

EĞİLME VE BURULMAYA MARUZ ELASTİK ROBOT KOLUNUN DİNAMİK MODELİ

Levent AKBABA ve Şefaatdin YÜKSEL*

Başbakanlık Denizcilik Müsteşarlığı, Maltepe, Ankara

*Makina Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Gazi Üniversitesi, Maltepe, 06570 Ankara
levent.akbaba@denizcilik.gov.tr syuksel@gazi.edu.tr

(Geliş/Received: 16.02.2005; Kabul/Accepted: 15.08.2005)

ÖZET

Bu çalışmada, uzaydaki sabit bir eksen takımına göre hareketi önceden belirlenmiş bir mafsallık içinde hareket eden elastik çubuk ele alınmıştır. Elastik çubuğun iki eksene göre eğilmeye ve kendi eksenini etrafında burulmaya maruz kaldığı ve çubuğun ucunda bir disk olduğu kabul edilmiştir. Kayar mafsallık sabit bir eksen takımına göre kinematiği üç boyutlu olarak verilmektedir. Elastik çubuğun kayar mafsallık içindeki hareketini kayar mafsaldan uygulanan tahrik kuvveti temin etmektedir. Bu kabuller altında elastik çubuğun hareket denklemleri Hamilton Prensibi ile elde edilmiştir. Ayrıca, Kabul Edilmiş Modlar yöntemi kullanılarak sistemin hareket denklemleri adi diferansiyel denklem takımları şeklinde elde edilmiştir. Bu denklem takımları çözülerek elde edilen titreşim biçimleri grafikler şeklinde sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Elastik çubuk, prizmatik mafsallık, eğilme titreşimleri, burulma titreşimleri.

DYNAMIC MODELING OF ELASTIC ROBOT ARM IN BENDING AND TORSION

ABSTRACT

In this study, an elastic beam sliding through a prismatic joint having an arbitrarily given motion in a fixed coordinate system is investigated. It is assumed that elastic beam undergoing flexural in two planes and torsional elastic displacements, and elastic beam having a disk at one-end. Kinematics of prismatic joint is given as a 3D-space motion in a fixed coordinate system. The prismatic joint is subjected to a propelling force from prismatic joint. With these assumptions, the differential equations of motion of the elastic beam are derived by using Hamilton's Principle. Besides, the equations of motions of the system are derived as ordinary differential equations by using the Assumed Modes Method. These equations are solved and some sample mode shapes of the vibrations are presented as graphics.

Keywords: Elastic beam, prismatic joint, flexural vibrations, torsional vibrations.

1. GİRİŞ

Teknolojide meydana gelen gelişmelerle birlikte endüstriyel robotlarda yüksek hızlı ve hafif manipülatörlerin, uzay robotlarında ise hafif ve dolayısıyla esnek kolların kullanımı yaygınlaşmıştır. Ancak esnek çubuk kullanımı ile birlikte titreşimlerin artması ve verimin düşmesi problemi ile karşılaşmıştır. Bu nedenle elastik çubuk içeren sistemlerin gerçekçi bir matematik modeline ihtiyaç duyulmaktadır. Elde edilen sonuçların gerçeğe daha yakın olması için ise rijit ve elastik hareket denklemlerinin beraber çözülmesi gerekmektedir. Çözüm için sonlu elemanlar gibi modele dayalı yöntemlerin yanında Galerkin vb. genel yöntemler de kullanılmaktadır.

Literatürde uzay araçları, robot manipülatörleri ve biomekanikte elastik çubuk kullanımı ile ilgili bir çok çalışmaya rastlanmaktadır. Uzay araçlarındaki antenler ve bazı manipülatör tiplerinde sıkça kullanılması sebebiyle bir tarafı kayar mafsallık içinde hareket eden esnek kollar son zamanlarda büyük ilgi görmektedir. Bu konuda yapılan ilk çalışmalardan birini Taborrok [1] yapmış ve çubuk boyu değişen bir tarafı ankastre çubuğun titreşim modları ile ilgili bazı özellikleri tespit etmiştir. Buna benzer çalışmalarda, Bergamaschi ve Sinopoli [2] gibi direkt analitik çözüm arama çalışmaları olmasına rağmen, çoğunluğunda; sabit bir Euler-Bernoulli kirişinin özfonksiyonları kullanılarak

çözüme gidilmiştir. Sabit bir kayar mafsalsal içinde hareket ederek boyu değişen çubuk, herhangi bir t anında bir tarafı ankastre giriş gibi düşünülmüş, analitik veya yaklaşık yöntemlerle elde edilen hareket denklemleri çözülerek titreşim şekilleri incelenmiştir [3-7]. Problem, Ankaralı ve Diken [8] bir tarafı sabit diğer tarafı serbest elastik manipulatörler, Buffinton ve Kane [9] ise iki tarafı serbest; fakat ortasından desteklenmiş giriş olarak tanımlanmış ve çözüm için Lagrange denklemlerine dayalı “Kabul edilmiş Modlar Yöntemi” (Assumed modes method) kullanılmıştır. Diğer bir grup çalışmada; çubuğun hareket eden bir kayar mafsalsal içinde kaydığı düşünülmüştür. Söz konusu çalışmaları yapan gruptan Lee [10], Tadikonda, Singh ve Stornelli [11], Yuh ve Young [12] ve Banerjee ve Kane [13] kayar mafsalsal dönme hareketi yaptığını kabul etmişlerdir. Bunlardan ilk ikisinde, Newton kanunları ile hareket denklemleri elde edilip Galerkin yöntemi ile çözüme gidilmiştir. Üçüncüsünde ise, kol ayrık elemanlar şeklinde modellenerek incelenmiştir. Chalhoub ve Ulsoy [14], tarafından yapılan çalışmada Kabul Edilmiş Modlar yöntemini kullanılmış ve problemi kayar mafsalsalın iki ayrı eksene göre döndüğünü kabul ederek incelemişlerdir. Al-Bedoor ve Khulief tarafından yapılan çalışmalarda birden fazla serbestlik derecesine sahip elastik çubuğun ucunda bir noktasal kütle olduğu kabul edilmiştir [15-17]. Bunlara benzer başka bir çalışmada; iki eksende titreşim, yer çekimi kuvveti, iç ve dış sönümleme ile kütle yüklerinin etkileri dahil edilerek burulma deformasyonu incelenmiş ve eksenel rijitliğe sahip çubuğun hareket denklemlerinin çıkarılmasında, Hamilton Prensibi kullanılmıştır [18]. Diğer bir çalışmada, elastik çubuğun ucunda atalet momentine sahip bir yük olduğu kabul edilmiştir [19]. Gürgöze ve Müller [20] tarafından yapılan bir çalışmada ise eğilmelere ek olarak girişte burulma olduğu kabul edilip kolun hareket denklemlerini sürekli ve ayrık modelleme halleri için ayrı ayrı elde edilmiştir. Başka bir grup çalışma, eğilme ve burulma titreşimlerinin birbirine bağlı olduğu elastik çubuklarla ilgili yapılmıştır [21-24]. Yüksel ve Gürgöze [25] tarafından yapılan çalışmada, düşey eksende hareket eden çubuk ele alınmış; ağırlık kuvveti, dönme ataleti ve eksenel kuvvet etkileri sisteme dahil edilmiştir. Gürgöze ve Yüksel [26] tarafından yapılan başka bir çalışmada çubuğun yatay düzlemde hareket ettiği kabul edilerek dönme ataleti ile çubuğun ucunda bir kütle bulunmasının etkileri de dikkate alınmıştır. Yüksel [27] tarafından yapılan diğer bir çalışmada ise sabit bir eksen takımına göre üç boyutlu hareket yapabilen bir kayar mafsalsal içinden kayan elastik çubuk ele alınmıştır. Çubuk herhangi bir t anında, bir tarafı ankastre diğer tarafında bir nokta kütle bulunan iki eksende eğilmeye maruz, Euler – Bernoulli giriş gibi düşünülmüştür. Ayrıca; eksenel atalet kuvveti, dönme ataleti ve ağırlık kuvvetlerinin etkileri de probleme dahil edilmiştir.

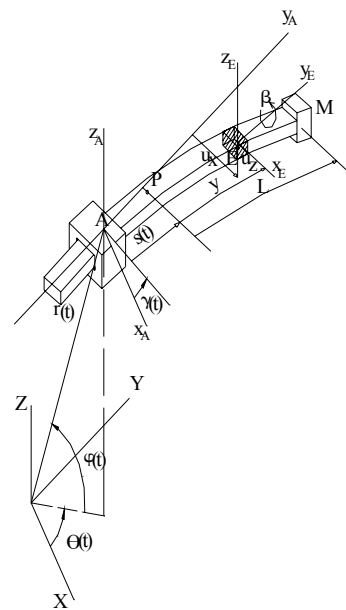
Bu çalışmada, Yüksel’in [27] çalışmasına benzer şekilde uzaydaki sabit bir eksen takımına göre hareketi önceden belirlenmiş bir mafsalsal içinde hareket eden

elastik çubuk ele alınmıştır. Kayar mafsalsalın sabit bir eksen takımına göre kinematığı üç boyutlu olarak verilmekte olup, uzaydaki sabit bir eksen takımına göre hareketi önceden belirlenmiş bir mafsalsal içinde, kayar mafsalsal tarafından uygulanan tahrik kuvveti ile hareket eden elastik çubuk incelenmiştir. Elastik çubuğun iki eksene göre eğilmeye ve kendi eksenini etrafında burulmaya maruz kaldığı ve çubuğun ucunda bir disk olduğu kabul edilmiştir. Kayar mafsalsalın sabit bir eksen takımına göre kinematığı üç boyutlu olarak verilmektedir. Bu kabuller altında elastik çubuğun hareket denklemleri Hamilton Prensibi ile elde edilmiştir.

2. HAREKET DENKLEMLERİ

Ele alınan elastik çubuk, sabit bir eksen takımına göre hareketi bilinen bir kayar mafsalsal içinde hareket etmektedir. (Şekil 1). Önce kinematik sonra da dinamik analiz için değişik eksen sistemlerinden yararlanılacaktır. Bu eksen takımlarından birincisi sabit eksen takımı XYZ’ dir. Diğer eksen takımları; orijini A noktasında ve eksenlerinin doğrultuları ise hareketsiz çubuğun asal eksenleri doğrultusunda olan kayar mafsalsala tespit edilmiş hareketli eksen takımı $X_A Y_A Z_A$ ve elastik çubuk üzerinde E ile gösterilen tipik bir elemana yerleştirilmiş hareketli eksen takımı $X_E Y_E Z_E$ dir.

Elastik çubuğun, çubuk dik kesit düzlemindeki asal eksenler x_A ve z_A eksenlerine göre eğilmeye ve y_A çubuk eksenini etrafında burulmaya maruz kaldığı kabul edilmektedir. Bu elastik yerdeğiştirmeler; u_x , u_z ve β ile gösterilmiştir. Çubuğun boyu, bir P referans noktasına göre L ile verilmiş; ayrıca çubuğun ucuna M kütesine ve I atalet momentine sahip bir disk yerleştirilmiştir.



Şekil 1. Ele alınan sistemin matematik modeli

Burada, kayar mafsalsın sabit eksen takımına göre hareketi, konumu $r(t)$ ile dönme açıları $\theta(t)$ ve $\varphi(t)$ tarafından belirlenmektedir. Kayar mafsala tespit edilmiş $X_A Y_A Z_A$ eksen takımının, sabit eksen takımına göre dönme hareketi ise $\gamma(t)$ ile belirlenmektedir. Kayar mafsalsı içinden kayan elastik çubuğun konumu $s(t)$ önceden bilinmektedir. Ele alınan elastik çubuk sisteminde kinetik enerji ifadesi;

$T_{\text{dön}}$: dönme hareketinin kinetik enerjisi

$T_{\text{doğ}}$: doğrusal hareketin kinetik enerjisi

olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Dönme hareketinden kaynaklanan kinetik enerji, rijit ve elastik dönme hareketlerinden kaynaklanmakta olup,

$$T_{\text{dön}} = \frac{\rho}{2} \int_{-s}^L \{[(\beta^2 \dot{\gamma}^2 - 2\beta \dot{\gamma} \dot{u}'_z + \dot{u}_z'^2)I_x + (\dot{\gamma}^2 u_z'^2 + 2u_z' \dot{\gamma} \dot{\beta} + \dot{\beta}^2)I_y + (\dot{\gamma}^2 - 2\dot{\gamma} \dot{u}'_x + \dot{u}_x'^2)I_z] + \delta(y-L)\{(\beta^2 \dot{\gamma}^2 - 2\beta \dot{\gamma} \dot{u}'_z + \dot{u}_z'^2)I_{dx} + (\dot{\gamma}^2 u_z'^2 + 2u_z' \dot{\gamma} \dot{\beta} + \dot{\beta}^2)I_{dy} + (\dot{\gamma}^2 - 2\dot{\gamma} \dot{u}'_x + \dot{u}_x'^2)I_{dz}\} dy \quad (1)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada;

ρ : Çubuğun yoğunluğu,

I_x, I_y, I_z : küçük çubuk elemanın, XYZ hareketli eksen takımına göre atalet momentleri ve

I_{dx}, I_{dy}, I_{dz} : çubuğun ucundaki diskin atalet momentleridir.

Çubuğun doğrusal hareketinden kaynaklanan kinetik enerji ise;

$$T_{\text{doğ}} = \frac{1}{2} \int_{-s}^L [\rho A + M_d \delta(y-L)] \{(\dot{u}_x - \dot{\gamma}(s+y) + V_x \cos \gamma + V_y \sin \gamma)^2 + (\dot{s} + \dot{\gamma} u_x - V_x \sin \gamma + V_y \cos \gamma)^2 + (\dot{u}_z + V_z)^2\} dy \quad (2)$$

şeklinde dir. Burada;

A: çubuğun kesit alanı ve

V_x, V_y, V_z : kayar mafsalsın sabit eksen takımına göre doğrusal hız bileşenleridir.

Ayrıca burada Dirac delta fonksiyonu;

$$\delta(y-L) = 0 ; y \neq L; \int_{-s}^L \delta(y-L) dy = 1 \quad (3)$$

şeklinde kullanılmıştır.

Potansiyel enerji ise;

V_e : elastik yerdeğiştirmelerden kaynaklanan potansiyel enerji,

V_f : eksenel kuvvetten kaynaklanan potansiyel enerji

ve

V_a : ağırlık kuvvetinden kaynaklanan potansiyel enerji

şeklinde üç kısımdan oluşmaktadır. Elastik yer değiştirmelerden kaynaklanan potansiyel enerji;

$$V_e = \frac{1}{2} \int_{-s}^L [EI_x u_z''^2 + EI_z u_x''^2 + GI_b \beta'^2] dy \quad (4)$$

Burada; EI_x ve EI_z eğilme rijitlikleri, GI_b ise burulma rijitliği olarak tanımlanmıştır. Eksenel kuvvetten kaynaklanan potansiyel enerji ifadesi;

$$V_f = \frac{1}{2} \int_{-s}^L \{ (u_x'^2 + u_z'^2) \left(\frac{M}{\rho A} (\ddot{s} - \dot{V}_x \sin \gamma + \dot{V}_y \cos \gamma - \dot{\gamma}^2 (s+L)) + (\ddot{s} - \dot{V}_x \sin \gamma + \dot{V}_y \cos \gamma - \dot{\gamma}^2 s)(y-L) - \frac{\gamma^2}{2} (y^2 - L^2) \right) \} dy \quad (5)$$

şeklinde dir. Elastik çubuğun ağırlığı nedeniyle oluşan potansiyel enerji ifadesi;

$$V_a = g \int_{-s}^L [\rho A + M_d \delta(y-L)] (r_z + u_z) dy \quad (6)$$

olarak ifade edilebilir. Yukarıda verilen kinetik ve potansiyel enerji bağıntıları Hamilton Prensipleri,

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T - V) + \delta'A] dt = 0 ; T = T_{\text{dön}} + T_{\text{doğ}} \quad (7)$$

$$V = V_e + V_f + V_a$$

yerlerine konulursa ele alınan dinamik sistemin hareket denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} & -EI_z u_x^{IV} - M_d [(\ddot{s} - \dot{V}_x \sin \gamma + \dot{V}_y \cos \gamma - \dot{\gamma}^2 (s+L)) u_x'' + \rho A (\ddot{s} - \dot{V}_x \sin \gamma + \dot{V}_y \cos \gamma - \dot{\gamma}^2 s)(y-L) u_x'' - \rho A \frac{\dot{\gamma}^2}{2} (y^2 - L^2) u_x'' \\ & - \rho A (\ddot{s} - \dot{V}_x \sin \gamma + \dot{V}_y \cos \gamma - \dot{\gamma}^2 s) u_x' \\ & - \rho A 2 \dot{\gamma} u_x' + [\rho A + M_d \delta(y-L)] [-\dot{V}_x \cos \gamma - \dot{V}_y \sin \gamma + 2\dot{\gamma} \dot{s} + \ddot{\gamma}(s+y) + \dot{\gamma}^2 u_x - \ddot{u}_x] \\ & + \rho I_z \ddot{u}_x'' = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
& -EI_x u_z^{IV} - \rho \dot{\gamma}^2 I_y u_z'' - M_d[(\ddot{s} - \dot{V}_x \sin \gamma \\
& + \dot{V}_y \cos \gamma - \dot{\gamma}^2(s+L))u_z'' - \rho A[(\ddot{s} - \dot{V}_x \sin \gamma \\
& + \dot{V}_y \cos \gamma - \dot{\gamma}^2 s)(y-L)]u_z'' - \rho A \frac{\dot{\gamma}^2}{2}(y^2 \\
& - L^2)u_z'' + \rho A(\ddot{s} - \dot{V}_x \sin \gamma + \dot{V}_y \cos \gamma \\
& - \dot{\gamma}^2 s)u_z' - \rho A \dot{\gamma}^2 u_z' + \rho I_x \ddot{\gamma} \beta' - [\rho A \\
& + M_d \delta(y-L)][-V_z - \dot{V}_z - \ddot{u}_z + g] \\
& - \rho I_y \dot{\gamma} \beta' + \rho I_x \dot{\gamma} \beta' - \rho I_x \ddot{u}_z = 0 \\
& GI_b \beta'' - \rho \dot{\gamma}^2 I_x \beta - \rho \ddot{\gamma} I_y u_z' + \rho I_y \ddot{\beta} \\
& - \rho \dot{\gamma} I_y \dot{u}_z' - \rho \dot{\gamma} I_x \dot{u}_z' = 0
\end{aligned} \quad (9)$$

Ayrıca Hamilton Prensibi bağıntısından elde edilen diğer terimler, geometrik ve dinamik sınır şartları ile birlikte sınır şartlarını oluştururlar. Bunlar;

$$\begin{aligned}
& u_x(-s, t) = 0, \quad u_z(-s, t) = 0, \quad \beta(-s, t) = 0, \\
& u_x'(-s, t) = 0, \quad u_z'(-s, t) = 0, \\
& u_x''(L, t) = 0, \quad u_z''(L, t) = 0, \\
& [EI_z u_x''' + M_d[(\ddot{s} - \dot{V}_x \sin \gamma + \dot{V}_y \cos \gamma \\
& - \dot{\gamma}^2(s+L))u_x' + \rho A(\ddot{s} - \dot{V}_x \sin \gamma + \dot{V}_y \cos \gamma \\
& - \dot{\gamma}^2 s)(y-L)u_x' - \rho A \frac{\dot{\gamma}^2}{2}(L^2 - y^2)u_x' \\
& + \rho \ddot{\gamma}(I_z + I_{dz}) - \rho(I_z + I_{dz})\ddot{u}_x' \\
& + I_{dz}\ddot{u}_x''] \Big|_{y=L} = 0 \\
& [EI_x u_z''' + \dot{\gamma}^2 I_{dy} u_z'' + \rho \dot{\gamma}^2 (I_y - I_{dy})u_z'' - M_d[(\ddot{s} \\
& - \dot{V}_x \sin \gamma + \dot{V}_y \cos \gamma - \dot{\gamma}^2(s+L))u_z' - \rho A(\ddot{s} - \dot{V}_x \sin \gamma + \dot{V}_y \cos \gamma \\
& - \dot{\gamma}^2 s)(y-L)u_z' - \rho A \frac{\dot{\gamma}^2}{2}(L^2 - y^2)u_z' \\
& - \rho I_{dx} \ddot{\gamma} \beta' + \rho \ddot{\gamma}(I_x - I_{dx})\beta + \rho \dot{\gamma}(I_y - I_{dy})\dot{\beta} \\
& + \rho \dot{\gamma}(I_x - I_{dx})\dot{\beta} + \rho \dot{\gamma} I_{dy} \dot{\beta}' + \rho \dot{\gamma} I_{dx} \dot{\beta}' - \rho(I_x \\
& + I_{dx})\ddot{u}_z' + I_{dx}\ddot{u}_z'] \Big|_{y=L} = 0 \\
& [-GI_b \beta' - \rho \dot{\gamma} I_{dy} u_z' - \rho \dot{\gamma}^2 I_{dx} \beta - \rho \dot{\gamma} I_{dy} \dot{u}_z' \\
& + \rho \dot{\gamma} I_{dx} \dot{u}_z' + \rho I_{dy} \ddot{\beta}] \Big|_{y=L} = 0
\end{aligned} \quad (11)$$

şeklinde. Burada, toplam on sınır şartından son iki satırda verilenler, Hamilton Prensibi bağıntısından elde edilmiştir.

Ayrıca Hamilton Prensibi bağıntısında kullanılmak üzere, bir potansiyelden kaynaklanmayan aktif kuvvetlerin virtüel işini veren ifadeye de ihtiyaç vardır. Elastik çubuğun konumu $s(t)$ önceden bilindiğinden varyasyonu sıfırdır. Bu nedenle, bu dinamik sistem için virtüel işi sıfır olmaktadır. Elde edilen 3 denklem ve 10 sınır şartı elastik çubuğun, elastik hareketini belirleyen kompleks bir sınır değer problemi oluşturmaktadır. Böyle karmaşık bir yapıya sahip sınır değer problemlerine, direkt analitik çözüm bulmak imkansız veya çok zordur. Bu nedenle yaklaşık yöntemler kullanılarak çözülebilir.

3. HAREKET DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, sınır şartları ile birlikte çok karmaşık yapıya sahip hareket denklemleri, Lagrange Denklemleri (Kabul Edilmiş Modlar) metodu kullanılarak adi diferansiyel denklem takımlarına dönüştürülmüştür. Şimdi Lagrange Denklemleri yöntemine göre problemin çözümünün,

$$\begin{aligned}
u_x(y, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} q_{1i} e_j, \quad u_z(y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_{2i} e_j \\
\beta_n(y, t) &= \sum_{j=1}^n p_j(t) \bar{e}_j(y, t)
\end{aligned} \quad (12)$$

şeklinde olduğu kabul edilsin. Burada p_j , q_{1j} ve q_{2j} ler zamana bağlı genelleştirilmiş koordinatlar olup, e_j ve $\bar{e}_j$ ler ise hem zamana hem konuma bağlı uygun olarak seçilen fonksiyonlardır. Burada e_j fonksiyonu olarak iki ayrı eksene göre eğilmeye çalışan durum için bir tarafı ankastre çubuğun öz fonksiyonları,

$$\begin{aligned}
e_j(y, t) &= \cosh\left(\lambda_j \frac{s+y}{s+L}\right) - \cos\left(\lambda_j \frac{s+y}{s+L}\right) \\
&- \eta_j \left[\sinh\left(\lambda_j \frac{s+y}{s+L}\right) - \sin\left(\lambda_j \frac{s+y}{s+L}\right) \right]
\end{aligned} \quad (13)$$

olup, burada λ_j boyutsuz parametredir ve

$$\cosh \lambda_j \cos \lambda_j = -1, \quad j = 1, \dots, \infty \quad (14)$$

karakteristik denklemini sağlayan bir tarafı ankastre çubuğun özdeğerleridir. Bu denklemin çözümü sonucu ulaşılan ilk üç öz değer aşağıda verilmiştir:

$$\lambda_1 = 1.875104, \lambda_2 = 4.694091, \lambda_3 = 7.854757$$

Ayrıca, burada $\bar{e}_j$ fonksiyonu olarak, bir tarafı ankastre diğer ucunda disk olan burulmaya çalışan çubuğun öz fonksiyonları,

$$\bar{e}_j(y, t) = \sin \hat{\lambda}_j \frac{s+y}{s+L} \quad (15)$$

kullanılmıştır. Buradaki $\hat{\lambda}_j$ boyutsuz parametre olup,

$$\tan \beta L = \frac{I}{I_D} \frac{1}{\hat{\lambda}} \quad (16)$$

karakteristik denklemini sağlayan bir tarafı ankastre çubuğun özdeğerleridir. Bu denklemin çözümü sonucu ulaşılan ilk üç öz değer aşağıda verilmiştir:

$$\hat{\lambda}_1 = 0.8605, \quad \hat{\lambda}_2 = 3.4256, \quad \hat{\lambda}_3 = 6.4373$$

Şimdi,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{1ij}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_{1ij}} + \frac{\partial V}{\partial q_{1ij}} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{2j}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_{2j}} + \frac{\partial V}{\partial q_{2j}} = 0 \quad j=1, \dots, \infty \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_j} + \frac{\partial V}{\partial p_j} = 0$$

ifadelerinde yerlerine konulup yeniden düzenlenirse, hareket denklemleri;

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \int_{-s}^L \left[\left(1 + \frac{M}{\rho A} \delta(y-L) \right) e_j e_k dy + \frac{I_z}{A} e'_j e'_k dy \right. \right. \\ & \quad + \delta(y-L) I_{dx} e'_j e'_k dy \} \ddot{q}_{1j} \\ & \quad + \left\{ 2 \int_{-s}^L \left[\left(1 + \frac{M}{\rho A} \delta(y-L) \right) \frac{\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y}{u_2} e'_j e_k dy \right. \right. \\ & \quad + 2 \frac{I_z}{A} \int_{-s}^L \left\{ \frac{\ddot{u}_2}{u_2} e'_j e'_k + \frac{\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y}{u_2} e''_j e'_k \right\} dy \\ & \quad + 2 \frac{I_{dx}}{A} \int_{-s}^L \delta(y-L) \left\{ \frac{\ddot{u}_2}{u_2} e'_j e'_k \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y}{u_2} e''_j e'_k \right\} dy \right\} \dot{q}_{1j} \\ & \quad + \left\{ \int_{-s}^L \left[\left(1 + \frac{M}{\rho A} \delta(y-L) \right) \left(\frac{\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 y}{u_2} e'_j e_k \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y)^2}{u_2^2} e''_j e_k - \dot{\gamma}^2 e_j e_k \right) \right] dy \right. \\ & \quad \left. + \frac{I_z}{A} \int_{-s}^L \left(\frac{\ddot{u}_2}{u_2} e'_j e'_k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{2\dot{u}_2(\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y) + u_2(\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 y)}{u_2^2} e''_j e'_k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y)^2}{u_2^2} e''_j e'_k \right) dy + \frac{I_{dx}}{A} \int_{-s}^L \delta(y-L) \left(\frac{\ddot{u}_2}{u_2} e'_j e'_k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{2\dot{u}_2(\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y) + u_2(\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 y)}{u_2^2} e''_j e'_k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y)^2}{u_2^2} e''_j e'_k \right) dy + \frac{EI_z}{\rho A} \int_{-s}^L e''_j e''_k dy \right. \\ & \quad \left. + \left[-\frac{M}{\rho A} (\ddot{s} - \dot{\gamma}^2 (s+L) - \dot{V}_x \sin \gamma + \dot{V}_y \cos \gamma) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\ddot{s} - \dot{\gamma}^2 s - \dot{V}_x \sin \gamma + \dot{V}_y \cos \gamma)(y-L) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \dot{\gamma}^2 (y^2 - L^2) \right] e'_j e'_k dy \right\} q_j \\ & \quad - \int_{-s}^L \left\{ \left[\left(1 + \frac{M}{\rho A} \delta(y-L) \right) \ddot{\varphi}(s+y) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (2\ddot{s} - \dot{\gamma} \dot{V}_x \cos \gamma - \dot{\gamma} \dot{V}_y \sin \gamma) e_k + (\dot{V}_x \cos \gamma \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \dot{\gamma} V_x \cos \gamma + \dot{\gamma} V_y \sin \gamma + \dot{\gamma} V_y \cos \gamma) e_k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{I_z}{A} \ddot{\varphi}' e'_k \right\} dy = 0; k=1, \dots, \infty \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \int_{-s}^L \left[\left(1 + \frac{M}{\rho A} \delta(y-L) \right) e_j e_k + \frac{I_x}{A} e'_j e'_k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{I_{dx}}{A} \delta(y-L) e'_j e'_k \right] dy \right\} \ddot{q}_{2j} \\ & \quad + \left\{ 2 \int_{-s}^L \left[\left(1 + \frac{M}{\rho A} \delta(y-L) \right) \frac{\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y}{u_2} e'_j e_k dy \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{I_x}{A} \int_{-s}^L \left(\frac{\ddot{u}_2}{u_2} e'_j e'_k + \frac{\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y}{u_2^2} e''_j e'_k \right) dy + \frac{I_{dx}}{A} \int_{-s}^L \delta(y \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - L) \left(\frac{\ddot{u}_2}{u_2} e'_j e'_k + \frac{\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y}{u_2^2} e''_j e'_k \right) dy \right\} \dot{q}_{2j} \left\{ -\dot{\gamma} \frac{I_x}{A} \int_{-s}^L \ddot{e}_j e'_k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \dot{\gamma} \frac{I_{dx}}{A} \int_{-s}^L \delta(y-L) \ddot{e}_j e'_k - \dot{\gamma} \frac{I_y}{A} \int_{-s}^L \ddot{e}_j e'_k - \dot{\gamma} \frac{I_{dy}}{A} \int_{-s}^L \delta(y \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - L) \ddot{e}_j e'_k dy \right\} \dot{p}_j + \left\{ \int_{-s}^L \left[\left(1 + \frac{M}{\rho A} \delta(y-L) \right) \left(\frac{\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 y}{u_2} e'_j e_k \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y)^2}{u_2^2} e''_j e_k \right) dy + \frac{I_x}{A} \int_{-s}^L \left(\frac{\ddot{u}_2}{u_2} e'_j e'_k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{2\dot{u}_2(\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y) + u_2(\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 y)}{u_2^2} e''_j e'_k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y)^2}{u_2^2} e''_j e'_k \right) dy + \frac{I_{dx}}{A} \int_{-s}^L \delta(y-L) \left(\frac{\ddot{u}_2}{u_2} e'_j e'_k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{2\dot{u}_2(\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y) + u_2(\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 y)}{u_2^2} e''_j e'_k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y)^2}{u_2^2} e''_j e'_k \right) dy - \frac{I_y}{A} \dot{\gamma}^2 \int_{-s}^L e'_j e'_k dy - \frac{I_{dy}}{A} \dot{\gamma}^2 \right. \\ & \quad \left. \int_{-s}^L \delta(y-L) e'_j e'_k dy \int_{-s}^L \delta(y-L) e'_j e'_k dy + \frac{EI_x}{\rho A} \int_{-s}^L e''_j e''_k dy \right. \\ & \quad \left. + \left(-\frac{M}{\rho A} (\ddot{s} - \dot{\gamma}^2 (s+L) - \dot{V}_x \sin \gamma + \dot{V}_y \cos \gamma) + (\ddot{s} - \dot{\gamma}^2 s \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \dot{V}_x \sin \gamma + \dot{V}_y \cos \gamma)(y-L) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \dot{\gamma}^2 (y^2 - L^2) - \frac{I_y}{A} \dot{\gamma}^2 \right) \int_{-s}^L e'_j e'_k dy \right\} q_j \\ & \quad + \left\{ -\dot{\gamma} \frac{I_x}{A} \int_{-s}^L \frac{\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y}{u_2} \ddot{e}_j e'_k dy - \dot{\gamma} \frac{I_{dx}}{A} \int_{-s}^L \delta(y-L) \right. \\ & \quad \left. \frac{\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y}{u_2} \ddot{e}_j e'_k dy - \dot{\gamma} \frac{I_x}{A} \int_{-s}^L \ddot{e}_j e'_k dy - \dot{\gamma} \frac{I_{dx}}{A} \int_{-s}^L \delta(y \right. \\ & \quad \left. - L) \ddot{e}_j e'_k dy - \dot{\gamma} \frac{I_y}{A} \int_{-s}^L \frac{\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y}{u_2} \ddot{e}_j e'_k dy - \dot{\gamma} \frac{I_{dy}}{A} \int_{-s}^L \delta(y \right. \\ & \quad \left. - L) \frac{\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y}{u_2} \ddot{e}_j e'_k dy \right\} p_j + \left\{ \int_{-s}^L \left[\left(1 + \frac{M}{\rho A} \delta(y-L) \right) \ddot{\varphi} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2g \right\} e_k \right\} dy = 0 \\ & \quad k=1, \dots, \infty \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{I_y}{A} \int_{-s}^L \bar{e}_j \bar{e}_k dy + \frac{I_{dy}}{A} \int_{-s}^L \delta(y-L) \bar{e}_j \bar{e}_k \right\} \ddot{p}_j \\
& + \left\{ 2 \frac{I_y}{A} \int_{-s}^L \frac{\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y}{u_2} \bar{e}_j' \bar{e}_k dy \right. \\
& + 2 \frac{I_{dy}}{A} \int_{-s}^L \delta(y-L) \frac{\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y}{u_2} \bar{e}_j' \bar{e}_k dy \Big\} \dot{p}_j \\
& + \left\{ \dot{\gamma} \frac{I_{dx}}{A} \int_{-s}^L \delta(y-L) \bar{e}_j' \bar{e}_k dy \right. \\
& + \dot{\gamma} \frac{I_{dy}}{A} \int_{-s}^L \delta(y-L) \bar{e}_j' \bar{e}_k dy + \dot{\gamma} \frac{I_y}{A} \int_{-s}^L \bar{e}_j' \bar{e}_k dy \\
& + \dot{\gamma} \frac{I_x}{A} \int_{-s}^L \bar{e}_j' \bar{e}_k dy \Big\} \dot{q}_{2j} + \left\{ \frac{I_y}{A} \int_{-s}^L \left(\frac{\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 y}{u_2} \bar{e}_j' \bar{e}_k \right. \right. \\
& + \frac{(\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y)^2}{u_2^2} \bar{e}_j' \bar{e}_k \Big) dy \\
& + \frac{I_{dy}}{A} \int_{-s}^L \delta(y-L) \left(\frac{\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 y}{u_2} \bar{e}_j' \bar{e}_k \right. \\
& + \frac{(\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y)^2}{u_2^2} \bar{e}_j' \bar{e}_k \Big) dy - \dot{\gamma}^2 \frac{I_x}{A} \int_{-s}^L \bar{e}_j \bar{e}_k dy \\
& - \dot{\gamma}^2 \frac{I_{dx}}{A} \int_{-s}^L \delta(y-L) \bar{e}_j \bar{e}_k dy + G I_b \int_{-s}^L \bar{e}_j' \bar{e}_k' dy \Big\} p_j \\
& + \left\{ \ddot{\gamma} \frac{I_{dy}}{A} \int_{-s}^L \delta(y-L) \bar{e}_j' \bar{e}_k dy \right. \\
& + \dot{\gamma} \frac{I_{dy}}{A} \int_{-s}^L \delta(y-L) \left\{ \frac{\ddot{u}_2}{u_2} \bar{e}_j' \bar{e}_k + \frac{\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y}{u_2^2} \bar{e}_j'' \bar{e}_k \right\} dy \\
& + \dot{\gamma} \frac{I_x}{A} \int_{-s}^L \left\{ \frac{\ddot{u}_2}{u_2} \bar{e}_j' \bar{e}_k + \frac{\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y}{u_2^2} \bar{e}_j'' \bar{e}_k \right\} dy \\
& + \dot{\gamma} \frac{I_{dx}}{A} \int_{-s}^L \delta(y-L) \left\{ \frac{\ddot{u}_2}{u_2} \bar{e}_j' \bar{e}_k + \frac{\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y}{u_2^2} \bar{e}_j'' \bar{e}_k \right\} dy \\
& + \ddot{\gamma} \frac{I_y}{A} \int_{-s}^L \bar{e}_j' \bar{e}_k dy + \dot{\gamma} \frac{I_y}{A} \int_{-s}^L \left\{ \frac{\ddot{u}_2}{u_2} \bar{e}_j' \bar{e}_k \right. \\
& + \frac{\dot{u}_1 + \dot{u}_2 y}{u_2^2} \bar{e}_j'' \bar{e}_k \Big\} dy \Big\} q_{2j} \Big\} = 0
\end{aligned} \quad (20)$$

şeklinde ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımları elde edilir. Burada,

$$u_1 = \frac{s}{s+L}, \quad u_2 = \frac{1}{s+L} \quad (21)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

4. SAYISAL ÇÖZÜMLER

Bu bölümde önceki bölümde elde edilen adi diferansiyel denklem takımları şeklindeki sistemin hareket denklemleri dördüncü mertebeden Runge-Kutta meto-

du ile çözülmüştür. Çözümler (12)'de verilen serilerde 2 terim kullanılarak yapılmıştır.

Literatürde, elastik çubuğun kullanıldığı robot manipulatörleri ve uzay aracı antenlerinin simülasyon çalışmalarında, gerçek uygulamalardaki hareket tiplerine benzer olarak dönme ve ötelenme hareketleri için;

$$\begin{aligned}
s(t) &= s_0 + \frac{s_t}{T} \left[t - \frac{T}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right] \\
\gamma(t) &= \gamma_0 + \frac{\gamma_t}{T} \left[t - \frac{T}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right] \\
r(t) &= r_0 + \frac{r_t}{T} \left[t - \frac{T}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right] \\
\theta(t) &= \theta_0 + \frac{\theta_t}{T} \left[t - \frac{T}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right] \\
\varphi(t) &= \varphi_0 + \frac{\varphi_t}{T} \left[t - \frac{T}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]
\end{aligned} \quad (22)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada r_0 (m) prizmatik mafsalsın ilk konumunu ve r_t (m) ise toplam hareketi belirlemektedir. Kayar mafsalsın mutlak eksene göre yaptığı dönme açıları ise $\theta(t)$ ve $\varphi(t)$ radyan cinsinden olmak üzere zamana bağlı konumu, θ_0 ve φ_0 başlangıç konumunu, θ_t ve φ_t toplam hareket miktarını göstermektedir. Burada uzunluk metre ve açı radyan cinsinden olmak üzere; $s(t)$ ve $\gamma(t)$ zamana bağlı olarak konumu, s_0 ve γ_0 başlangıç konumunu, s_t ve γ_t ise toplam hareket miktarını göstermektedir. Ayrıca T toplam hareket süresine ve t zamana karşılık gelmektedir.

Bu çalışmada, daire kesitli elastik çubuğun malzemesi alüminyum olarak seçilmiş olup, aşağıdaki malzeme ve geometrik özellikler kullanılmıştır:

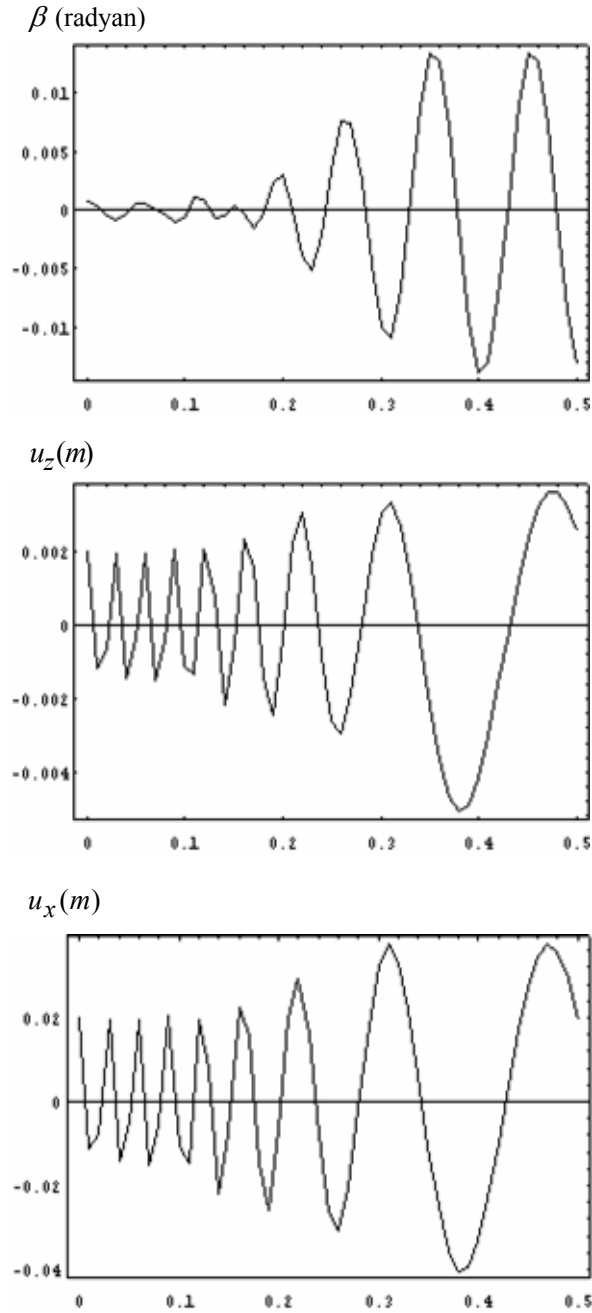
Elastisite Modülü	: $E=7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
Kayma Modülü	: $G=2,6 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
Yoğunluk	: $\rho=2700 \text{ kg/m}^3$
Alan	: $A=0,000075 \text{ m}^2$
Atalet momentleri	: $I_x = I_z = 4,476.10^{-10} \text{ m}^4$ $I_y = 8,952.10^{-10} \text{ m}^4$
Uzunluk	: $L=0,7 \text{ m}$

Ayrıca çubuğun ucunda $r_d = 0,006 \text{ m}$ yarıçapında ve $m_d = 0,03 \text{ kg}$ değerinde kütleye sahip bir disk bulunmaktadır.

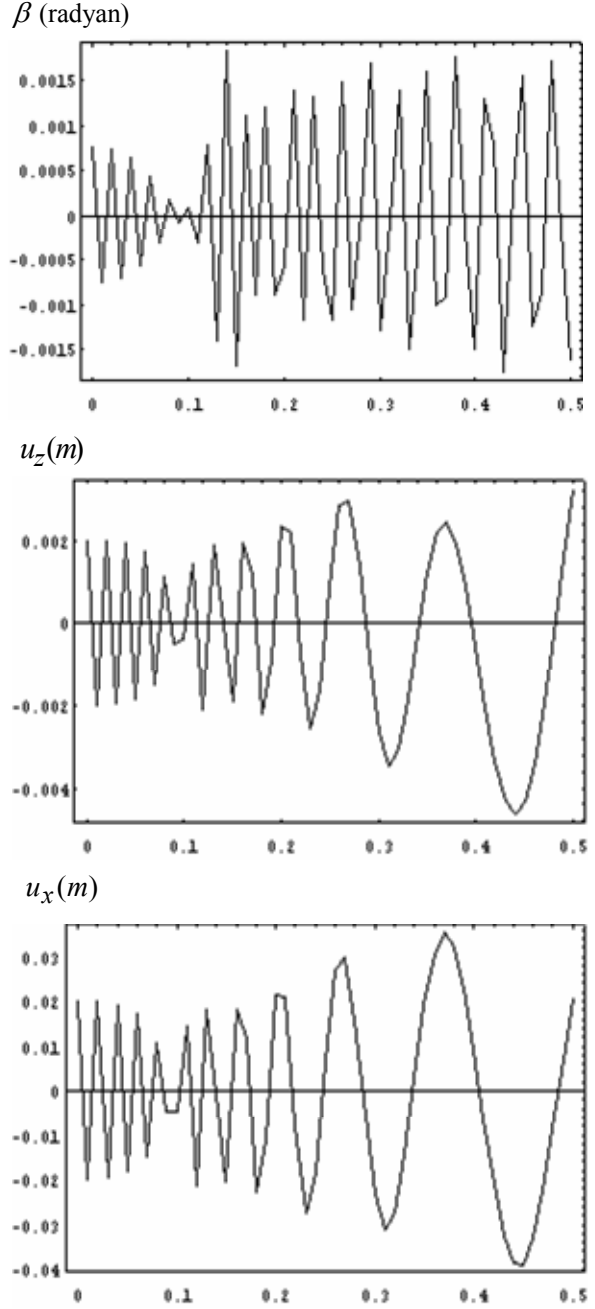
Şekil 2’de görülen örnekte; prizmatik mafsallardan kayan elastik çubuğun uç noktasının çubuk dik kesit düzlemindeki asal eksenler x_A ve z_A eksenlerine göre eğilme ve y_A çubuk ekseninde burulma titreşimleri görülmektedir. Prizmatik mafsallarda sabit XYZ eksenine göre yaptığı hareketi 0.5 saniyede tamamlamaktadır. Çubuk dışarı doğru kayarken (boyu uzarken) uçtaki eğilme titreşimlerinin genliği artmakta fakat frekansı azalmaktadır. Burulma titreşimlerinin genlikleri ise

büyük oranda artmaktadır.

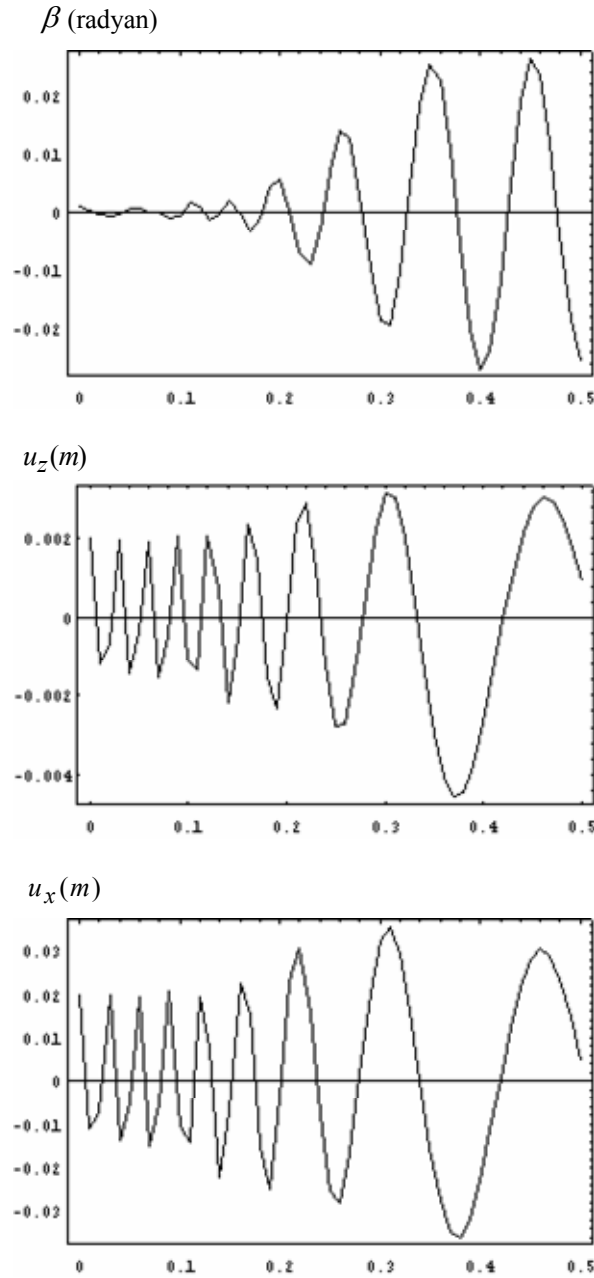
Şekil 3’de gösterilen çubuk ucu titreşimleri, bir önceki örnekte ele alınan kinematik girdiler kullanılmış yalnız uçtaki diskin yarıçapı ve buna bağlı olarak kütle miktarı değiştirilerek elde edilmiştir. Şekilde de görüldüğü gibi titreşimlerin biçim ve genlikleri değişmiştir. Burulma titreşimlerinin frekans ve genliklerinde eğilmeye göre daha belirgin değişiklikler olmuştur.



Şekil 2. $s_0 = -0,35$ m, $s_t = 0,7$ m, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_t = \pi/2$, $r = 1$ m, $\varphi_0 = 0$, $\theta_0 = 0$, $\theta_t = \pi/4$, $m_d = 0,03$ kg, $r_d = 0,006$ m ve $T = 0,5$ s için çubuk ucunun titreşimleri



Şekil 3. $s_0 = -0,35$ m, $s_t = 0,7$ m, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_t = \pi/2$, $r = 1$ m, $\varphi_0 = 0$, $\theta_0 = 0$, $\theta_t = \pi/4$, $m_d = 0,01$ kg, $r_d = 0,003$ m ve $T = 0,5$ s için çubuk ucunun titreşimleri



Şekil 4. $s_0 = -0,35$ m, $s_t = 0,7$ m, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_t = \pi$, $r = 1$ m, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_t = \pi/2$, $\theta_0 = 0$, $\theta_t = \pi$, $m_d = 0,03$ kg, $r_d = 0,006$ m ve $T = 0,5$ s için çubuk ucunun titreşimleri

Şekil 4’de verilen örnekte, Şekil 2’de ele alınan çubuk ve mafsallardan daha hızlı hareketler seçilerek elastik çubuğun uç noktasının titreşimleri elde edilmiştir. Görüldüğü gibi mafsallardan hareketlerinin hızlandırılması titreşim biçim ve genliklerini belli oranda değiştirmiştir. Burulma halinde ise herhangi bir değişiklik olmamıştır.

5. SONUÇ

Bu çalışmada sabit bir eksen takımına göre hareketi önceden bilinen bir kayar mafsallı içinde hareket eden

iki eksende eğilmeye ve kendi eksenini etrafında burulmaya maruz, bir ucunda disk olan elastik çubuğun titreşimleri incelenmiştir. Hareketin denklemleri çeşitli özel haller için Hamilton prensibi ile elde edilmiştir. Elde edilen ifadeler çok karmaşık bir yapıya sahip bir sınır değer problemi oluşturduğundan ve analitik olarak çözümü mümkün olmadığından hareket denklemleri Lagrange Denklemleri yöntemi ile genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden adi diferansiyel denklem takımlarına dönüştürülmüştür. Elde edilen denklem takımları 4. mertebeden Runge Kutta integrasyon yöntemi kullanılarak çeşitli özel hareket tipleri ve geometrik özellikler için çözülmüştür. Elde edilen titreşim biçimleri ve değerleri grafikler halinde verilmiştir. Gelecek çalışmalarda; mafsallı mutlak eksene göre çok genel bir hareket yapması halinde hareket denklemleri elde edilebilir. Ancak böyle bir durumda elde edilecek denklemlerin çok karmaşık olacağı açıktır.

KAYNAKLAR

1. Taborrok, B., Scott, C.M. and Kim, Y.L., “On the Dynamics of an Axially Moving Beam”, **Journal of Franklin Institute**, Cilt 297, 201-220, 1974.
2. Bergamaschi, S. and Sinopoli, A., “On the Flexural Vibrations of Arms with Variable Length: An Exact Solution”, **Mechanical Research Communications**, Cilt 10, 341-345, 1983.
3. Wang, P.K.C and J. D. Wei, J.D., “Vibrations in a Moving Flexible Robot Arm”, **Journal of Sound and Vibration**, Cilt 114, 149-160, 1987.
4. Todikonda, S.S.K. and Baruh, H., “Dynamics and Control of a Translating Flexible Beam with a Prismatic Joint”, **Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control**, Cilt 114, 422-427, 1992.
5. Stylianou, M. and Tabarrok, B., “Finite Element Analysis of an Axially Moving Beam, Part I: Time Integration”, **Journal of Sound and Vibration**, Cilt 178, No 4, 433-453, 1993.
6. Theodore, R.J., Arakeri, J.H. and Ghosal, A., “The Modelling of Axially Translating Flexible Beams”, **Journal of Sound and Vibration**, Cilt 191, No 3, 363-376, 1996.
7. Al-Bedoor, B.O. and Khulief, Y.A., “An Approximate Analytical Solution of Beam Vibrations during Axial Motion”, **Journal of Sound and Vibration**, Cilt 192, No 1, 159-171, 1996.
8. Ankaralı, A. and Diken, H., “Vibration Control of an Elastic Manipulator Link”, **Journal of Sound and Vibration**, Cilt 204, No 1, 162-170, 1997.
9. Buffinton, K.W. and Kane, T.R., “Dynamics of a Beam over Supports” **International Journal of Solids Structure**, Cilt 21, 617-643, 1985.
10. Lee, H.P., “Dynamics of an Axially Extending and Rotating Cantilever Beam Including the Effect of Gravity”, **International Journal of Solids Structures**, Cilt 32, 1595-1606, 1995.

11. Tadikonda, S.S.K., Singh, R.P. and Stornelli, S., "Multibody Dynamics Incorporating Deployment of Flexible Structures", **Journal of Vibration and Acoustics**, Cilt 118, 237-241, 1996.
12. Yuh, J. and Young, T., "Dynamic Modelling of an Axially Moving Beam in Rotation: Simulation and Experiment", **Journal of Dynamic Systems Measurements and Control**, Cilt 113, 34-40, 1991.
13. Banerjee, A.K. and Kane, T.R., "Extrusion of a Beam From Rotating Base", **Journal of Guidance**, Cilt 12, 140-146, 1989.
14. Chalhoub, N.G. and Ulsoy, A.G., "Dynamic Simulation of a Leadscrew Driven Flexible Robot Arm and Controller", **Journal of Dynamic Systems Measurements and Control**, Cilt 108, 119-126, 1986.
15. Al-Bedoor, B.O. and Khulief, Y.A., "Vibrational Motion of an Elastic Beam with Prismatic and Revolute Joints", **Journal of Sound and Vibration**, Cilt 190, No 2, 195-206, 1996.
16. Al-Bedoor, B.O. and Khulief, Y.A., "General Planar Dynamics of a Sliding Flexible Link", **Journal of Sound and Vibration**, Cilt 206, No 5, 641-661, 1997.
17. Gaulter, P.E. and Cleghorn, W.L., "A Spatially Translating and Rotating Beam Finite Element for Modelling Flexible Manipulators", **Mechanism and Machine Theory**, Cilt 27, 415-433, 1992.
18. Al-Bedoor, B.O. and Almussallam, A.A., "Dynamics of Flexible-Link and Flexible-Joint Manipulator Carrying a Payload with Rotary Inertia", **Mechanism and Machine Theory**, Cilt 35, 785-820, 2000.
19. Gürgöze, M. and Müller, P.C., "Modelling and Control of Elastic Robot Arm with Prismatic Joint", **Dynamics of Controlled Mec. Sys.**, IUTAM/IFAC, 235-245, 1989.
20. Hashemi, S.M., Richard, M.J., "Free Vibrational Analysis of Axially Loaded Bending-Torsion Coupled Beams: A Dynamic Finite Element", **Computers & Structures**, Cilt 77, 711-724 2000.
21. Banerjee, J.R., "Explicit Frequency Equation and Mode Shapes of Cantilever Beam Coupled in Bending and Torsion", **Journal of Sound and Vibration**, Cilt 224, No 2, 267-281, 1999.
22. Tanaka, M., Berin, A.N. & Suzuki, R., "Application of the Boundary Integral Equation Method the Coupled Bending-Torsional Vibrations of Elastic Beams" **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Cilt 20, 73-79, 1997.
23. Adam, C., "Forced Vibrations of Elastic Bending-Torsion Coupled Beams", **Journal of Sound and Vibration**, Cilt 221, No 2, 273-287, 1999.
24. Yüksel, Ş. and Gürgöze, M., "On the Flexural Vibrations of Elastic Manipulators with Prismatic Joints", **Computers & Structures**, Cilt 62, No 5, 897-908, 1997.
25. Gürgöze, M. and Yüksel, Ş., "Transverse Vibrations of Flexible Beam Sliding through a Prismatic Joint", **Journal of Sound and Vibrations**, Cilt 223, No 3, 467-482, 1999.
26. Yüksel, Ş., "Prizmatik Mafsallı İçinden Kayan Elastik Çubuğun Dinamiği", **Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi**, Cilt 14, No 2, 43-55, 1999.
27. Akbaba, L., **Prizmatik Mafsallı İçinden Kayan Elastik Çubuklarda Eğilme ve Burulma Titreşimlerinin İncelenmesi**, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2004.
28. Meirovitch, L., **Elements of Analytical Dynamics, Elements of Vibration Analysis**, 2nd ed., Mc Graw Hill, New York, 245-263, 1986.
29. Meirovitch, L., **Continuous System, Approximate Methods, Elements of Vibration Analysis**, 2nd ed., Mc Graw Hill, New York, 266-298, 1986.
30. Shigley, J.E., Uicker, JR. J.J., **Static Forces, Theory of Machines and Mechanisms**, 2nd ed, Mc Graw Hill, New York, 405-413, 1995.
31. Beer, F.P., Johnston, E.R., **Rijit Cisimlerin Kinematiki, Mühendisler İçin Mekanik: Dinamik**, Cilt II, Tameroglu, S.S., Özbek, T., Birsen Yayınevi, İstanbul, 182-234 1991.