Gazi Üniv. Müh. Mim. Fak. Der.
Cilt 28, No 2, 401-408, 2013

Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University
Vol 28, No 2, 401-408, 2013

GENİŞLETİLMİŞ YUMUŞAK EĞİM EŞİTLİKLERİ İÇİN SONLU FARKLAR YAKLAŞIMI

Asu İNAN*, Lale BALAS*
*Gazi Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 06570, Maltepe, Ankara
asuinan@gazi.edu.tr, lalebal@gazi.edu.tr

(Geliş/Received: 04.12.2012; Kabul/Accepted: 07.02.2013)

ÖZET

Bu çalışmada dalgaların ilerlerken geçirdikleri değişimler irdelenmiştir. Hazırlanan sayısal modelde hızlı değişen topografyalarda geçerli olan genişletilmiş yumuşak eğim eşitlikleri çözülmüştür. Bu eşitlikler sapmayı, kırınımı, sığlaşmayı, yansımayı, liman rezonansını, yüksek dereceden taban etkilerini, dalga kırılması ve taban sürtünmesine bağlı sönümleyici terimleri içermektedir. Doğrusal olmayan dalga hızı ve grup hızı, daha hassas sonuçlar elde edebilmek için çözüme dâhil edilmiştir. Mac Cormack ve Noktasal Gauss Seidel yöntemleri bu yeni yaklaşımda bir arada kullanılmıştır. Sayısal model, yarı sığlaşma alanına [1] ve kıyıya paralel dalgakıran [2] fiziksel deneylerine uygulanmış, literatürdeki sayısal model ve fiziksel deney sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, sayısal modelin düzensiz topograflarda dalga ilerlemesini başarıyla benzeştirdiğini ortaya koymuştur.

Anahtar Kelimeler: Sapma, Kırınım, Sayısal Model, Genişletilmiş Yumuşak Eğim Eşitliği, Sonlu Farklar Metodu

A FINITE DIFFERENCE APPROACH FOR EXTENDED MILD SLOPE EQUATION

ABSTRACT

In this study, the numerical model for the determination of transformations of waves while propagating has been presented. This numerical model was developed to solve the extended mild slope equation that is applicable to the rapidly varying topographies. It includes the effects of wave refraction, diffraction, shoaling, reflection, harbor resonance, higher order bottom configurations; dissipative terms due to wave breaking and bottom friction. Nonlinear wave celerity and group velocity were introduced in the solution to obtain results that are more accurate. Mac Cormack Method and Point Gauss Seidel Method were applied together in the proposed new solution approach. The numerical model was tested on the semicircular shoaling area [1] and shoreparallel breakwater [2]. The comparison of the numerical model in the current study and the physical experiments that are present in the literature shows the reliability of the model for wave transformations and dissipations over uneven bottoms.

Keywords: Refraction, Diffraction, Numerical Model, Extended Mild Slope Equation, Finite Difference Method

1.GİRİŞ (INTRODUCTION)

Dalgalar açık denizden kıyıya doğru ilerlerken çeşitli değişimlere uğramaktadırlar. Bu değişimler hesaplanırken taban eğiminin etkisi göz önüne alınmaktadır. Taban eğiminin küçük olduğu kıyı alanları modellenirken yumuşak eğim eşitlikleri kullanılmaktadır. Dalgaların açık denizden sığ denize ilerlemelerinde gösterdikleri değişimlerin saptanması kıyı mühendisliği çalışmalarında önemli bir yer tutmaktadır. Saptanan dalga özellikleri, kıyı yapılarının tasarımında, karar destek ve erken uyarı sistemlerinde kullanılmaktadır. Yumuşak eğim eşitlikleri dalga transformasyonlarının benzeştirilmesinde sıklıkla kullanılmaktadır [3]. İlk olarak 1952 yılında Biesel yumuşak eğim kabulü ile yumuşak eğim eşitliğini geliştirmiştir [4]. Berkhoff, lineer teorinin kaotik bölgelerdeki sorunların üstesinden gelmek için sapma ve kırınım olaylarını bir arada inceleyen yumuşak eğim eşitliğini önermiştir [5]. Yumuşak eğim eşitlikleri Luke yaklaşımı ve Hamiltonian ilkesi kullanılarak elde edilmiştir [6, 7, 8, 9, 10]. Yumuşak eğim eşitliklerini çözmek için dört yaklaşım kullanılır [11]: Parabolik yaklaşım (11, 12, 13, 14), Hiperbolik yaklaşım [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21], eliptik eşitliğe uygulanan iterasyon yöntemleri [22, 23, 24], Gauss Yok Etme yöntemi [25]. 1990'lı yılların başına kadar yüksek dereceden taban etkileri ihmal edilmekteydi. Taban eğiminin karesi ve taban eğriliği hesaba katılarak modifiye yumuşak eğim eşitliği elde edildi [10, 26]. Böylece yumuşak eğim eşitliği ani değişen topografyalara uygulanabilir oldu. Bu çalışmada genişletilmiş yumuşak eğim eşitliği çözülmüştür [11, 27]. Bu eşitlik sapma, kırınım, sığlaşma, taban sürtünmesi ve dalga kırılması kayıpları, yansıma ve liman rezonansını bir arada içermektedir.

2. TEORİ (THEORY)

Bu çalışmada, yüksek dereceden taban etkilerini içeren, hızlı değişen topograflarda kullanılabilen genişletilmiş yumuşak eğim eşitliği sayısal olarak çözülmüştür. Burada kullanılan eşitlik, sapma, kırınım, sığlaşma, yansıma, dalga kırılması ve taban sürtünmesi kayıpları ve liman rezonansını içermektedir [11, 27, 28].

$$\nabla.\left(CC_g\nabla\phi\right)+k^2CC_g\left(1+if_{bd}\right)\phi+\left[f_1 g\nabla^2 h+f_2\left(\nabla h\right)^2 gk\right]\phi=0 \quad (1)$$

$$f_1=\frac{-4kh\cos(kh)+\sinh(3kh)+\sinh(kh)+8(kh)^2\sinh(kh)}{8\cosh^3(kh)\left[2kh+\sinh(2kh)\right]}-\frac{kh\tanh(kh)}{2\cosh^2(kh)} \quad (2)$$

$$f_2=\frac{\sec h^2(kh)}{6\left[2kh+\sinh(2kh)\right]^3}\begin{Bmatrix}8(kh)^4+16(kh)^3\sinh(2kh)-9\sinh^2(2kh)\cos(2kh)+\\12(kh)\left[1+2\sinh^4(kh)\right]\left[kh+\sinh(2kh)\right]\end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$f_{bd}=f_b+f_d \quad (4)$$

$$f_b=\frac{4f_w}{3\pi}\frac{a\sigma^2}{ng\sinh^3 kh} \quad (5)$$

$$f_d=\frac{\Gamma}{kh}\left(1-\frac{K^2}{4\gamma^2}\right) \quad (6)$$

Γ ve K amprik katsayılardır. Γ=0,4, K=0,15 değerindedir [25]. Isobe'nin çalışmasına dayanılarak, kırılma kontrolü için γ_b kırılma indeksi olarak tanımlanmaktadır [30].

$$\gamma_b=0{,}53-0{,}3\exp\left(-3\sqrt{h/L_0}\right)+ \\ 5m^{3/2}\exp\left[-45(\sqrt{h/L_0}-0{,}1)^2\right] \quad (7)$$

Çözüm yapılırken her zaman adımında γ ve γ_b hesaplanıp karşılaştırılmaktadır. $\gamma<\gamma_b$ ise f_d sıfıra eşitlenir. Aksi takdirde (6) nolu eşitlikte belirlenen f_d değeri kullanılmaktadır. Bu çalışmada, Isobe'nin kırılma indeksi [29] ve Dally vd.'nin önerdikleri kırılma enerji kaybı [30] formülleri kullanılmıştır. Jonsson ve Carlsen, dalga sürtünme faktörünün belirlenmesi için (8) nolu eşitliği önermişlerdir [31]. m_f=-0,08 değeri amprik olarak belirlenmiştir. a_{1m}/k_N < 2 olması koşulunda dalga sürtünme faktörü f_w=0,24 olarak hesaplamalara katılmakta; aksi takdirde (8) nolu eşitlikte hesaplanan değer kullanılmaktadır.

$$\frac{1}{4\sqrt{f_w}}+\log_{10}\frac{1}{4\sqrt{f_w}}=m_f+\log_{10}\frac{a_{1m}}{k_N} \quad (8)$$

Dalga ilerlemesi problemlerinin çözümünde daha hassas sonuçlar elde edebilmek için dalga hızının ve grup hızının lineer olmayan değerlerinin dikkate alınması gerekmektedir. Lineer olmayan etkiler, özellikle sapmanın kuvvetli olduğu sığ bölgelerde önem kazanmaktadır. Kirby ve Dalrymple, hem sığ deniz koşullarında hem de derin deniz koşullarında geçerli olan bir yöntem önermişlerdir [32]. Bu yöntem, sığ deniz koşullarında kullanılan eşitlikle [33], derin deniz koşulunda ise ikinci derece Stokes formülasyonu ile benzeşmektedir. Lineer olmayan dalga hızını ve grup hızını saptamak için dispersiyon ilişkisi kullanılmaktadır [34].

$$\sigma^2=gk\left(1+f_1'(kh)\varepsilon_*^2D\right)\tanh\left(kh+\varepsilon_* f_2'(kh)\right) \quad (9)$$

$$\varepsilon_*=ka \quad (10)$$

$$D=\frac{\cosh(4kh)+8-2\tanh^2(kh)}{8\sinh^4(kh)}=\frac{9-12\tanh^2(kh)+13\tanh^4(kh)-2\tanh^6(kh)}{8\tanh^4(kh)} \quad (11)$$

$$f_1'(kh)=\tanh^5(kh) \quad (12)$$

$$f_2'(kh)=\left(\frac{kh}{\sinh(kh)}\right)^4 \quad (13)$$

$$C=\frac{\sigma}{k} \qquad \text{ve} \qquad C_g=\frac{d\sigma}{dk} \quad (14)$$

'Eş. 14'teki yaklaşımlardan ve 'Eş. 9'daki dispersiyon ilişkisinden yararlanılarak lineer olmayan dalga hızı (C_N) ve lineer olmayan grup hızı (C_{gN}) hesaplanmaktadır.

$$C_N=\left(\frac{g}{k}\left(1+f_1'(kh)\varepsilon_*^2D\right)\tanh\left(kh+f_2'(kh)\varepsilon_*\right)\right)^{1/2} \quad (15)$$

$$C_{g_N}=\left(\frac{1}{2\sigma}\right)\begin{pmatrix}g\left(1+f_1'(kh)\varepsilon_*^2D\right)\tanh\left(kh+f_2'(kh)\varepsilon_*\right)+\\gk\tanh\left(kh+f_2'(kh)\varepsilon_*\right)Z+gk\left(1+f_1'(kh)\varepsilon_*^2D\right)Y\end{pmatrix} \quad (16)$$

$$Y=\sec h^2\left(kh+f_2'(kh)\varepsilon_*\right)\begin{bmatrix}h+af_2'(kh)+\\4\left(\frac{kh}{\sinh(kh)}\right)^3\left(\frac{h\sinh(kh)-kh^2\cosh(kh)}{\sinh^2 kh}\right)\end{bmatrix} \quad (17)$$

$$Z = \frac{1}{\left(8\sinh^4(kh)\right)^2} \times \left[\begin{array}{l} 8\sinh^4(kh) \\ \left[\begin{array}{l} \left(5h\tanh^4(kh)\sec h^2(kh)\right) \times \\ k^2a^2\left(\cosh(4kh) + 8 - 2\tanh^2(kh)\right) + \\ 2ka^2\tanh^5(kh)\left(\cosh(4kh) + 8 - 2\tanh^2(kh)\right) + \\ \tanh^5(kh)k^2a^2\left(4h\sinh(4kh) - 4h\tanh(kh)\sec h^2(kh)\right) \end{array} \right] - \\ 32h\sinh^3(kh)\cosh(kh) \\ \left[\tanh^5(kh)k^2a^2\left(\cosh(4kh) + 8 - 2\tanh^2(kh)\right)\right] \end{array} \right] \quad (18)$$

2.1. Sınır Koşulları (Boundary Conditions)

Kıyı mühendisliği problemlerinde dalga transformasyonları incelenirken sınırlardaki fiziksel sınır koşullarını gözönünde bulundurmak gerekmektedir. Uygulamada kullanılan sınır koşulları ise şunlardır: Akı sınır koşulu, rıhtım gibi yapılarda oluşan parçasal yansıma sınır koşulu, geçirgen dalgakıranlarda oluşan parçasal iletim sınır koşulu, laboratuar koşullarında oluşan tam yansıma sınır koşulu. Yumuşak eğim eşitliklerinde genellikle tam yansıma, parçasal yansıma ve akı sınır koşulları irdelenmektedir. Parçasal ve tam yansıma sınır koşulları genel bir biçimde (19) nolu eşitlikle tanımlanmaktadır [35].

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \left(ik\cos\theta \frac{1 - K_R \exp(ik\beta)}{1 + K_R \exp(ik\beta)} + \frac{1}{A_I}\frac{\partial A_I}{\partial n} \right)\phi \quad (19)$$

(19) nolu eşitliğin sağ tarafındaki birinci terim ilk defa Isaacson ve Qu tarafından önerilmiştir [36]. Farklı yaklaşma açıları ile gelen dalgaların parçasal yansıma sınır koşulunu ifade etmektedir. İkinci terim ise, Chen vd. tarafından sınırdaki dalga yüksekliği gradyanının etkisini hesaba katmak için önerilmiştir [35]. Bu terim lineer teoriye dayalıdır, bu nedenle enerji kaybını içermemektedir. Bu özellikten ötürü bu terim kırılmanın oluştuğu kıyılarda geçerliliğini kaybetmektedir. Bu nedenle bu terim ihmal edilebilir. Böylece parçasal yansıma sınır koşulu genel bir biçimde (20) nolu eşitlikle yazılabilmektedir [35].

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + \alpha^* k\phi = 0 \quad (20)$$

Kompleks iletim katsayısı($\alpha^* (= \alpha_1 + i\alpha_2)$) sınırdaki enerji transferi, dalga yüksekliği, dalga fazı, yansıma katsayısı ile ilişkilidir. Gelen ve yansıyan dalganın, sınırdaki toplam potansiyel fonksiyonu (21) nolu eşitlikte verilmiştir. (21) nolu eşitlik, (20) nolu eşitliğe yerleştirildiğinde α_1 ve α_2 katsayıları bulunmaktadır. Bu eşitlikler iletim katsayılarının, yansıma katsayısı, gelen dalganın açısı ve gelen dalga ile yansıyan dalganın arasındaki faz farkı arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Yumuşak eğim eşitiliğinin çözümlerinde genellikle gelen dalga ile yansıyan dalganın arasındaki faz farkı ihmal edilmektedir.

$$\phi = A\left\{ \begin{array}{l} \exp\left[ik\left(x\cos\theta + y\sin\theta\right)\right] + \\ K_R \exp\left[-ik\left(x\cos\theta - y\sin\theta\right) + i\beta\right] \end{array} \right\} \quad (21)$$

3. SAYISAL YÖNTEM (NUMERICAL METHOD)

Sonlu farklar yöntemi, dalga eşitliklerinin çözümünde sıklıkla kullanılan bir yöntemdir [37]. Mac Cormack Metodu ile Nokta Gauss Seidel Metodu (1) nolu eşitlik için birarada kullanılmış ve düzensiz çözüm ağına uygulanmıştır [38].

$$\nabla \cdot \left(CC_g \nabla\phi\right) = \left[\begin{array}{l} C\left(\frac{\partial C_g}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + C_g\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) + C_g\left(\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + C\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) + \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}\left(C\frac{\partial C_g}{\partial x} + C_g\frac{\partial C}{\partial x}\right) + C\left(\frac{\partial C_g}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y} + C_g\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) + \\ C_g\left(\frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y} + C_g\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial \phi}{\partial y}\left(C\frac{\partial C_g}{\partial y} + C_g\frac{\partial C}{\partial y}\right) \end{array} \right] \quad (22)$$

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x}\left(C\frac{\partial C_g}{\partial x} + C_g\frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial \phi}{\partial y}\left(C\frac{\partial C_g}{\partial y} + C_g\frac{\partial C}{\partial y}\right) + \\ CC_g\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + CC_g\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \\ \frac{\phi}{2}\left(\begin{array}{l} k^2 CC_g\left(1 + if_{bd}\right) + \\ f_1 g\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) + f_2 gk\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 \end{array} \right) = 0 \end{array} \quad (23)$$

Mac Cormack yöntemi, çoklu adım yöntemidir. Bu yöntemde önce tahmini değer, sonra düzeltilmiş değer hesaplanır. İki adımda hesaplanan değerler gerçeğe daha yakındır. Birinci adımda, birinci derece türevler ileri sonlu farklar yöntemiyle ($O(\Delta x)$ ve $O(\Delta y)$) hata mertebesinde açılmıştır. İkinci derece türevler ise merkezi sonlu farklar yöntemiyle ($O(\Delta x^2)$ ve $O(\Delta y^2)$) hata mertebesinde açılmıştır. Düzeltilmiş değerin hesaplandığı ikinci adımda birinci derece türevler geri sonlu farklar yöntemiyle ($O(\Delta x)$ ve $O(\Delta y)$) hata mertebesinde çözülmüştür. Bu adımda ikinci derece türevler merkezi sonlu farklar yöntemiyle ($O(\Delta x^2)$ ve $O(\Delta y^2)$) hata mertebesinde açılmıştır. Mac Cormack yöntemi özellikle lineer olmayan denklemlerin çözümünde stabilite açısından kolaylık sağlamaktadır. Çözümün önce ileri, sonra geri sonlu farklar yöntemleriyle açılmasıyla sayısal dispersiyon problemi en aza indirgenmiştir. Noktasal Gauss Seidel yöntemi kullanılarak daha önce hesaplanan noktalar hemen işleme dâhil edilmiştir. Böylece iterasyon sayısının azaltılması hedeflenmiş ve çözüm hızının arttırılması sağlanmıştır. Birinci adımın açılımı (26) nolu eşitlikte verilmiştir.

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\phi^{k}_{i+1,j}-\phi^{*}_{i,j}}{\alpha_2\Delta x}\right)\left[C_{i,j}\left(\frac{C_{gi+1,j}-C_{gi,j}}{\alpha_2\Delta x}\right)+C_{g_{i,j}}\left(\frac{C_{i+1,j}-C_{i,j}}{\alpha_2\Delta x}\right)\right]+\\
&\left(\frac{\phi^{k}_{i,j+1}-\phi^{*}_{i,j}}{\beta_2\Delta y}\right)\left[C_{i,j}\left(\frac{C_{gi,j+1}-C_{gi,j}}{\beta_2\Delta y}\right)+C_{g_{i,j}}\left(\frac{C_{i,j+1}-C_{i,j}}{\beta_2\Delta y}\right)\right]+\\
&C_{i,j}C_{gi,j}\left[\frac{2\phi^{k}_{i+1,j}}{\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)\Delta x^2}-\frac{2\phi^{*}_{i,j}}{\alpha_1\alpha_2\Delta x^2}+\frac{2\phi^{k+1}_{i-1,j}}{\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)\Delta x^2}\right]+\\
&C_{i,j}C_{gi,j}\left[\frac{2\phi^{k}_{i,j+1}}{\beta_2(\beta_1+\beta_2)\Delta y^2}-\frac{2\phi^{*}_{i,j}}{\beta_1\beta_2\Delta y^2}+\frac{2\phi^{k+1}_{i,j-1}}{\beta_1(\beta_1+\beta_2)\Delta y^2}\right]+\\
&\frac{\phi^{k}_{i,j}}{2}\left[\begin{aligned}&k_{i,j}{}^{2}C_{i,j}C_{gi,g}\left(1+if_{i,j}\right)+\\
&f_1 g\left[\begin{aligned}&\frac{2h_{i+1,j}}{\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)\Delta x^2}-\frac{2h_{i,j}}{\alpha_1\alpha_2\Delta x^2}+\frac{2h_{i-1,j}}{\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)\Delta x^2}+\\
&\frac{2h_{i,j+1}}{\beta_2(\beta_1+\beta_2)\Delta y^2}-\frac{2h_{i,j}}{\beta_1\beta_2\Delta y^2}+\frac{2h_{i,j-1}}{\beta_1(\beta_1+\beta_2)\Delta y^2}\end{aligned}\right]+\\
&f_2 g k_{i,j}\left(\frac{h_{i+1,j}-h_{i,j}}{\alpha_2\Delta x}+\frac{h_{i,j+1}-h_{i,j}}{\beta_2\Delta y}\right)^2\end{aligned}\right]=0
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$$\phi^{k+1/2}_{i,j}=\frac{1}{2}\left(\phi^{k}_{i,j}+\phi^{*}_{i,j}\right) \tag{25}$$

Birinci adımın açılımından yararlanılarak tahmini değer hesaplanmaktadır. $\phi^{*}_{i,j}$ değeri birinci adımda hesaplanan ara bir değerdir. Bu değerden yararlanılarak ikinci adımda kullanılacak $\phi^{k+1/2}_{i,j}$ değeri hesaplanır. İkinci adımın açılımı (26) nolu eşitlikte verilmiştir.

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\phi^{k+1}_{i,j}-\phi^{k+1}_{i-1,j}}{\alpha_1\Delta x}\right)\left[C_{i,j}\left(\frac{C_{gi,j}-C_{gi-1,j}}{\alpha_1\Delta x}\right)+C_{g_{i,j}}\left(\frac{C_{i,j}-C_{i-1,j}}{\alpha_1\Delta x}\right)\right]+\\
&\left(\frac{\phi^{k+1}_{i,j}-\phi^{k+1}_{i,j-1}}{\beta_1\Delta y}\right)\left[C_{i,j}\left(\frac{C_{gi,j}-C_{gi,j-1}}{\beta_1\Delta y}\right)+C_{g_{i,j}}\left(\frac{C_{i,j}-C_{i,j-1}}{\beta_1\Delta y}\right)\right]+\\
&C_{i,j}C_{gi,j}\left[\frac{2\phi^{k}_{i+1,j}}{\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)\Delta x^2}-\frac{2\phi^{k+1}_{i,j}}{\alpha_1\alpha_2\Delta x^2}+\frac{2\phi^{k+1}_{i-1,j}}{\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)\Delta x^2}\right]+\\
&C_{i,j}C_{gi,j}\left[\frac{2\phi^{k}_{i,j+1}}{\beta_2(\beta_1+\beta_2)\Delta y^2}-\frac{2\phi^{k+1}_{i,j}}{\beta_1\beta_2\Delta y^2}+\frac{2\phi^{k+1}_{i,j-1}}{\beta_1(\beta_1+\beta_2)\Delta y^2}\right]+\\
&\frac{\phi^{k+1/2}_{i,j}}{2}\left[\begin{aligned}&k_{i,j}{}^{2}C_{i,j}C_{gi,g}\left(1+if_{i,j}\right)+\\
&f_1 g\left[\begin{aligned}&\frac{2h_{i+1,j}}{\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)\Delta x^2}-\frac{2h_{i,j}}{\alpha_1\alpha_2\Delta x^2}+\frac{2h_{i-1,j}}{\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)\Delta x^2}+\\
&\frac{2h_{i,j+1}}{\beta_2(\beta_1+\beta_2)\Delta y^2}-\frac{2h_{i,j}}{\beta_1\beta_2\Delta y^2}+\frac{2h_{i,j-1}}{\beta_1(\beta_1+\beta_2)\Delta y^2}\end{aligned}\right]+\\
&f_2 g k_{i,j}\left(\frac{h_{i,j}-h_{i-1,j}}{\alpha_1\Delta x}+\frac{h_{i,j}-h_{i,j-1}}{\beta_1\Delta y}\right)^2\end{aligned}\right]=0
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Dalga yükseklikleri ise sığlaşma ve sapma katsayıları ile belirlenmektedir [11]. Lineer teori ile hesaplanan bu değerler ana denklemdeki kompleks potansiyel fonksiyonun hesabı ve başlangıç tahminleri için kullanılmaktadır. Yeni kompleks` potansiyel fonksiyonu değeri (ϕ), yeni yaklaşım açısının (θ) bulunması için kullanılır. Yaklaşım açısına bağlı olarak x ve y yönündeki dalga numaraları k_x ve k_y hesaplanır. Bu prosedür yeni ve eski kompleks potansiyel fonksiyonunun aralarındaki hata kabul edilebilir bir noktaya gelene kadar tekrarlanmaktadır [11].

$$\phi_g=\frac{igH}{2\sigma}e^{is} \tag{27}$$

$$s=k_{xi}+k_{yi}-\sigma t=k\cos\theta x-k\sin\theta y-\sigma t \tag{28}$$

4. SAYISAL MODELİN UYGULANMASI VE TARTIŞMA
(APPLICATION OF NUMERICAL MODEL AND DISCUSSION)

4.1. Yarı Dairesel Sığlaşma Alanında Uygulama
(Application to Semicircular Shoaling Area)

Whalin, dalgaların yarı dairesel sığlaşma bölgesinde lineer olmayan sapma ve kırınımını irdelemek için bir laboratuvar çalışması yürütmüştür Model topoğrafyası aşağıdaki eşitliklerle ifade edilmektedir [1].

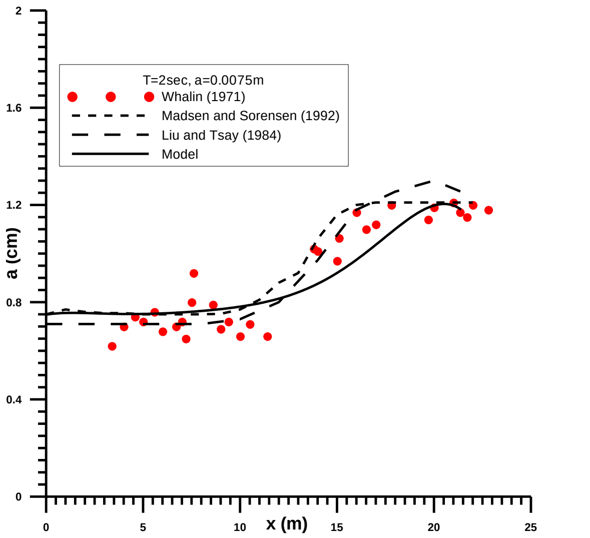
$$h(x,y)=0{,}4572 \qquad (0\le x\le 10{,}67-G(y)) \tag{29}$$

$$h(x,y)=0{,}4572+\frac{1}{25}\left(10{,}67-G(y)-x\right)$$
$$(10{,}67-G(y)\le x\le 18{,}29-G(y)) \tag{30}$$

$$h(x,y)=0{,}1524 \qquad (18{,}29-G(y)\le x\le 21{,}34) \tag{31}$$

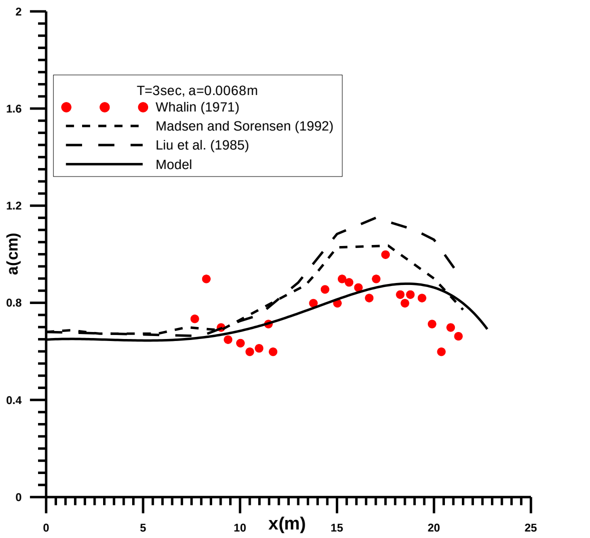
$$G(y)=\left[y\left(6{,}096-y\right)\right]^{1/2} \qquad (0\le y\le 6{,}096) \tag{32}$$

Bu eşitliklerdeki x ve y uzunlukları metredir. Topoğrafya y=3,048m merkez eksenine göre simetriktir. Model tabanı 0,4572m'den başlayıp 0,1524m'ye kadar sığlaşmaktadır. Fiziksel deney T=2s, T=3s dalga dönemleri için yapılmıştır. Her dalga dönemi için farklı dalga yükseklikleri ile çalışılmıştır. Dalga üretici derinliğin 0,4572m olduğu yere yerleştirilmiştir (y=0). Dalgalar lineer olarak üretilmiştir. Tankın ilerleme yönündeki x=15m'de, (eğimli bölge geçilip sığ alana girilen yer), dalga yüksekliklerinde artış olmaktadır [38]. Lineer sapma teorisi dalga ışınlarının birbirini kestiği ve dalga yüksekliklerinin sonsuza ıraksadığı bölgelerde kaotik bir hal almaktadır. Bu nedenle dalgalar sığ bölgeye doğru ilerledikçe lineer sapma teorisi geçerliliğini yitirmektedir. Kırınım etkisi baskın hale gelmektedir. Bu yüzden sapma ve kırınım etkilerinin birarada irdelenmesi gerekmektedir. T=2s için deney sonuçları [1], lineer olmayan model sonuçları [39] ve Madsen ve Sorensen'in elde ettiği sonuçlar [40] şekil 1'de verilmiştir. Sayısal modelde, T=2s için çözüm ağı aralıkları x- yönünde Δx=0,0125m, y- yönünde Δy=0,0127m kullanılmıştır.



Şekil 1: x-ekseni boyunca dalga büyüklüğünün değişimi ($y = 3{,}048m$)
(Variation of wave amplitude along x-axis)

Şekil 2'de T=3s iken x-yönünde dalga büyüklüğünün değişimi verilmiştir. Sayısal model, Whalin'in deney sonuçları, Madsen ve Sorensen, ayrıca Liu vd'nin sayısal model sonuçları karşılaştırılmıştır [1, 40 ,41]. Sayısal modelde, T=3s için çözüm ağı aralıkları x-yönünde Δx=0,025m, y- yönünde Δy=0,0254m olarak kullanılmıştır.



Şekil 2: x - ekseni boyunca dalga büyüklüğünün değişimi ($y = 3{,}048m$)
(Variation of wave amplitude along x-axis)

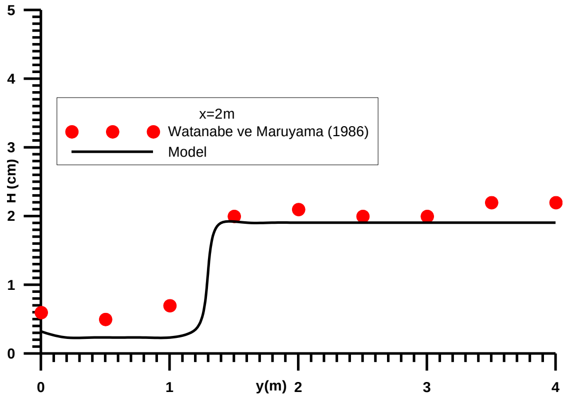
Çizelge 1'de sayısal yöntem ve literatürdeki diğer sayısal modellerden elde edilen sonuçları ile deney sonuçları arasındaki hata analizleri verilmektedir. T=2s için sayısal yöntemin RMSE (ortalama karekök hatası) değeri diğer sayısal modellerden fazla olmakla birlikte, BIAS (yanlılık) değeri daha küçüktür. T=2s için diğer sayısal modeller daha iyi çalışmaktayken, sayısal yöntem artan dalga periyodu için çok daha başarılı benzeşim yapmaktadır. Diğer sayısal modellerin hata miktarları dalga periyodunun artması ile artarken, sayısal yöntemin T=3s için uygulanması ile hata miktarları büyük oranda küçülmektedir.

Çizelge 1: Hata analizleri karşılaştırılması (Comparison of Error Analysis)

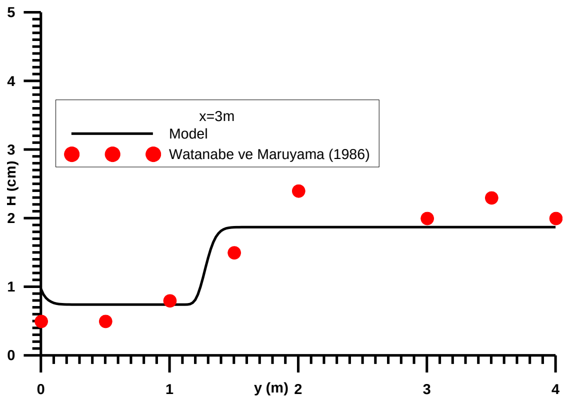
		RMSE (cm)	BIAS (cm)
T=2sec	Madsen and Sorensen (1992)	0,0836	-0,0608
	Liu and Tsay (1984)	0,0689	-0,0295
	Model	0,0938	0,0057
T=3sec	Madsen and Sorensen (1992)	0,1628	-0,1387
	Liu et al. (1985)	0,2361	-0,1893
	Model	0,0105	-0,0219

4.2. Kıyıya Paralel Dalgakıran Uygulaması
(Application of Shoreline Parallel Breakwater)

Watanabe ve Maruyama, kıyıya paralel dalgakıran olduğunda dalgaların etkisi altında kaldıkları kırınım olayını gözlemlemek için deney düzeneği hazırlamışlardır [2]. Hazırladıkları deney topografyasının eğimi 1/50'dir. Dalgakıran suyun 6cm olduğu yere yerleştirilmiştir. Derin deniz dalga yüksekliği H_o=2cm ve dalga periyodu T=1,2s'dir. Deney düzeneği 8m genişlikte olup, dalgakıranın boyu 2,67m'dir. Çözüm ağı uzunlukları x ve y yönlerinde 2cm olarak alınmıştır. Şekil 3 ve Şekil 4'te farklı kesitlerde dalga yüksekliklerinin karşılaştırılması verilmektedir.



Şekil 3. x=2m iken dalga yüksekliği dağılımı
(Distribution of wave heights at x=2m)



Şekil 4. x=3m iken dalga yüksekliği dağılımı
(Distribution of wave heights at x=3m)

Dalgakıranın arkasında kalan bölgede dalga yüksekliklerinin kırınımın etkisiyle belirgin miktarda azaldığı görülmektedir. Dalgakırandan uzaklaştıkça kırınım etkisi de azalmaktadır. Çizelge 2'de hata analizleri verilmiştir. x=2m'de iken RMSE değeri daha küçükken, BIAS değeri daha büyüktür. Elde edilen sonuçlar, sayısal modelin kırınım etkisini başarıyla benzeştirdiğini göstermektedir.

Çizelge 2: Hata analizleri (Error Analysis)

	RMSE (cm)	BIAS (cm)
x=2m	0,2769	0,2578
x=3m	0,3643	0,0925

5. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Dalgaların açık denizden kıyıya doğru ilerken gösterdikleri değişimlerin saptanması kıyı mühendisliği tasarımlarında ve erken uyarı sistemlerinde önemli bir önceliğe sahiptir. Kıyı bölgesine inşa edilecek herhangi bir yapının tasarımında bölgedeki dalga dağılımının bilinmesi gerekmektedir. Yumuşak eğim eşitlikleri dalgaların kıyıya doğru ilerken uğradıkları değişimleri çözümlemektedir. Lineer sapma teorisi, dalga ışınlarının birbirini kestiği ve dalga yüksekliklerinin sonsuza ıraksadığı kaotik bölgelerde geçerliliğini yitirmektedir. Bu sorunu aşabilmek için dalga sapma ve kırınımının birarada çözülmesi gerekmektedir. Yumuşak eğim eşitliği, dalga sapması ve kırınımının yanısıra sığlaşma ve yansıma etkilerini de aynı anda içermektedir, ancak sadece yumuşak taban eğimine sahip topoğrafyalarda geçerlidir. Ancak taban topoğrafyasının ani değişimlere uğradığı bölgelerde başarılı bir benzeşim yapamamaktadır. Genişletilmiş yumuşak eğim eşitliği ise taban eğimini ve taban eğriliğini de hesaba katarak bu problemin üstesinden gelmektedir. Ayrıca dalga kırılması ve taban sürtünmesinden dolayı oluşan kayıpları da içererek gerçeğe daha yakın bir benzeştirme yapılmaktadır. Hazırlanan sayısal model ile, genişletilmiş yumuşak eğim eşitliği açık formda geliştirilmiş Mac Cormack yöntemi ile benzeştirilmiştir. Mac Cormack Yöntemi ve Noktasal Gauss Seidel Yöntemi birarada uygulanmış ve farklı bir sayısal çözüm yöntemi önerilmiştir. Bu yöntem Çok Adımlı Mac Cormack yöntemine yeni bir yaklaşım getirmiştir. Mac Cormack yönteminde birinci türevler önce ileri sonra geri sonlu farklar yöntemleriyle açılmıştır. Bu sayede çözüm daha stabil hale gelmektedir. Noktasal Gauss Seidel Yöntemini'nin kullanılması ile hesaplanan değerler hemen işleme dâhil edilmektedir. Bu sayede iterasyon sayısı azalmakta, sonuca daha hızlı ulaşılmaktadır. Bu da bilgisayar hafızasının verimli kullanılabilmesi için önemli bir etkendir. Genişletilmiş yumuşak eğim eşitliği sapma, kırınım, sığlaşma, yansıma, taban eğiminin karesi ve taban eğriliği gibi yüksek dereceden taban etkilerini, taban sürtünmesi ve dalga kırılması kayıplarını, ayrıca yansıma özelliğinden ötürü liman rezonans problemlerini içermektedir. Genişletilmiş yumuşak eğim eşitliklerinin çözümünde dalga kırılması katsayısı deneysel yaklaşımlardan elde edilmektedir. Bu çalışmada, birlikte kullanılması ile literatürde en küçük hata miktarını veren kırılma indeksi [29] ve kırılma enerji kaybı [30] katsayıları kullanılmıştır. Genişletilmiş yumuşak eğim eşitliklerinin çözümünde lineer olmayan dalga hızı ve grup hızı da işlemlere dâhil edilmiştir. Lineer olmayan etkiler, özellikle dalga sapmasının etkin olduğu sığ bölgelerde önem kazanmaktadır. Dalgaların ilerlerken gösterdikleri değişimleri belirleyen sayısal model, birçok kıyı mühendisliği çalışmasında güçlü bir tahmin ve tasarım aracı olarak kullanılabilecektir. Gelecekte sayısal modeller akıntı etkileri de gözönüne alınarak daha kapsamlı bir hale getirilebilir. Sayısal model, liman rezonans problemleri için de geliştirilebilir. Böylece sayısal model, kıyı mühendisliği çalışmalarında daha geniş bir kullanım alanına sahip olacaktır.

Semboller (Symbols)

α^*	: Kompleks iletim katsayısı
β	: Gelen ve yaklaşan dalga arasındaki faz farkı
θ	: Kıyı sınırının normali (x_n) ile gelen dalga arasındaki açı
A_I	: Sınırdaki gelen dalganın büyüklüğü
σ	: Açısal frekans
γ	: Dalga büyüklüğünün dalga derinliğine oranı (γ=a/h)
ϕ	: İki boyutlu kompleks potansiyel fonksiyonu
∇	: Yatay türev operatörü
$\nabla^2 h$	: Taban eğriliği
∇h	: Taban eğimi
a	: Dalga büyüklüğü
a_{1m}	: Akışkan parçacığının tabandaki hareket mesafesinin yarı uzunluğu
C	: Dalga hızı
C_g	: Grup hızı
C_g	: Grup hızı
f_1	: Taban eğriliği katsayısı
f_2	: Taban eğiminin karesinin katsayısı
f_b	: Taban sürtünme faktörü
f_{bd}	: Toplam enerji kayıp faktörü ($f=f_b+f_d$)
f_d	: Dalga kırılmasından sonraki enerji kayıp faktörü
f_w	: Dalga sürtünme faktörü
k	: Dalga numarası ($k=2\pi/L$)
k_N	: Nikuradse pürüzlülük katsayısı
K_R	: Yansıma katsayısı
L	: Dalga boyu
L_0	: Derin deniz dalga boyu
m	: Taban eğimi
m_f	: Deneyler sonucunda elde edilen bir sabit

Kaynaklar (References)

1. Whalin, R.W., ‘The Limit of Application of Linear Wave Refraction Theory in Convergence Zone’, **U.S. Army Corps of Engineers Waterways Experiment Station**, Vicksburg, Report No. H-71, 329-351, 1971

2. Watanabe, A., Maruyama, K., ‘Numerical Modeling of Nearshore Wave Field Under Combined Refraction, Diffraction and Breaking’, **Coastal Engineering in Japan,** Cilt 29, 19-39, 1986.

3. Zhao, H., Song., Z., Xu, F., Li, R., ‘An extended time-dependent numerical model of the mild-slope equation with weakly nonlinear amplitude dispersion’, **Acta Oceanologica**, Cilt 29, No 2, 5-13, 2010.

4. Biesel, F., ‘Study of wave progression in water of gradually varying depth’, **Gravity Waves**, US National Bureau of Standards Circular 521, 243-253, 1952.

5. Berkhoff, J. C. W., ‘Computation of Combined Refraction-Diffraction’, **13th International Conference on Coastal Engineering**, ASCE, Cilt 1, 472-490, 1972.

6. Luke, J.C., ‘A Variational Principle for a Fluid with a Free Surface’, **Journal of Fluid Mechanics**, Cilt 27, 395-397,1967.

7. Liu, P.L.F., ‘Wave- current interactions on a slowly varying topography’, **Journal of Geophysical Research**, Cilt 88, No 7, 745-747, 1983.

8. Hsu, T.- W., Lin, T.- Y., Wen, C.C., Ou, S.- H., ‘A complementary mild- slope equation derived using higher order depth function for waves obliquely propagating on sloping bottom’, **Physics of Fluids,** Cilt18, No 087106, 2006.

9. Kirby, J.T., ‘A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography’, **Journal of Geophysical Research**, Cilt 89, No C1, 745- 747, 1984.

10. Chamberlain, P.G., Porter, D., ‘The Modified Mild-Slope Equation’, **Journal of Fluid Mechanics,** Cilt 291, 393-407, 1995.

11. Maa, J.P.- Y., Hsu, T.-W., Lee, D.-Y., ‘The RIDE Model: an Enhanced Computer Program for Wave Transformation’, **Ocean Engineering**, Cilt 29, 1441-1458, 2002.

12. Radder, A.C., ‘On the Parabolic Equation Method for Water-Wave Propagation’, **Journal of Fluid Mechanics**, Cilt 95, 159-176, 1979.

13. Kirby, J.T., Dalrymple R.A., **User’s Manual, Combined Refraction/ Diffraction Model, REF/DIF 1, Ver 2.3.,** Center for Applied Coastal Research, Dept. of Civil Engineering, Univ. of Delaware, Newark, No DE 19716, 1991.

14. Maa, J.P.-Y., Wang D.W.-C., ‘Wave Transformation near Virginia coast: the 1991 Halloween Northeaster’, **Journal of Coastal Research**, Cilt 11, No 4, 1258-1271, 1995.

15. Copeland, G.J.M., ‘A Practical Alternative to the Mild- Slope Wave Equation’, **Coastal Engineering**, Cilt 9, 125-149, 1985.

16. Madsen, P. A., Larsen, J., ‘An Efficient Finite-Difference Approach to the Mild- Slope Equation’, **Coastal Engineering**, Cilt 11, 329-351, 1987.

17. Panchang V.G., Pearce B.R., Wei G., Cushman – Roisin, B., ‘Solution of the Mild- Slope Wave Equation by iteration’, **Applied Ocean Research**, Cilt 13, No 4, 187-199, 1991.

18. Maa, J.P.- Y., Hwung, H-H, Hsu, T.-W., ‘A simple Wave Transformation Model, RDE-PBCG for harbor planning’. **3rd International Conference on Hydrodynamics**, 407-412, 1998.

19. Song, ZY, Zhang, HG, Kong, J., Li, RJ, Zhang, W., ‘An efficient numerical model of hyperbolic mild- slope equation’, **26th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, Cilt 5, 253-258, 2007.

20. Bellotti, G., Cecioni, C., De Girolamo, P., ‘Simulation of small- amplitude frequency-dispersive transient waves by means of the mild slope equation’, **Coastal Engineering**, Cilt 55, No 6, 447- 458, 2008.

21. Tong, F-F., Shen, Y-M, Tang, J., Cui, L., ‘Water wave simulation in curvilinear coordinates using a time dependent mild slope equation’, **Journal of Hydrodynamics**, Cilt 22, No 6, 796-803, 2010.

22. Li, B.,Anastasiou, K., ‘Efficient Elliptic Solvers for the Mild- Slope Equation using the Multigrid Technique’, **Coastal Engineering**, Cilt 16, 245-266, 1992.

23. Walker, H.F., ‘Implementation of the GMRES Method Using Householder Transformations. SIAM’, **Journal Sci. Statist. Comput.** Cilt 9, 152-163, 1988.

24. Liu, SX, Sun, B, Sun, ZB, Li, JX, ‘Self- adaptive FEM numerical modeling of the mild- slope equation’, **Applied Mathematical Modeling**, Cilt 32, No 12, 2775-2791, 2008.

25. Maa, J.P.-Y., Maa, M.- H., Li, C., He, Q., ‘**Using the Gaussian Elimination Method for large banded Matrix Equations’**, Special Scientific Report No. 135, Virginia Institute of Marine Science, Gloucester Point, Va 23062, 1997.

26. Massel, S.R., ‘Extended Refraction- Diffraction Equation for Surface Waves’ **Coastal Engineering**, Cilt 23, 227-242, 1993.

27. Suh, K.D., Lee, C., Park, W.S., ‘Time- Dependent Equations for Wave Propagation on Rapidly Varying Topography’, **Coastal Engineering**, Cilt 32, 91-117, 1997.

28. Hsu, T.W., Wen C.C., ‘On Radiation Boundary Conditions and Wave Transformation across the Surf Zone’, **China Ocean Engineering**, Cilt 15, No 3, 395-406, 2001.

29. Isobe, M., ‘A Parabolic Equation Model for Transformation of Irregular Waves due to Refraction, Diffraction and Breaking’, **Coastal**

Engineering in Japan, Cilt 30, No 1, 33-47, 1987.

30. Dally, W.R., Dean, R.G., Dalrymple, R.A., 'Wave Height Variation across Beaches of Arbitrary Profile', **Journal of Geophysical Research**, Cilt 90, No C6, 11917-11927, 1985.

31. Jonsson, I.G., Carlsen, N.A., 'Experimental and Theoretical Investigations in an Oscillatory Turbulent Boundary Layers', **Journal of Hydraulic Research**, Cilt 14, No 1, 45-60, 1975.

32. Kirby, J.T., Dalrymple, R.A., 'An Approximate Model for Nonlinear Dispersion in Monochromatic Wave Propagation Models', **Coastal Engineering**, Cilt 9, No 6, 545-561, 1986.

33. Behrendt Behrendt, L., **A Finite Element Model for Water Wave Diffraction including Boundary Absorption and Bottom Friction**, Series Paper 37, Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, Technical University of Denmark**,** 1985.

34. Dingemans, M.W., **Water Wave Propagation over Uneven Bottoms. Part 1, Linear Wave Propagation**, World Scientific, Singapur, 2000.

35. Chen, Y, Yang, B.D., Tang, L.W., Ou, SH., Hsu, R.C., 'Transformations of progressive waves propagating obliquely on gentle slope', **Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering,** Cilt 130, No 4, 162- 169, 2004.

36. Isaacson, M., Qu, S., 'Waves in a Harbour with Partially Reflecting Boundaries', **Coastal Engineering**, Cilt 14, 193-214, 1990.

37. Kaya, B., Ülke, A., 'Differential Quadrate Method for Flood Routing Using Diffusion Wave Model', **Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University**, Cilt 27, No 2, 313-322, 2012.

38. İnan. A., Balas, L., 'A Nonlinear Wave Propagation Model', **WSEAS Transactions on Mathematics**, Cilt 5, No 7, 806-810, 2006.

39. Liu, P.L-F., Tsay, T.K., 'Refraction-Diffraction Model for Weakly Nonlinear Water Waves', **Journal of Fluid Mechanics** , Cilt 141, 265-274, 1984.

40. Madsen, P.A., Sorensen, O.R., 'A new Form of the Boussinesq Equations with Improved Linear Dispersion Characteristics Part2. A Slowly Varying Bathymetry', **Coastal Engineering**, Cilt 18, 183-204, 1993.