iç yüzeyden başlamakta ve daha yüksek açısız hızlarda diskin içerisine doğru yayılmaktadır. Şekil 15’de elastik limit açısız hızın  $n$  parametresi ile değişimi üç değişik  $k$  değeri için verilmiştir.

Şekil 16’da ise diskin değişen iç yarıçapının elastik limit açısız hıza etkisi  $k = 1$  için elde edilmiştir.

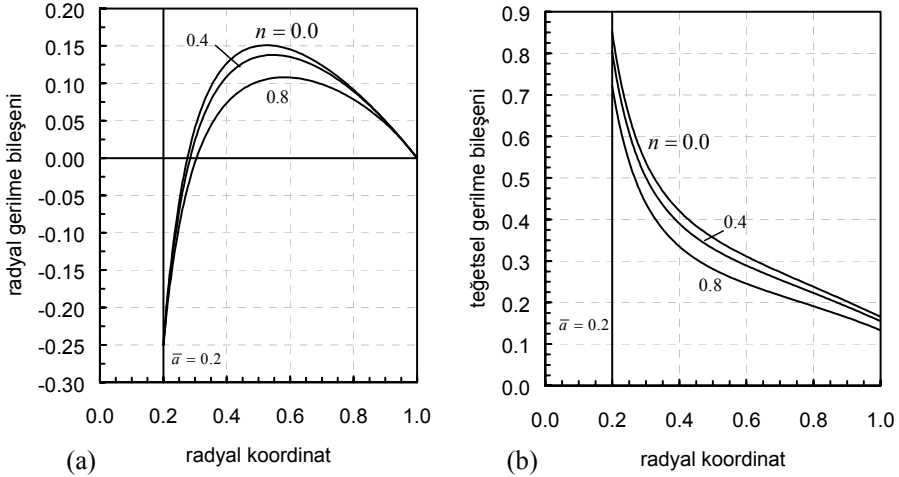


**Şekil 15.** Sıkı geçme ile rijid şafta bağlanan diskde elastik limit açısız hızın  $n$  parametresi ile değişimi



**Şekil 16.** Sıkı geçme ile rijid şafta bağlanan diskde iç yarıçapın elastik limit açısız hıza etkisi

$k = 0.8$  için radyal ve teğetsel gerilme dağılımları değişik  $n$  değerleri için hesaplanarak sırasıyla Şekil 17a ve 17b’de sunulmuştur. Diğer disklerde olduğu gibi en büyük gerilmeler aynı hız için kalınlığı sabit disklerde meydana gelmektedir.



Şekil 17. Değişik  $n$  değerleri için sıkı geçme ile rijid şafta bağlanan disklerde (a) radyal, (b) teğetsel gerilmeler

## KAYNAKLAR

1. Timoshenko, S.P. and Gooider, J.N., **Theory of Elasticity**, 3rd Edition, McGraw Hill, New York, 1970.
2. Rees, D.W.A., **The Mechanics of Solids and Structures**, , McGraw Hill, New York, 1990.
3. Uğural, A.C. and Fenster, S.K., **Advanced Strength and Applied Elasticity**, 3rd Edition, Prentice Hall International, London, 1995.
4. Gamer, U., “Elastic-Plastic Deformation of the Rotating Solid Disk”, **Ingenieur-Archiv**, 54, 345-354, 1984.
5. Gamer, U., “Stress Distribution in the Rotating Elastic-Plastic Disk”, **ZAMM**, 65, 4, 136-137, 1985.
6. Güven, U., “On the applicability of Tresca’s Yield Condition to the Linear Hardening Rotating Solid Disk of Variable Thickness”, **ZAMM**, 75, 397-398, 1995-a.
7. Güven, U., “Tresca’s Yield Condition and the Linear Hardening Rotating Solid Disk of Variable Thickness”, **ZAMM**, 75, 805-807, 1995-b.
8. Eraslan, A.N. and Orcan, Y., “Elastic-Plastic Deformations of a Rotating Solid Disk of Exponentially Varying Thickness”, **Mechanics of Materials** 34, 423-432, 2002.

9. Orcan, Y. and Eraslan, A.N., “Elastic-Plastic Stresses in Linearly Hardening Rotating Solid Disks of Variable Thickness”, **Mechanics Research Communications**, 29, 269-281, 2002.
10. Eraslan, A.N. and Orcan, Y., “On the Rotating Elastic-Plastic Solid Disks of Variable Thickness Having Concave Profiles”, **International Journal of Mechanical Sciences**, 44, 1445-1466, 2002.
11. Güven, U., “Elastic-Plastic Stress Distribution in a Rotating Hyperbolic Disk With Rijid Inclusion”, **International Journal of Mechanical Sciences**, 40, 97-109, 1998.
12. Eraslan, A.N. and Argeso, H., “Limit Angular Velocities of Variable Thickness Rotating Disks”, **International Journal of Solids and Structures**, 39, 3109-3130, 2002.
13. Abramowitz, M. and Stegun A.I. (Eds.), **Handbook of Mathematical Functions**. US Government Printing Office. Fifth Printing. Washington, 1966.
14. Mendelson, A., **Plasticity: Theory and Application**, The Macmillan Company, New York, 1968.