

RADYAL SICAKLIK DAĞILIMI ETKİSİNDE İKİ UCU SABİT BİR SİLİNDİRDE ISIL GERİLME ANALİZİ

Müfit GÜLGEÇ ve Selim TÜRKBAŞ

Makina Mühendisliği Bölümü, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Gazi Üniversitesi
Maltepe 06570 Ankara, mufit@mmf.gazi.edu.tr, selim@mmf.gazi.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada, uçları sabit, içinde iç ısı üretimi olan bir silindirde, zamana bağlı sıcaklık dağılımından kaynaklanan ısıl gerilmeler incelenmiştir. Silindir içerisindeki iç ısı üretimi miktarı yavaş yavaş artırılarak, hangi yük parametresinde ve hangi zamanda silindirde akmanın başlayacağı belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Isıl gerilme, üniform olmayan sıcaklık dağılımı.

THERMAL STRESS ANALYSIS OF A FIXED-END CYLINDER WITH RADIAL TEMPERATURE DISTRIBUTION

ABSTRACT

In this study, the thermal stresses in a fixed-end cylinder with uniform heat generation under the effect of the radial temperature distribution are investigated. The time and the load parameter at the onset of yielding in the cylinder are determined while the uniform heat generation is increased in the quasi-static manner.

Keywords: Thermal stress, transient temperature distribution.

1. GİRİŞ

Bir silindirde üniform olmayan sıcaklık dağılımından dolayı meydana gelen ilkel gerilmelerin mühendislikte uygulama alanı oldukça büyük ve önemlidir. Sadece bir silindir ile konuyu sınırlandırmayıp herhangi bir katı cisim için düşünülür ise, bir cisimdeki ilkel gerilmelerin sebeplerinden biri olan üniform olmayan ısıtmanın sonucu meydana gelen sıcaklık artışı, cismin genleşmesine sebebiyet verir. Böyle bir genleşme, sürekli bir cisimde genel olarak serbest yürümez ve ısıtmadan ileri gelen

gerilmeler ortaya çıkar. Bunun sonucunda ise, cismin görevini tam veya hiç yapamaması, ömrünün kısalması, cismin fiziksel yapısında fiziksel değişikliklerin meydana gelmesi gibi cismin çalışmasını doğrudan etkileyebilecek sorunlar ortaya çıkabilir. Bunun için cisimde, cismin bulunduğu şartlar, cismin kendi iç yapısı ve iç enerjisi gibi sebeplerden dolayı meydana gelebilecek sıcaklık değişimleri ve bunun sonucunda meydana gelen deplasman ve gerilmeler dikkate alınmalı, makinaların boyutlandırılması sırasında ilgili hesaplamaların yapılarak çalışmalarda göz önüne alınması gerekmektedir. Bu konunun önemli olduğu bir kaç mühendislik çalışması belirtilecek olursa; kablo tellerinin akım nedeniyle ısınması ve nükleer füzyon ile içerisinde düzgün iç ısı enerjisi üretilen katı nükleer yakıt elemanları örnek olarak verilebilir.

Pratik önemi nedeniyle, farklı uç şartlarındaki silindir için elastik-plastik gerilme dağılımı farklı sıcaklık dağılımları için genellikle kararlı durum için incelenmiştir [1-3]. Bu çalışmada ise, iki ucu sabit bir silindir eksenini boyunca üniform yayılı bir ısı kaynağının üretimi z 'den bağımsız kalacak şekilde değiştirilerek, radyal doğrultuda ısı iletimi ve dolayısıyla zamana geçici bağımlı bir sıcaklık dağılımı oluşturulmuştur. Daha sonra, bu sıcaklık dağılımı etkisinde silindir içerisindeki radyal, teğetsel, eksenel gerilme bileşenleri ve radyal deplasman zamana bağımlı olarak elde edilmiştir. Elde edilen gerilme bileşenleri kullanılarak ve silindir içerisindeki iç ısı üretimi miktarı yavaş yavaş artırılarak, hangi yük parametresinde ve hangi zamanda silindirde akmanın başlayacağı belirlenmiştir.

2. TEORİ

2.1. Silindirdeki Elastik Gerilme ve Deplasman Dağılımı

Eksenel simetriye sahip bir silindir için denge denklemi

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (1)$$

ve geometrik bağıntılar

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (2a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (2b)$$

şeklinde verilebilir. Bu ifadelerde, σ_r radyal gerilme bileşeni, σ_θ çevresel gerilme, u radyal deplasman, ε_r radyal şekil değiştirme ve ε_θ çevresel şekil

değiştirmedir. Elastik bir cisim için gerilme, şekil değiştirme bağıntıları Genelleştirilmiş Hooke Kanunu kullanılarak,

$$E\varepsilon_r = \sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z) + E\alpha T \quad (3a)$$

$$E\varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z) + E\alpha T \quad (3b)$$

$$E\varepsilon_z = \sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) + E\alpha T \quad (3c)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemde ν Poisson oranı, α lineer ısı genleşme katsayısı, T sıcaklık dağılımı ve E Young modülüdür. İncelenen silindir içerisindeki sıcaklık dağılımının sadece r 'ye bağlı olması ve silindirin eksenel doğrultuda hareketinin engellenmesi nedeniyle $\varepsilon_z = 0$ olur. Yani Düzlem Şekil Değiştirme durumu mevcuttur. Bu durum için, (2a) ve (2b) denklemlerinden u terimi yok edilirse, uygunluk denklemi

$$\frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) = \varepsilon_r \quad (4)$$

halini alır. Gerilme bileşenleri, (1) denge denklemini sağlayacak şekilde, ψ gerilme fonksiyonu kullanılarak, $\sigma_r = \psi/r$ ve $\sigma_\theta = d\psi/dr$ olarak tanımlanabilir. Bu ifadeler Genelleştirilmiş Hooke Kanunu denklemlerinde (3a,b) yerine konulursa, radyal ve teğetsel şekil değiştirme ifadeleri, ψ gerilme fonksiyonu cinsinden elde edilmiş olur. Elde edilen ifadeler, uygunluk denkleminde (4) yerine konulursa bir diferansiyel denklem bulunur. Bu diferansiyel denklemin çözümünden sonra, $\sigma_r = \psi/r$ ve $\sigma_\theta = d\psi/dr$ bağıntıları kullanılırsa, $\varepsilon_z = 0$ olduğu da hatırlanarak, gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi bulunabilir;

$$\sigma_r = -\frac{E\alpha}{(1-\nu)}\theta + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} \quad (5a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha}{(1-\nu)}(\theta - T) + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} \quad (5b)$$

$$\sigma_z = -\frac{E\alpha}{(1-\nu)}T + \nu C_1 \quad (5c)$$

Bu ifadelerde C_1 ve C_2 integral sabitleri, θ ise $\theta := \frac{1}{r^2} \int_0^r T r dr$ şeklinde bir

kısaltmadır.

Genelleştirilmiş Hooke Kanunu denklemlerini (3a-3c) ve geometrik bağıntı (2a) kullanılarak radyal deplasman

$$u = -\frac{(1+\nu)C_2}{E} \frac{1}{r} + \left\{ \alpha \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \theta - T \right) + \frac{1}{2E} (1+\nu)(1-2\nu)C_1 \right\} r \quad (6)$$

şeklinde elde edilir.

(6) bağıntısında, $r=0$ olduğu zaman radyal deplasman sıfır olmalıdır. Bu durum $C_2=0$ olmasını gerektirir. C_1 integral sabiti $r=b$ eğrisel yüzeyinde kuvvet bulunmaması nedeniyle $(\sigma_r)_{r=b}=0$ şartından aşağıdaki gibi bulunur.

$$C_1 = \frac{2E\alpha}{(1-\nu)} \theta(b) \quad (7)$$

Bu ifadede

$$\theta(b) = \frac{1}{b^2} \int_0^b T r dr$$

olarak tanımlanmıştır. Belirlenen C_1 ve C_2 integral sabitleri gerilme ve radyal deplasman ifadelerinde yerine yazılırsa

$$\sigma_r = -\frac{E\alpha}{(1-\nu)} [\theta(b) - \theta] \quad (8a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha}{(1-\nu)} [\theta(b) + \theta - T] \quad (8b)$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha}{(1-\nu)} [2\nu\theta(b) - T] \quad (8c)$$

$$u = \alpha \left\{ \frac{1+\nu}{1-\nu} [\theta + (1-2\nu)\theta(b)] - T \right\} r \quad (8d)$$

bağıntıları bulunabilir.

2.2. Silindir İçerisindeki Sıcaklık Dağılımı

İçerisinde sabit üniform iç enerji üretimi olan bir silindirde, silindirin yanal yüzeyi referans sıcaklıkta tutulursa, herhangi bir t anındaki sıcaklık dağılım denklemi

$$T(r,t) = \frac{q'''}{k} \left(\frac{1}{4}(b^2 - r^2) - \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\kappa \beta_m^2 t} J_0(\beta_m r)}{\beta_m^3 J_1(\beta_m b)} \right) \quad (9)$$

şeklinde yazılabilir [4]. Bu denklemde J_0 ve J_1 , sıfır ve birinci dereceden Bessel fonksiyonlarını, β_m ise $J_0(b\beta_m) = 0$ denkleminin pozitif köklerini belirtmektedir.

Ayrıca k ısı iletim katsayısı, κ difüzyon katsayısı, q''' ise birim hacim ve birim zamandaki iç ısı üretimidir. Sıcaklık dağılım denklemi (9), (8a-8d) ifadelerinde yerine yazılıp boyusuzlaştırma işlemi yapılırsa

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\bar{q}'''}{(1-\nu)} \left(\frac{\bar{r}^2 - 1}{16} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau} \frac{J_1(\bar{r} \bar{\beta}_m)}{\bar{r} \bar{\beta}_m^4 J_1(\bar{\beta}_m)} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau}}{\bar{\beta}_m^4} \right) \quad (10a)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \frac{\bar{q}'''}{(1-\nu)} \left(\frac{3\bar{r}^2 - 1}{16} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau} \frac{J_1(\bar{r} \bar{\beta}_m)}{\bar{r} \bar{\beta}_m^4 J_1(\bar{\beta}_m)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau} \frac{J_0(\bar{r} \bar{\beta}_m)}{\bar{\beta}_m^3 J_1(\bar{\beta}_m)} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau}}{\bar{\beta}_m^4} \right) \quad (10b)$$

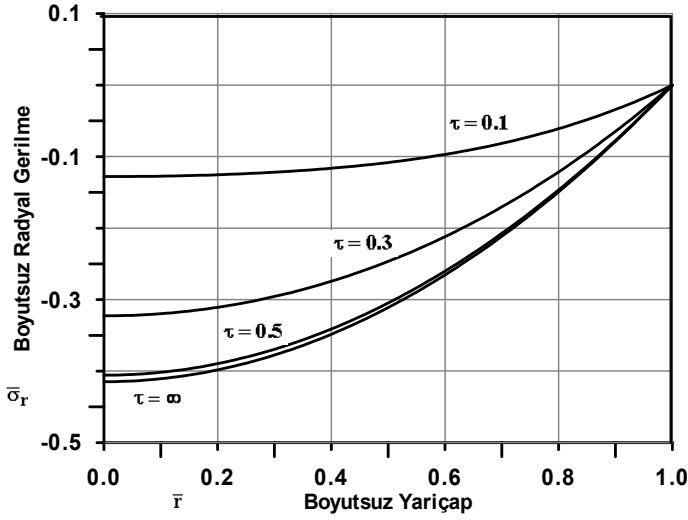
$$\bar{\sigma}_z = \frac{\bar{q}'''}{(1-\nu)} \left\{ \frac{(\bar{r}^2 - 1)}{4} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau} \frac{J_0(\bar{r} \bar{\beta}_m)}{\bar{\beta}_m^3 J_1(\bar{\beta}_m)} + 2\nu \left(\frac{1}{16} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau}}{\bar{\beta}_m^4} \right) \right\} \quad (10c)$$

$$\bar{u} = \bar{q}''' \bar{r} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left(\frac{3\bar{r}^2 - 2}{16} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau} \frac{J_1(\bar{r}\bar{\beta}_m)}{\bar{r}\bar{\beta}_m^4 J_1(\bar{\beta}_m)} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau} \frac{J_0(\bar{r}\bar{\beta}_m)}{\bar{\beta}_m^3 J_1(\bar{\beta}_m)} + (1-2\nu) \left(\frac{1}{16} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau}}{\bar{\beta}_m^4} \right) \right) \quad (10d)$$

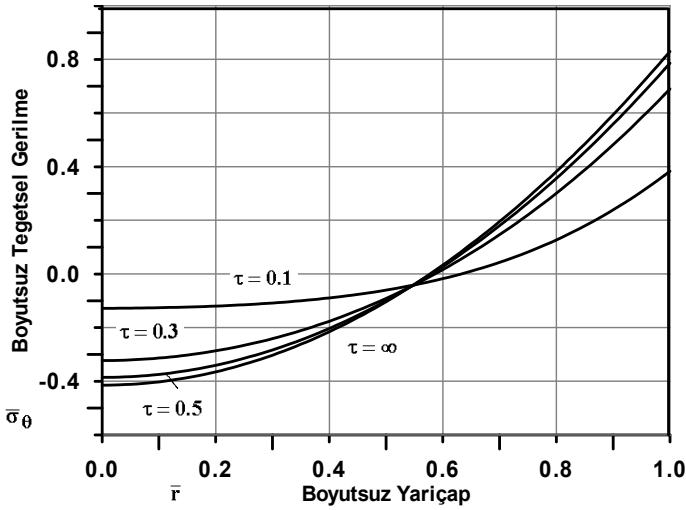
ifadeleri bulunur. Bu ifadelerde $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\theta$, $\bar{\sigma}_z$ boyutsuz gerilme bileşenleri ($\bar{\sigma}_i = \sigma_i / \sigma_0$, σ_0 silindir malzemesinin akma dayanımı), $\bar{u} = Eu / \sigma_0 b$ boyutsuz radyal deplasman, $\bar{r} = r / b = r \beta_m$ boyutsuz yarıçap, $\tau = \kappa t / b^2$ boyutsuz zaman, $\bar{q}''' = E \alpha q''' b^2 / \sigma_0 k$ boyutsuz yük parametresi, $\bar{\beta}_m$ ise $\bar{\beta}_m = \beta_m b$ şeklinde tanımlanmıştır.

3. SAYISAL SONUÇLAR

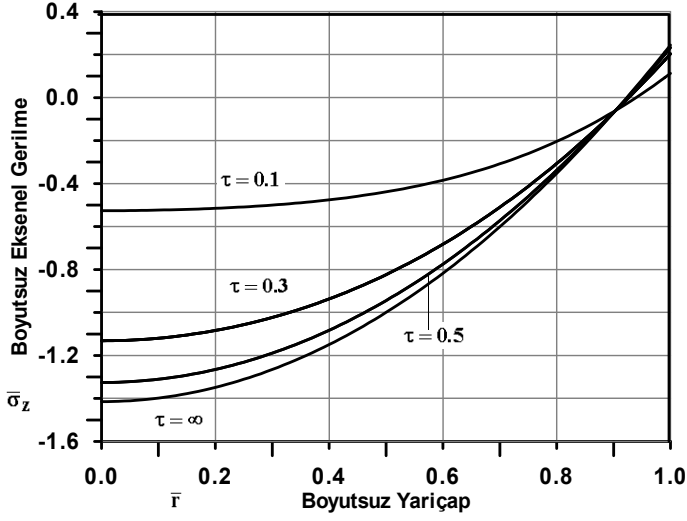
Elde edilen (10a-10d) denklemleri ile herhangi bir $\bar{q}'''$ boyutsuz yük parametresinde, belirli bir $\bar{r}$ yarıçapında ve herhangi bir τ anında, silindir içerisindeki boyutsuz gerilme bileşenleri ve boyutsuz radyal deplasman değerleri bulunabilir. Çalışmanın amacı, hangi yük parametresinde ($\bar{q}'''$), hangi yarıçapta ve hangi zamanda silindirde akmanın başlayacağını belirlemektir. Bu amaç için bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Programda iterasyon yapılarak, silindir içerisindeki en büyük ve en küçük asal gerilmelerin farkının silindir malzemesinin akma dayanımına eşit olduğu yük parametresi, yarıçap ve zaman belirlenmiştir. Hesaplamalara göre akma, silindirin merkezinde $\bar{q}''' = 4,6805$ değerinde ve $\tau = \infty$ iken (kararlı sıcaklık durumunda) meydana gelmektedir. Hesaplamalarda, akma şartı olarak Tresca Akma Şartı kullanılmıştır. Şekil 1-3'de $\bar{q}''' = 4,6805$ yük parametresinde gerilme bileşenlerinin, Şekil 4'de radyal deplasmanın silindir içerisinde zamana göre değişimi ve Şekil 5'de ise söz konusu yük parametresinde $\tau = \infty$ iken tüm gerilme bileşenlerinin silindir içerisindeki dağılımı verilmiştir. Bu grafiğe göre, silindir merkezinde radyal gerilme, çevresel gerilmeye eşit olmaktadır. Her iki gerilme bileşeni de eksenel gerilme bileşeninden büyük olduğundan (Tresca Akma Şartına göre $\sigma_\theta - \sigma_z = \sigma_0$ ve $\sigma_r - \sigma_z = \sigma_0$) silindir merkezinde akma başlamaktadır. Akmanın başladığı yük parametresi ile ilgili olarak elde edilen bu sonuç [2]'de verilen sonuçlara uymaktadır.



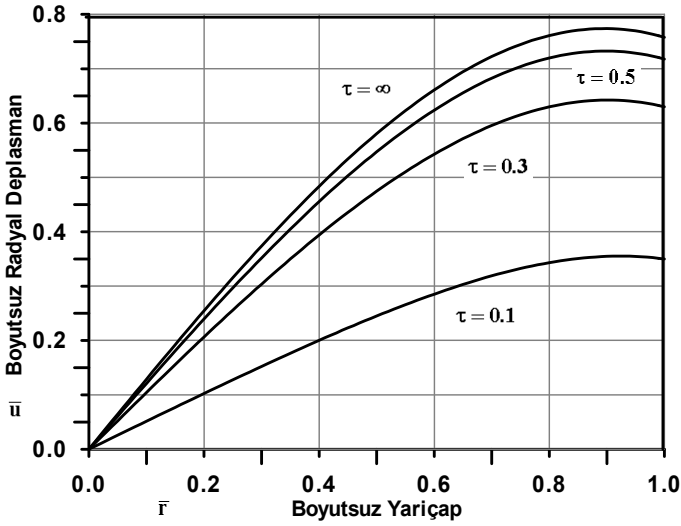
Şekil 1. Silindir içerisinde $\bar{q}''' = 4,6805$ için radyal gerilmenin zamana göre değişimi



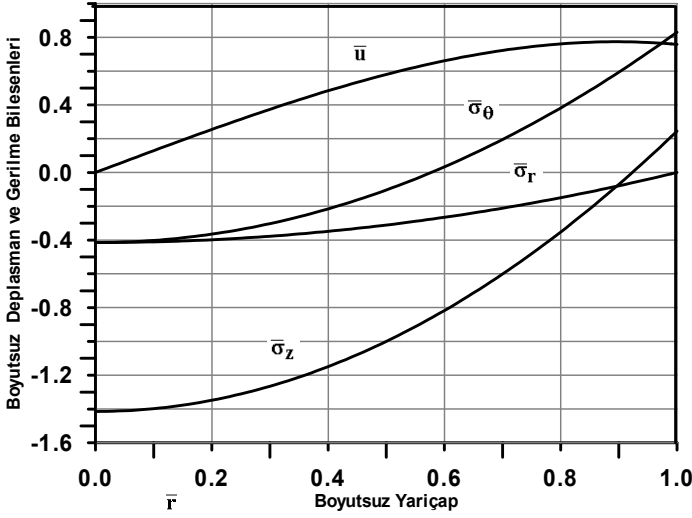
Şekil 2. Silindir içerisinde $\bar{q}''' = 4,6805$ için teğetsel gerilmenin zamana göre değişimi



Şekil 3. Silindir içerisinde $\bar{q}''' = 4,6805$ için eksenel gerilmenin zamana göre değişimi



Şekil 4. Silindir içerisinde $\bar{q}''' = 4,6805$ için radyal deplasmanın zamana göre değişimi



Şekil 5. $\bar{q}''' = 4,6805$ ve $\tau = \infty$ için gerilme bileşenlerinin ve deplasmanın değişimi

KAYNAKLAR

1. Çıtakoğlu, E., "Thermal Stress in a Finite Composite Cylinder with Uniform Energy Generation Under Special BCs", **METU J. Pure Appl. Sci.**, Cilt 12, 91-97, 1979.
2. Gülgeç, M., "Influence of the Temperature Dependence of the Yield Stress on the Stress Distribution in a Heat Generating Elastic-Plastic Cylinder", **ZAMM**, Cilt 79, No 7, 210-218, 1999.
3. Gülgeç, M. Orçan, M., "Elastic-Plastic Deformation of a Heat Generating Tube with Temperature Dependent Yield Stress", **Int. J. Eng. Science**, Cilt 38, No 1, 89-106, 2000.
4. Carslaw, H. S., Jaeger, J. C., **Conduction of Heat in Solids**, 2. Baskı, London, Oxford, 1959.