

ZAMANA BAĞLI RADYAL SICAKLIK DAĞILIMI ETKİSİNDE VE AKMA DAYANIMI SICAKLIĞA BAĞLI OLAN UÇLARI SERBEST BİR SİLİNDİRDE ISIL GERİLME ANALİZİ

Müfit GÜLGEÇ

Makina Mühendisliği Bölümü, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Gazi Üniversitesi
Maltepe 06570 Ankara, mufit@mmf.gazi.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada, akma dayanımı sıcaklığa bağlı bir malzemeden yapılmış uçları serbest bir silindirde, zamana bağlı sıcaklık dağılımından kaynaklanan ısıl gerilmeler incelenmiştir. Silindir içerisindeki iç ısı üretim miktarı yavaş yavaş artırılarak, silindir malzemesinin akma dayanımının sıcaklığa bağlı olmasının, akmanın başlangıcına olan etkisi belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Isıl gerilme analizi, uçları serbest silindir

THERMAL STRESS ANALYSIS OF A FREE-END CYLINDER HAVING A TEMPERATURE DEPENDENT YIELD STRESS SUBJECTED TO TRANSIENT RADIAL TEMPERATURE DISTRIBUTION

ABSTRACT

In this study, the thermal stresses in a free-end cylinder having a temperature dependent yield stress subjected to transient radial temperature distribution are investigated. The influence of temperature dependence of the yield stress on the onset of yielding in the cylinder is determined while the uniform heat generation is increased in the quasi-static manner.

Keywords: Thermal stress analysis, free-end cylinder

1. GİRİŞ

Pratik önemi nedeniyle, gerek mekanik gerekse ısıl yüklerin etkisi altında silindirik geometriye sahip cisimler pek çok araştırmaya konu olmuştur. Isıl yükün etkisi altındaki silindirik cisimlere örnek olarak; akım nedeniyle ısınan kablo telleri ve

nükleer fizyon nedeniyle ısınan katı nükleer reaktör çubukları verilebilir. Literatürde yer alan çalışmaların bir bölümü kararlı sıcaklık dağılımı etkisinde silindirik elemanların (katı veya içi boş) farklı uç şartları için elastik-plastik gerilme analizini içermektedir. Bu tür çalışmalara örnek olarak; üniform iç ısı üretimi nedeniyle uçları serbest ve sabit silindirik elemanların elastik-plastik analizini içeren çalışmalar verilebilir [1,2]. Bu çalışmalarda genellikle kararlı sıcaklık dağılımı dikkate alınmış ve silindirik eleman tamamen plastik oluncaya kadar iç ısı üretim miktarı arttırılmıştır.

Bilindiği gibi malzemelerin mekanik özellikleri (Young modülü, ısıl genleşme katsayısı, akma dayanımı gibi) sıcaklıkla değişmektedir. Bu mekanik özellikler içerisinde sıcaklıktan en fazla etkileneni akma dayanımıdır. Örneğin, karbon çeliği için, sıcaklığın 20⁰C den 375⁰C'ye çıkartılması sırasında, akma dayanımında yaklaşık olarak %45'lik azalma görülmektedir. Pek çok çalışmada akma dayanımının sıcaklığa bağımlılığı ihmal edilse de, bu bağımlılığın dikkate alındığı bazı çalışmalar literatürde yer almaktadır [3,4].

Bu çalışmada ise, gerilme ve şekil değiştirmelerin silindir eksenini boyunca değişmeyeceği kadar uzunlukta bir silindir dikkate alınmıştır. Silindir zamana bağlı radyal sıcaklık dağılımı etkisindedir. Bu sıcaklık dağılımı, silindir içerisindeki üniform iç ısı üretiminden kaynaklanmaktadır. İncelenecek silindirin uçları serbest olup, malzemesinin akma dayanımının sıcaklığa lineer bağımlı olduğu varsayılmıştır. Çalışmada önce, yukarıda anlatılan sıcaklık dağılımı etkisinde, silindir içerisindeki gerilme bileşenleri ve radyal deplasman zamana bağlı olarak elde edilmiştir. Daha sonra, Tresca Akma Şartı kullanılarak silindir malzemesini akma dayanımının sıcaklığa bağlı olmasının, silindir içerisindeki akmanın başlangıcına olan etkisi incelenmiştir.

2. TEORİ

2.1. Silindir İçerisindeki Gerilme ve Radyal Deplasman Bileşenleri

Eksenel simetriye sahip bir silindir için gerilme bileşenleri ve radyal deplasman aşağıdaki gibi yazılabilir [1];

$$\sigma_r = -\frac{E\alpha}{1-\nu}\theta + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha}{1-\nu}(\theta - T) + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} \quad (2)$$

$$\sigma_z = -\frac{E\alpha}{1-\nu}T + \nu C_1 + E\varepsilon_z \quad (3)$$

$$Eu = -(1+\nu)\frac{C_2}{r} + \left[\frac{1+\nu}{1-\nu}E\alpha\theta + \frac{1}{2}(1+\nu)(1-2\nu)C_1 - \nu E\varepsilon_z \right] r \quad (4)$$

Bu ifadelerde; σ_r radyal gerilme, σ_θ çevresel gerilme, σ_z aksel gerilme, u radyal deplasman, T sıcaklık dağılımı, ν Poisson oranı, E Young modülü ve ε_z aksel şekil değiştirmedir. θ ise $\theta = \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr dr$ şeklinde bir kısaltmadır.

(1-4) denklemlerinde bulunan C_1 ve C_2 integral sabitleri sınır şartları yazılarak bulunabilir. (4) bağıntısında $r = 0$ olduğu zaman radyal deplasman sıfır olmalıdır. Bu durum C_2 integral sabitinin sıfır olmasını gerektirir. C_1 integral sabiti, $r = b$ eğrisel yüzeyinde kuvvet bulunmaması nedeniyle $(\sigma_r)_{r=b} = 0$ şartından aşağıdaki gibi bulunur;

$$C_1 = \frac{2E\alpha}{1-\nu}\theta(b) \quad (5)$$

Bu ifadeye

$$\theta(b) = \frac{1}{b^2} \int_0^b Tr dr$$

olarak tanımlanmıştır. Belirlenen C_1 ve C_2 integral sabitleri gerilme ve radyal deplasman ifadelerinde yerine yazılırsa

$$\sigma_r = \frac{E\alpha}{1-\nu}[\theta(b) - \theta] \quad (6)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha}{1-\nu}[\theta(b) + \theta - T] \quad (7)$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha}{1-\nu}[2\nu\theta(b) - T] + E\varepsilon_z \quad (8)$$

$$Eu = \left[\frac{1+\nu}{1-\nu}E\alpha[\theta + (1-2\nu)\theta(b)] - \nu E\varepsilon_z \right] r \quad (9)$$

bağıntıları bulunabilir. Dikkat edilecek olursa, eksenel gerilme bileşeni ve radyal deplasman, ε_z eksenel şekil değiştirme cinsinden ifade edilmiştir. ε_z eksenel şekil değiştirme bileşenini bulmak için aşağıdaki serbest uç şartı kullanılabilir;

$$\int_0^b \sigma_z(2\pi r)dr = 0 \quad (10)$$

(10) ifadesinden ε_z eksenel şekil değiştirme bileşeni

$$\varepsilon_z = 2\alpha\theta(b) \quad (11)$$

şeklinde bulunabilir.

2.2. Silindir İçerisindeki Sıcaklık Dağılımı

İçerisinde sabit üniform iç enerji üretimi olan bir silindirde, silindirin yanal yüzeyi ısı çekilerek referans sıcaklıkta tutulursa, herhangi bir t anındaki sıcaklık dağılım denklemi [5]

$$T(r,t) = \frac{q''''}{k} \left[\frac{1}{4}(b^2 - r^2) - \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_m^2 \kappa t} J_0(\beta_m r)}{\beta_m^3 J_1(\beta_m b)} \right] \quad (12)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemde J_0 ve J_1 , sıfır ve birinci dereceden Bessel fonksiyonlarını, β_m ise $J_0(\beta_m b) = 0$ denkleminin pozitif köklerini belirtmektedir. Ayrıca, k ısı iletim katsayısı, κ difüzyon katsayısı, q'''' ise birim hacim ve birim zamandaki iç ısı üretimidir.

Sıcaklık dağılım denklemi (12), (6-9) ifadelerinde yerine yazılıp boyutsuzlaştırma işlemi yapılırsa

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\bar{q}''''}{1-\nu} \left[\bar{r}^2 - \frac{1}{8} + \frac{2}{\bar{r}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau} \frac{J_1[\bar{\beta}_m \bar{r}]}{\bar{\beta}_m^4 J_1(\bar{\beta}_m)} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau}}{\bar{\beta}_m^4} \right] \quad (13)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \frac{\bar{q}''''}{1-\nu} \left[\frac{3\bar{r}^2}{16} - \frac{1}{16} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau} \frac{J_0[\bar{\beta}_m \bar{r}]}{\bar{\beta}_m^3 J_1(\bar{\beta}_m)} - \frac{2}{\bar{r}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau} \frac{J_1[\bar{\beta}_m \bar{r}]}{\bar{\beta}_m^4 J_1(\bar{\beta}_m)} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau}}{\bar{\beta}_m^4} \right] \quad (14)$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{\bar{q}'''}{1-\nu} \left[\frac{\bar{r}^2}{4} - \frac{1}{8} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau} \frac{J_0[\bar{\beta}_m \bar{r}]}{\bar{\beta}_m^3 J_1(\bar{\beta}_m)} - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau}}{\bar{\beta}_m^4} \right] \quad (15)$$

$$\bar{u} = \frac{\bar{q}'''}{16(1-\nu)} \left[(3-\nu) - (1+\nu)\bar{r}^2 - \frac{32(1+\nu)}{\bar{r}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau} \frac{J_1[\bar{\beta}_m \bar{r}]}{\bar{\beta}_m^4 J_1(\bar{\beta}_m)} - 32(1-3\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau}}{\bar{\beta}_m^4} \right] \quad (16)$$

ifadeleri bulunur. Bu ifadelerde $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\theta$, $\bar{\sigma}_z$ boyutsuz gerilme bileşenleri ($\bar{\sigma}_i = \sigma_i/\sigma_0$ olup σ_0 ise referans sıcaklıkta silindir malzemesinin akma dayanımıdır), $\bar{u} = Eu/\sigma_0 b$ boyutsuz radyal deplasman, $\bar{r} = r/b = r/\beta_m$ boyutsuz yarıçap, $\tau = kt/b^2$ boyutsuz zaman, $\bar{q}''' = E\alpha q''' b^2/\sigma_0 k$ boyutsuz yük parametresi, $\bar{\beta}_m$ ise $\beta_m = \beta_m b$ şeklinde tanımlanmıştır.

2.3. Akma Dayanımının Sıcaklığa Bağlı Olmasının Akma Başlangıcına Etkisi

Bu çalışmada, akma dayanımının sıcaklığa lineer bağımlı olduğu varsayılmıştır. Bu varsayıma göre akma dayanımı

$$\sigma_y = \sigma_0(1-\gamma T) \quad (17)$$

şeklinde dir. Bu ifadede, σ_0 referans sıcaklıktaki akma dayanımı, γ ise malzeme parametresidir. (13-15) denklemlerinde verilen boyutsuz gerilme bileşenleri, \bar{q}''' boyutsuz yük parametresi arttırılarak grafiklenirse $\gamma=0$ için (yani akma dayanımının sıcaklığa bağlı olmaması durumu) akmanın silindirin dış yüzeyinde ($r=b$) ve $\tau=\infty$ iken başladığı görülebilir. Bu durum için Tresca Akma Şartı $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_0(1-\gamma T)$ ve $\sigma_z - \sigma_r = \sigma_0(1-\gamma T)$ dir. Gerilme bileşenleri Tresca Akma Şartı ifadelerinde yerine konulursa, silindirin dış yüzeyinde akmanın başlangıcına neden olacak yük parametresi

$$\bar{q}_0''' = \frac{1-\nu}{\left[\frac{1}{8} - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau}}{\bar{\beta}_m^4} \right]} \quad (18)$$

olarak bulunabilir. Dikkat edilecek olursa, (18) denkleminde \bar{q}_0''' malzeme parametresine (γ) bağlı değildir. Bunun nedeni ise silindirin dış yüzeyinin referans sıcaklıkta tutulmasıdır.

Öte yandan γ 'nın sıfırdan büyük olması durumunda, sıcaklığa bağlı olarak silindir içerisindeki malzemenin akma dayanımı azalacaktır. (12) denklemi ile verilen sıcaklık dağılımına göre; herhangi bir t anında sıcaklık, silindir merkezinde maksimum olup, silindir dış yüzeyine doğru azalarak değişmektedir. Şekil 1'de yük parametresi $\bar{q}''' = 5,64$ alındığında, boyutsuz sıcaklığın zamana göre değişimi grafiklenmiştir. Boyutsuz sıcaklık tanımlamasında kullanılan T_0 , $\bar{q}_{ref}''' = 5,64$ iken $\tau = \infty$ zamanındaki silindirin merkezinde sıcaklıktır. Şekil 1 'den de görüldüğü gibi herhangi bir t anında maksimum sıcaklık, daima silindirin merkezinde meydana gelmekte, yani silindirin merkezinde akma dayanımı silindirin diğer bölgelerine göre daha düşük olmaktadır. Buna göre γ 'nın sıfırdan büyük olması durumunda, silindirin dış yüzeyinden önce silindirin merkezinde akmanın başlaması hali sözkonusudur. Böyle bir durum için Tresca akma Şartı $\sigma_r - \sigma_z = \sigma_0(1 - \gamma T(0))$ ve $\sigma_\theta - \sigma_z = \sigma_0(1 - \gamma T(0))$ olacaktır. (13-15) gerilme bileşeni ifadeleri Akma şartı denklemlerinden birine konulup, bulunan ifade boyutsuz yük parametresi için çözümlerse

$$\bar{q}_i''' = 1 / \left[\frac{1}{16(1-\nu)} + \frac{2}{1-\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau}}{\bar{\beta}_m^4} + \frac{\bar{\gamma}}{4\bar{q}_{ref}'''} - \left(\frac{2\bar{\gamma}}{\bar{q}_{ref}'''} + \frac{1}{1-\nu} \right) \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau} \frac{1}{\bar{\beta}_m^3 J_1(\bar{\beta}_m)} \right] \quad (19)$$

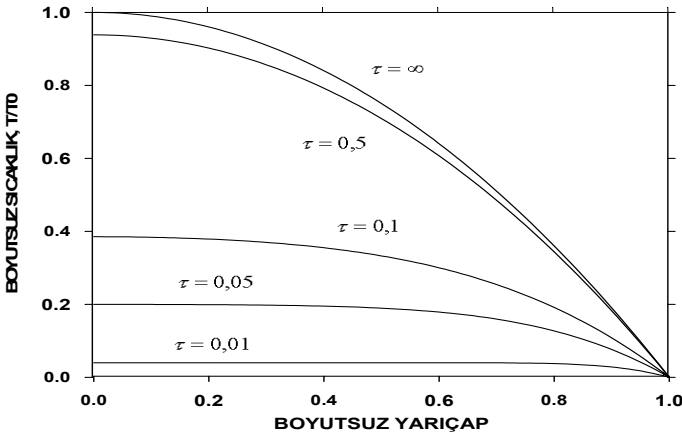
bağıntısı bulunabilir. Bu ifadeye boyutsuz malzeme parametresi $\bar{\gamma} = \gamma \sigma_0 q_{ref}''' / E\alpha$ şeklinde tanımlanmıştır.

(18) ve (19) no'lu denklemlerindeki yük parametresi eşitlenerek, akmanın hem silindirin eksen boyunca hem de dış yüzeyinde aynı anda başlama durumu için kritik malzeme parametresi $\bar{\gamma}_c$, boyutsuz zamanın τ ve Poisson oranı ν cinsinden aşağıdaki gibi bulunabilir;

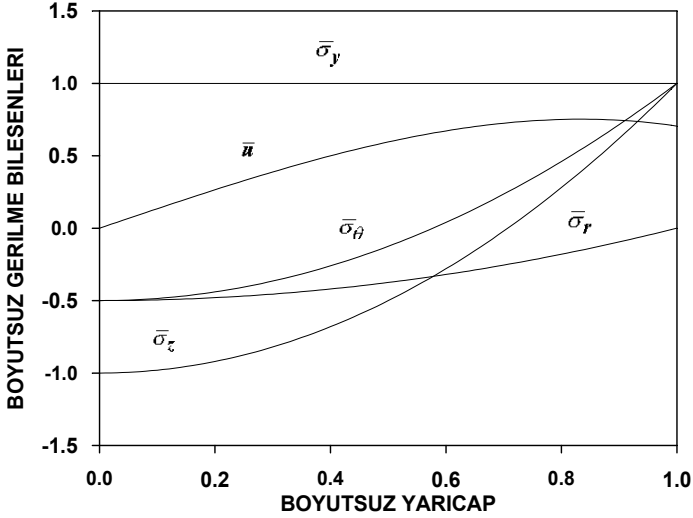
$$\bar{\gamma}_c = \frac{\left[\frac{1}{16} - 6 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau}}{\bar{\beta}_m^4} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau} \frac{1}{\bar{\beta}_m^3 J_1(\bar{\beta}_m)} \right]}{(1-\nu) \left[\frac{1}{4\bar{q}_{ref}'''} - \frac{2}{\bar{q}_{ref}'''} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\bar{\beta}_m^2 \tau} \frac{1}{\bar{\beta}_m^3 J_1(\bar{\beta}_m)} \right]} \quad (20)$$

3. SAYISAL SONUÇLAR

Uniform iç ısı üretimi nedeniyle silindir içerisindeki sıcaklık dağılımının zamana göre değişimi Şekil 1’de verilmiştir. Bu sıcaklık dağılımının elde edilmesinde, $\bar{q}''' = 5,64$ ve $\nu = 0,295$ alınmıştır. Şekil 1’e göre silindir içerisindeki herhangi bir t anında sıcaklık silindir merkezinde en yüksek olmaktadır. Zaman arttıkça da silindir içerisindeki sıcaklık artmaktadır. $\bar{q}''' = 5,64$ ve $\tau = \infty$ için, $\bar{\gamma}$ sıfır olarak alındığında, gerilme ve radyal deplasman bileşenlerinin silindir içerisindeki değişimi Şekil 2’de verilmiştir. Elde edilen gerilme ve deplasman dağılımları [1]’de verilen gerilme ve deplasman dağılımları ile uyumludur. Akma dayanımının sıcaklığa bağlı olmaması durumunda, akmanın silindirin dış yüzeyinde başladığı bu şekilden görülebilir. Silindirin dış yüzeyinde $\sigma_\theta = \sigma_z > \sigma_r$ gerilme durumu oluşmakta ve $(\bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_z) - \bar{\sigma}_r = 1$ şartı sağlandığından sözkonusu yük parametresinde akma başlamaktadır. Aynı yük parametresi ve zamanda, $\bar{\gamma} = 2$ alındığında silindir içerisindeki gerilme ve radyal deplasman bileşenlerinin değişimi ise Şekil 3’de verilmiştir. Bu durumda, akma dayanımının sıcaklığa bağlı olması nedeniyle, silindir merkezinde akma dayanımı %50 azalmıştır. Silindir merkezinde gerilme durumu $\sigma_\theta = \sigma_r > \sigma_z$ ve Tresca akma şartı $(\bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_r) - \bar{\sigma}_z = 0,5$ ’dir. Şekilden de anlaşılacağı gibi, $\bar{\gamma} = 2$ olduğunda, hem silindirin merkezinde hem de dış yüzeyinde aynı anda akma başlamıştır ve bu durum [4]’de verilen sonuçlara uymaktadır. Şekil 4’de (20) denkleminde yola çıkılarak, kritik malzeme parametresinin ($\bar{\gamma}_c$), (akmanın hem silindir merkezinde hem de dış yüzeyinde aynı anda başlamasına neden olacak malzeme parametresi) zamana göre değişimi

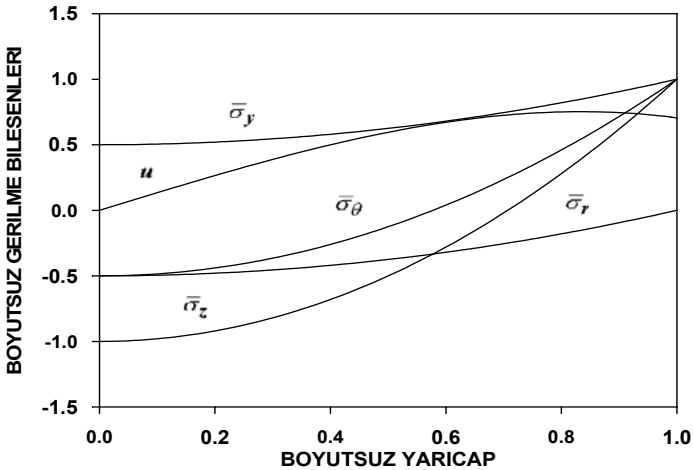


Şekil 1. $\bar{q}''' = 5,64$ boyutsuz yük parametresinde silindir içerisindeki sıcaklığın zamana göre değişimi

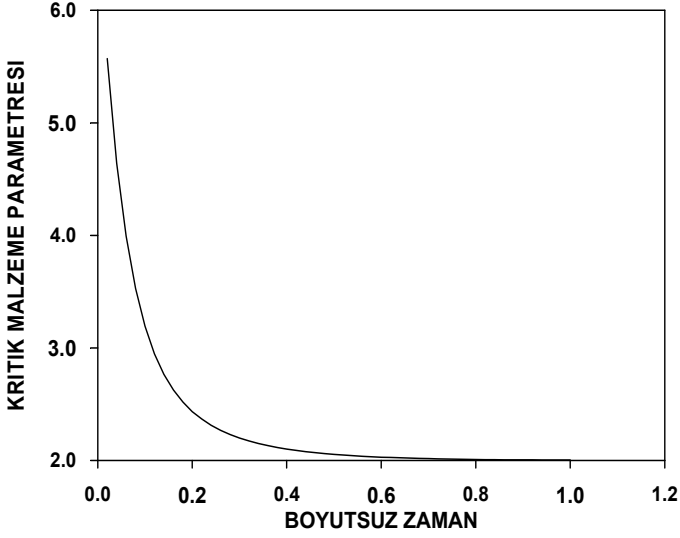


Şekil 2. $\bar{q}''' = 5,64$, $\tau = \infty$ ve $\bar{\gamma} = 0$ için akmanın sadece silindirin dış yüzeyinde başlaması durumu

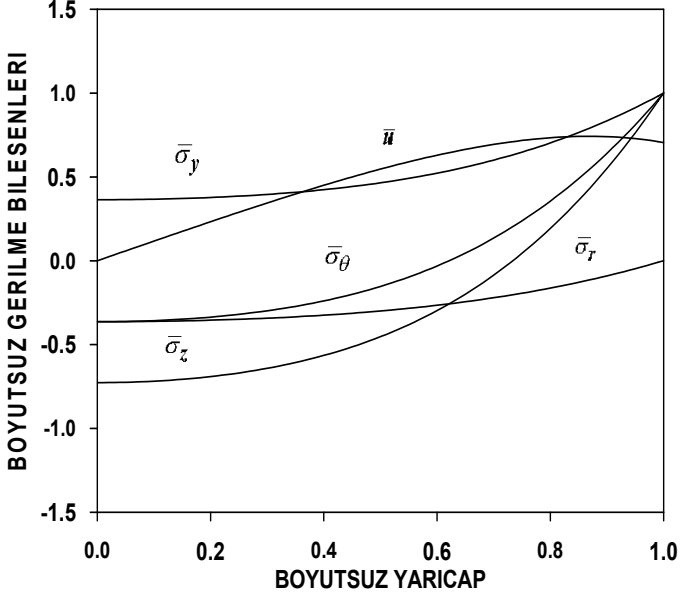
grafiklenmiştir. Bu grafikten herhangi bir zamana karşılık gelen kritik malzeme parametresi bulunabilir. Böylece bulunan kritik malzeme parametresi (18) veya (19) denklemlerinden birine konularak bu durum için yük parametresi elde edilebilir. Şekil 4'e göre kritik malzeme parametresi, $\tau \rightarrow \infty$ durumunda 2 değerine asimtotik olarak yaklaşmaktadır.



Şekil 3. $\bar{q}''' = 5,64$, $\tau = \infty$ ve $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_c = 2$ için akmanın hem silindirin dış yüzeyinde hem de merkezinde başlaması durumu



Şekil 4. Kritik malzeme parametresinin zamana göre değişimi

Şekil 5. $\bar{q}''' = 10,824$, $\tau = 0,12$ ve $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_c = 2,947$ için akmanın hem silindirin dış yüzeyinde hem de merkezinde başlaması burumu

Şekil 5’de ise $\bar{q}''' = 10,824$ ve $\tau = 0,12$ durumu için, $\bar{\gamma}_c = 2,947$ alınarak gerilme ve radyal deplasman değişimi grafiklenmiştir. Sıcaklıktan dolayı silindirin merkezindeki akma dayanımı yaklaşık olarak %64 azalmıştır ve aynı anda hem silindirin merkezinde hem de dış yüzeyinde akma başlamıştır.

KAYNAKLAR

1. Orcan, Y., ‘Thermal Stresses In a Heat Generating Elastic-Plastic Cylinder With Free Ends’, Int. J. Engng. Sci., Vol. 32, No 6, pp. 883-898, 1994.
2. Orcan, Y. and Gamer, U., ‘Elastic-Plastic Deformation of a Centrally Heated Cylinder’, Acta Mechanica, Vol. 90, pp.61-80, 1991.
3. Gulgeç, M., ‘Influence of Temperature Dependence of the Yield Stress on the Stress Distribution in a Heat Generating Elastic-Plastic Cylinder’, ZAMM, Vol. 79, No.3, pp. 210-216, 1999.
4. Gulgeç, M. and Orcan, Y., ‘Elastic-Plastic Deformation of a Heat Generating Tube with Temperature Dependent Yield Stress’, Int. J. Engng. Sci., Vol. 38, No 6, pp. 89-106, 2000.
5. Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., Conduction of Heat in Solids, 2nd ed., London, Oxford, 1959.