Gazi Üniv. Müh. Mim. Fak. Der.
Cilt 18, No 1, 35-44, 2003

J. Fac. Eng. Arch. Gazi Univ.
Vol 18, No 1, 35-44, 2003

ÜNİFORM İÇ ISI ÜRETİMİ ETKİSİNDE RİJİD BİR KILIF İÇİNE YERLEŞTİRİLMİŞ SİLİNDİRDE ELASTİK-PLASTİK GERİLME ANALİZİ

Müfit GÜLGEÇ* ve Banu ÇAKIR**
* Makina Mühendisliği Bölümü, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Gazi Üniversitesi, Maltepe 06750 Ankara **mufit@mmf.gazi.edu.tr**
** MKEK ELROKSAN A.Ş. Samsun Yolu 40. km. Elmadağ/Ankara
banu_cakir@hotmail.com

ÖZET

Bu çalışmada, uçları serbest, içerisinde üniform iç ısı üretimi olan, rijid bir kılıf içerisine yerleştirilmiş bir silindir için elastik-plastik gerilme analizi yapılmıştır. Silindir malzemesi elastik-mükemmel plastik malzeme olarak kabul edilmiştir. Analiz sırasında Tresca Akma Kriteri ve Birleşik Akış Kuralı kullanılmıştır. Silindir içerisindeki iç ısı üretimi belirli bir değere ulaştığında, silindirin dış yüzeyinde plastik bölge oluşmaktadır. İç ısı üretiminin bu değerin üzerinde arttırılmasıyla silindir tamamen plastik hale gelmektedir.

Anahtar Kelimeler: Rijid kılıflı silindir, birleşik akış kuralı, elastik-palstik gerilme analizi

ELASTIC-PLASTIC STRESS ANALYSIS OF A CYLINDER WITH RIGID CASING SUBJECTED TO A UNIFORM INTERNAL HEAT GENERATION

ABSTRACT

In this study, elastic-plastic stress analysis of a cylinder with rigid casing subjected to a uniform internal heat generation is made. Cylinder is assumed to be made of elastic-ideal plastic material. The analysis is based on Tresca's yield condition and the associated flow rule. At a critical heat generation rate, yielding starts at the outer boundary of the cylinder. Beyond this internal heat generation rate the plastic region propagates inwards and eventually the fully plastic state is reached.

Keywords: Cylinder with rigid casing, Associated flow rule, elastic-plastic stress analysis

1. GİRİŞ

Pek çok mühendislik elemanın tasarımındaki öneminden dolayı, termal ve/veya mekanik kuvvetlere maruz kalan silindirik ve küresel gövdelerin elastik-plastik davranışına olan ilgi gözardı edilemez. Malzemelerin ekonomik kullanımları açısından elastik bölgedeki davranışları kadar plastik bölgedeki davranışları da önemlidir. Plastik deformasyonun en büyük nedenlerinden biri de ısıl gerilmelerdir. Uygulamalara iki örnek, doğru akım ileten elektrik tellerinin iç direnç nedeniyle oluşturduğu ısı üretimiyle maruz kaldığı ısıl gerilmeler ve iç enerjinin nükleer fizyonla üretildiği katı nükleer yakıt elemanları olarak verilebilir.

Pratik önemi nedeniyle farklı uç şartlarında ve sıcaklık dağılımının etkisindeki silindir için elastik-plastik gerilme analizi ile ilgili çalışmalar literatürde yer almaktadır. [1-3]. Bu çalışmalarda akma kriteri olarak genellikle Tresca akma kriteri kullanılmış ve silindir tamamen plastik hale gelinceye kadar analiz devam ettirilmiştir. Çalışmalarda içi boş (boru) veya dolu silindirin dış yüzeyi gerilmesiz olarak kabul edilmiştir.

Bu çalışmada ise uçları serbest, üniform iç ısı üretimi etkisinde, elastik-mükemmel plastik bir malzemeden yapılmış, dışında rijid bir kılıf bulunan silindir için elastik-plastik gerilme analizi yapılmıştır. Analiz sırasında Tresca akma kriteri ve birleşik akış kuralı (Asssociated Flow Rule) kullanılmıştır. Silindir ile rijid kılıf arasındaki birleşme yüzeyi sürtünmesiz olarak kabul edilmiştir. Çalışmada önce elastik gerilme bağıntıları elde edilmiş ve yük parametresi arttırıldığında akmanın silindirin dış yüzeyinde başladığı görülmüştür. Bu yük parametresinin $\bar{q}_i'''$, üzerine çıkıldığında silindirin dış yüzeyinde başlayan plastik bölge silindirin merkezine doğru ilerlemiştir. $\bar{q}_p'''$ yük parametresinde ise silindir tamamen plastik hale gelmiştir.

2. TEORİ

2.1 Elastik Davranış

Genelleştirilmiş Düzlem Gerinim durumunda ve $T(r)$ sıcaklık dağılımı etkisindeki bir silindir için gerilme bileşenleri ve radyal deplasman aşağıdaki gibi ifade edilebilir [2].

$$\sigma_r = -\frac{E\alpha}{1-\nu}\theta + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} \tag{1}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha}{1-\nu}(\theta - T) + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} \tag{2}$$

$$\sigma_z = -\frac{E\alpha}{1-\nu}T + \nu C_1 + E\varepsilon_z \tag{3}$$

$$u = -\frac{(1+\nu)}{E}\frac{C_2}{r} + \left[\alpha\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\theta\right) + \frac{1}{2E}(1+\nu)(1-2\nu)C_1 - \nu\varepsilon_z\right]r \tag{4}$$

Bu ifadelerde σ_r radyal gerilme, σ_θ teğetsel gerilme, σ_z eksenel gerilme, u radyal deplasman, C_1 ve C_2 integral sabitleri, α ısıl genleşme sabiti, υ Poisson oranı, E elastisite modülü ve θ ise $\theta = \frac{1}{r^2}\int Trdr$ şeklinde bir kısaltmadır.

Katı bir silindir için $C_2 = 0$'dır. Silindirin dış yüzeyindeki rijid kılıf nedeniyle $r = b$'de radyal deplasmanın sıfır olması şartı kullanılarak C_1 integral sabiti aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$C_1 = \frac{2E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{-\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha\theta(0,b) + \alpha T(b) + \nu\varepsilon_z\right\} \tag{5}$$

eksenel gerinim ise,

$$\int_0^b \sigma_z(2\pi r)dr = 0 \tag{6}$$

serbest uç şartı kullanılarak,

$$\varepsilon_z = \frac{2(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha\theta(0,b) \tag{7}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadede

$$\theta(0,b) = \frac{1}{b^2}\int_0^b Trdr \tag{8}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Yüzeyi sabit sıcaklıkta tutulan ve içerisinde üniform q''' iç ısı üretimi olan bir silindir için sıcaklık dağılımı

$$T(r) = \frac{q'''}{4\lambda}(b^2 - r^2) \tag{9}$$

denklemi ile verilir [4]. Bu denklemde λ ısıl iletim katsayısıdır.

Sıcaklık dağılımı denklemi C_1 ve C_2 integral sabitleri, gerilme bileşenleri (1-3) ve radyal deplasman (4) denklemlerinde yerine konulup, boyutsuzlaştırma işlemi yapılırsa, aşağıdaki boyutsuz ifadeler elde edilebilir;

$$\bar{\sigma}_r = \frac{-\bar{q}'''}{16(1-\nu)}\left[3 - \bar{r}^2\right] \tag{10}$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \frac{3\bar{q}'''}{16(1-\nu)}\left[\bar{r}^2 - 1\right] \tag{11}$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{\bar{q}'''}{8(1-\nu)}\left[2\bar{r}^2 - 1\right] \tag{12}$$

$$u = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} r\alpha\left[\theta(0,r) - \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)}T(r) - \theta(0,b)\right] \tag{13}$$

bu ifadelerde, $\bar{\sigma}_i = \sigma_i / \sigma_0$ (i= r, θ, z) boyutsuz gerilme bileşenleri, $\bar{u} = Eu / \sigma_0 b$ boyutsuz radyal deplasman, $\bar{q}''' = E\alpha q''' b^2 / \sigma_0 \lambda$ boyutsuz yük parametresi, $\bar{r} = r/b$ boyutsuz yarıçap, σ_0 ise silindir malzemesinin referans sıcaklıktaki akma dayanımıdır.

$\bar{q}'''$ boyutsuz yük parametresi yavaş yavaş arttırılarak, boyutsuz gerilme bileşenleri boyutsuz yarıçapa göre grafiklenirse, akmanın silindirin dış yüzeyinde başlayacağı görülebilir. Silindirin dış yüzeyinde, σ_z en büyük normal gerilme, σ_r ise en küçük normal gerilmedir. Bu durum için Tresca akma şartı,

$$\sigma_z - \sigma_r = \sigma_0 \tag{14}$$

olmaktadır. (10) ve (12) denklemlerinde r yerine b (veya $\bar{r} = 1$) konularak elde edilen ifadeler (14) akma şartında yerine yazılırsa silindirin dış yüzeyinde akmaya neden olacak yük parametresi $\bar{q}_i'''$

$$\bar{q}_i''' = 4(1-\nu) \tag{15}$$

olarak bulunabilir. ν=0,295 olarak alındığında akmaya neden olacak boyutsuz yük parametresi $\bar{q}_i''' = 2{,}82$ olarak elde edilebilir. Bu yük parametresinin üzerine çıkıldığında, silindirin dış yüzeyinde başlayan plastik bölge genişleyerek silindirin merkezine doğru ilerler.

2.2. Plastik Davranış

$\bar{q}_i'''$ yük parametresinin üzerine çıkıldığında, silindirin dış yüzeyinden içe doğru ilerleyen bir plastik bölge $(r_1 \langle r \le b)$ oluşmaktadır. Silindirin merkezinde ise elastik bölge $(0 \le r \le r_1)$ bulunmaktadır. Plastik bölge için gerilmeler $\sigma_z \rangle \sigma_\theta \rangle \sigma_r$ eşitsizliğini sağlar ve Tresca akma şartı $\sigma_z - \sigma_r = \sigma_0$ şeklinde yazılabilir. Bu bölge için Birleştirilmiş Akış Kuralı aşağıdaki şekildedir;

$$d\varepsilon_\theta^p = 0 \tag{16a}$$

$$d\varepsilon_r^p = -d\varepsilon_z^p \tag{16b}$$

Plastik bölge için gerilme ve gerinim bileşenleri ve deplasman ifadelerini elde etmek için önce toplam gerinimler elastik, plastik ve ısıl gerinimlerin toplamı olarak ifade edilir;

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p + \alpha T \tag{17a}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p + \alpha T \tag{17b}$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^p + \alpha T \tag{17c}$$

(17c) ifadesinden ε_z^p çekilip, elde edilen ifade, $\varepsilon_r^p = -\varepsilon_z^p$ olduğu hatırlanarak, (17a) ifadesinde ε_r^p yerine konulabilir. Bu şekilde ε_r için elde edilen ifade de elastik gerinimler yerine Hooke kanunu kullanılarak gerilme bileşenleri cinsinden bir ifade bulunabilir. Benzer işlem, ε_θ gerinimini gerilme bileşenleri cinsinden bulmak için yapılabilir. ε_θ ve ε_r toplam gerinimleri,

$$\frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) = \varepsilon_r \tag{18}$$

uygunluk denkleminde konulup,

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{19}$$

denge denkleminde kullanılarak, σ_θ gerilme bileşeni için

$$r^2 \frac{d^2\sigma_\theta}{dr^2} + 3r\frac{d\sigma_\theta}{dr} - (1-2\nu)\sigma_\theta = \sigma_0 - E\varepsilon_z + E\alpha\left[T - r\frac{dT}{dr} - r^2\frac{d^2T}{dr^2}\right] \tag{20}$$

homojen olmayan Cauchy-Euler diferansiyel denklemi bulunabilir [5]. Bu diferansiyel denklem çözülürse,

$$\sigma_\theta = C_3 r^{-1+M} + C_4 r^{-1-M} + \frac{1}{(1-2\nu)}(-\sigma_0 + E\varepsilon_z) + + \frac{E\alpha}{2}\left[(2-M)\theta_1 + (2+M)\theta_2 - 2T\right] \tag{21}$$

ifadesi elde edilir. σ_r radyal gerilme bileşeni denge denklemi (19) kullanılarak

$$\sigma_r = \frac{C_3}{M}r^{-1+M} - \frac{C_4}{M}r^{-1-M} + \frac{1}{(1-2\nu)}(-\sigma_0 + E\varepsilon_z) + + \frac{E\alpha}{2M}\left[(2-M)\theta_1 - (2+M)\theta_2\right] \tag{22}$$

ve σ_z gerilme bileşeni ise akma şartı (14) kullanılarak

$$\sigma_z = \frac{C_3}{M}r^{-1+M} - \frac{C_4}{M}r^{-1-M} - \frac{2\nu}{(1-2\nu)}\sigma_0 - \sigma_0\beta T + \frac{E\varepsilon_z}{(1-2\nu)} + + \frac{E\alpha}{2M}\left[(2-M)\theta_1 - (2+M)\theta_2\right] \tag{23}$$

elde edilebilir. Yukarıdaki ifadelerde,

$$M = \sqrt{2(1-\nu)} \tag{24}$$

$$\theta_1 = r^{-1+M} \int T r^{-M} dr \tag{25}$$

$$\theta_2 = r^{-1-M} \int T r^{M} dr \tag{26}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Radyal deplasmanı elde etmek için (17b) denklemi kullanılacaktır. ε_θ^e , Hooke kanunu ve yukarıdaki gerilme bileşeni ifadeleri (21-23) kullanılarak ifade edilebilir. $\varepsilon_\theta^p = 0$ ve $\varepsilon_\theta = u/r$ olduğu hatırlanacak olursa, radyal deplasman aşağıdaki gibi bulunabilir;

$$Eu = \left(1 - \frac{2\nu}{M}\right)\left[C_3 r^M + \frac{(2-M)}{2} E\alpha r \theta_1\right] + \left(1 + \frac{2\nu}{M}\right)\left[C_4 r^{-M} + \frac{(2+M)}{2} E\alpha r \theta_2\right] - (1+\nu)\sigma_0 r + E\varepsilon_z r \tag{27}$$

(17c) denkleminden benzer şekilde faydalanılarak Hooke kanunu ve (21-23) ifadeleri kullanılarak eksenel plastik gerinim şu şekilde bulunabilir;

$$E\varepsilon_z{}^p = -E\varepsilon_r{}^p = -\frac{(1-\nu-\nu M)}{M}\left[C_3 r^{-1+M} + \frac{(2-M)}{2} E\alpha\theta_1\right] + \frac{(1-\nu+\nu M)}{M}\left[C_4 r^{-1-M} + \frac{(2+M)}{2} E\alpha\theta_2\right] - (1+\nu)E\alpha T \tag{28}$$

Böylece plastik bölge için de gerilme, plastik gerinim ve radyal deplasman ifadeleri elde edilmiş olur.

2.3. Sınır Şartları ve Çözüm Yöntemi

Elastik bölgedeki gerilme ve radyal deplasman ifadelerinde yer alan C_1 ve C_2 integral sabitleri, plastik bölge için C_3 ve C_4 integral sabitlerine ek olarak, ε_z ve r_1 elastik-plastik arayüz yarıçapı problemin bilinmeyenleridir. Bilinmeyenleri elde edebilmek için sınır, süreklilik şartları ve serbest uç şartı kullanılacaktır. $r = 0$ 'da elastik radyal deplasmanın sonlu olması şartından $C_2 = 0$ olarak bulunur. Diğer bilinmeyenler için aşağıdaki şartlar kullanılacaktır.

$$r = r_1 \qquad \sigma_r^p = \sigma_r^e \tag{29}$$

$$r = r_1 \qquad \sigma_z^e - \sigma_r^e = \sigma_0 \tag{30}$$

$$r = r_1 \qquad \varepsilon_r^p = 0 \tag{31}$$

$$r = b \qquad u^p = 0 \tag{32}$$

$$\int_0^{r_1} \sigma_z{}^e (2\pi r) dr + \int_{r_1}^{b} \sigma_z{}^p (2\pi r) dr = 0 \tag{33}$$

(29-32) sınır ve süreklilik denklemleri kullanılarak,

$$E\varepsilon_z = (1+\nu)\sigma_0 - \left(1-\frac{2\nu}{M}\right)\frac{(2-M)}{2}E\alpha\theta_1(r_1,b) -$$

$$\left(1+\frac{2\nu}{M}\right)\frac{(2+M)}{2}E\alpha\theta_2(r_1,b) - \left(1-\frac{2\nu}{M}\right)C_3 b^{-1+M} - \left(1+\frac{2\nu}{M}\right)C_4 b^{-1-M} \qquad (34)$$

$$C_1 = \frac{2}{(1-2\nu)}\left\{-\sigma_0 - \frac{E\alpha}{(1-\nu)}T(r_1) + \frac{E\alpha}{(1-\nu)}\theta(0,r_1) + E\varepsilon_z\right\} \qquad (35)$$

$$C_3 = \frac{1}{r_1^{-1+M}}\left\{C_4 r_1^{-1-M} + \frac{ME\alpha}{(1-\nu)(1-2\nu)}\left[2\nu\theta(0,r_1) - T(r_1)\right]\right\} \qquad (36)$$

$$C_4 = \frac{1}{2\nu r_1^{-1-M}}\left\{(1+\nu)E\alpha T(r_1) + \frac{2\nu(1-\nu-\nu M)}{(1-\nu)(1-2\nu)}E\alpha\theta(0,r_1)\right.$$

$$\left. - \frac{(1-\nu-\nu M)}{(1-\nu)(1-2\nu)}E\alpha T(r_1)\right\} \qquad (37)$$

ifadeleri bulunabilir. Problemin sonuncu bilinmeyeni r_1 ise serbest uç şartından (33) bulunabilir. (33) denklemindeki integraller alınırsa,

$$-\frac{E\alpha}{1-\nu}\int_0^{r_1} T(r)r\,dr + \nu C_1\frac{r_1^2}{2} + E\varepsilon_z\frac{r_1^2}{2}$$

$$+\frac{C_3}{M(1+M)}(b^{1+M} - r_1^{1+M}) - \frac{C_4}{M(1-M)}(b^{1-M} - r_1^{-1-M})$$

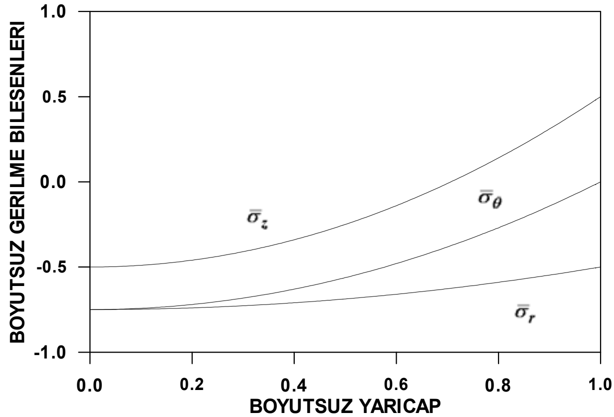
$$-\frac{\nu}{1-2\nu}\sigma_0(b^2 - r_1^2) + \frac{E\varepsilon_z}{1-2\nu}(b^2 - r_1^2)$$

$$+\frac{E\alpha}{2M}(2-M)\int_{r_1}^{b}\theta_1 r\,dr - \frac{E\alpha}{2M}(2+M)\int_{r_1}^{b}\theta_2 r\,dr = 0 \qquad (38)$$

ifadesi bulunabilir. Bu denklem sayısal olarak çözülürse, herhangi bir yük parametresine karşılık gelen r_1 elastik-plastik arayüz yarıçapı elde edilebilir.

3. SAYISAL SONUÇLAR

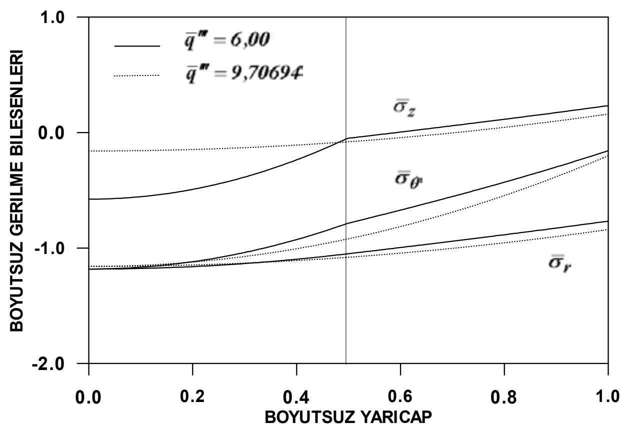
Sayısal sonuçlar elde edilirken Poisson oranı ν=0,295 olarak alınmıştır. Şekil 1'de, boyutsuz yük parametresi $\bar{q}_i''' = 2{,}82$ alındığında, akmanın silindirin dış yüzeyinde başladığını gösteren gerilme bileşenlerinin boyutsuz yarıçapa göre değişimi verilmektedir. Şekil 2'de $\bar{q}''' = 6{,}0$ ve $\bar{q}''' = 9{,}70694$ yük parametresi değerlerinde



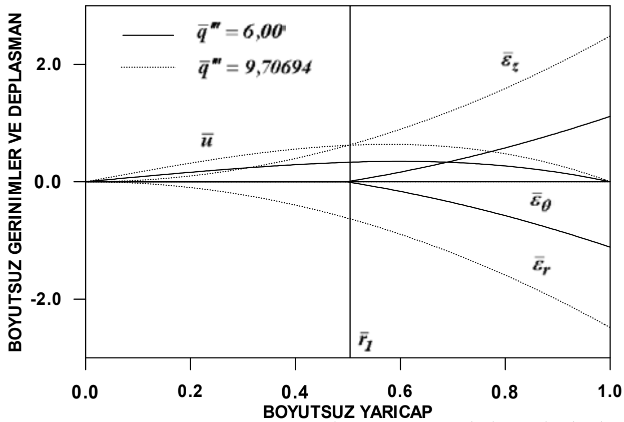
Şekil 1. $\bar{q}_i'''= 2,82$ yük parametresinde silindir içerisinde boyutsuz gerilme bileşenlerinin dağılımı

gerilme bileşenlerinin, Şekil 3'de ise aynı yük parametrelerinde plastik gerinim bileşenlerinin ve deplasmanın değişimi verilmiştir. $\bar{q}'''= 6,0$ yük parametresinde silindir dış yüzeyi ile $\bar{r}_1 = 0,49737$ yarıçapı arasındaki malzeme plastik olmaktadır. $\bar{q}'''= 9,70694$ yük parametresinde ise silindir tamamen plastik hale gelmiştir. Şekil 4'de boyutsuz yük parametresine göre boyutsuz elastik-plastik arayüz yarıçapının ($\bar{r}_1$) değişimi grafiklenmiştir.

Uçları serbest, yüzeyi gerilmesiz ve aynı sıcaklık dağılımı etkisindeki silindir için benzer analiz yapılarak elde edilen sonuçlarla [2], bu çalışmada elde edilen sonuçlar

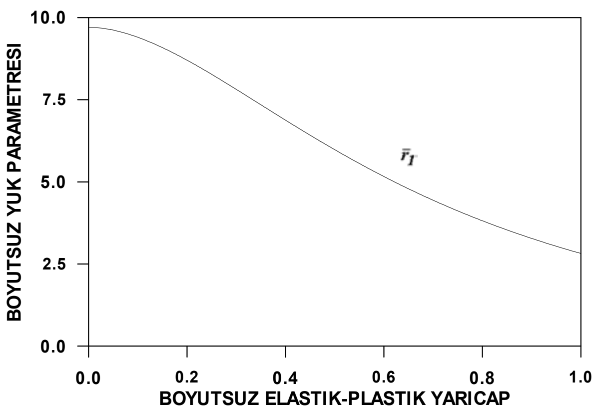


Şekil 2. $\bar{q}'''= 6,0$ ve $\bar{q}'''= 9,70694$ yük parametresi değerlerinde silindir içerisinde boyutsuz gerilme bileşenlerinin dağılımı



Şekil 3. $\bar{q}''' = 6{,}0$ ve $\bar{q}''' = 9{,}70694$ yük parametresi değerlerinde silindir içerisinde boyutsuz gerinim bileşenlerinin ve deplasmanın dağılımı

kıyaslandığında şu değerlendirmeler yapılabilir; silindirin dışına rijid kılıf yerleştirildiğinde akma, yüzeyi gerilmesiz silindirde akmaya neden olacak yük parametresinin ($\bar{q}_i''' = 5{,}64$) yarısında ($\bar{q}_i''' = 2{,}82$) başlamaktadır. Yüzeyi gerilmesiz silindirde, yük parametresi arttırıldığında silindirin dış yüzeyinde iki plastik, daha sonra silindirin merkezinde iki plastik bölge daha meydana gelirken, rijid kılıf içerisine yerleştirilmiş silindirde sadece bir plastik bölge meydana gelmektedir ve silindir daha küçük yük parametresinde $\bar{q}_p''' = 9{,}70694$ tamamen plastik hale gelmektedir.



Şekil 4. Boyutsuz elastik-plastik yarıçapın boyutsuz yük parametresine göre değişimi

KAYNAKLAR

1. Orçan Y., Gülgeç M., "Elastic-Plastic Deformation of a Tube with Free Ends Subjected to Internal Energy Generation" **Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences**, Cilt 25, No:6, 601-609, 2001.
2. Orçan, Y., "Thermal Stresses in a Heat Generating Elastic-Plastic Cylinder with Free Ends", **International Journal of Engineering Science**, Cilt 32, 883-897, 1994.
3. Gülgeç, M. ve Orçan, Y., " Elastic-Plastic Deformation of a Heat Generating Tube with Temperature Dependent Yield Stress", **International Journal of Engineering Science**, Cilt 38, 89-106, 2000.
4. Incropera, F. P., De Witt, D. P., **Fundamentals of Heat and Mass Transfer**, John Wiley and Sons, ABD, 1985.
5. Çakır Banu, **Üniform Isı Üretimi Etkisinde Rijid Kılıf İçine Yerleştirilmiş Silindirde Elastik-Plastik Gerilme Analizi**, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2002.