

# MALİYET TABANLI STOKASTİK MONTAJ HATTI DENGELEME PROBLEMİ

**Ahad FOROUGHI, Hadi GÖKÇEN**

Endüstri Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Gazi Üniversitesi, Maltepe, 06570, Ankara.  
[ahad.foroughi@gmail.com](mailto:ahad.foroughi@gmail.com), [hgokcen@gazi.edu.tr](mailto:hgokcen@gazi.edu.tr)

(Geliş/Received: 20.01.2014; Kabul/Accepted: 29.05.2014)

## ÖZET

İşletmelerde ekonomik çalışma gereğinin büyük önem taşıdığı günümüzde, kaynakların etkin olarak kullanılıp değerlendirilmesi oldukça önemli bir konudur. Bu nedenle montaj hatlarında maliyetlerin azaltılması ve iş gücü gibi kaynaklardan verimli şekilde faydalanmak zorunluk hale gelmiştir. Bu makalede Maliyet Tabanlı Stokastik Montaj Hattı dengeleme problemi ilk kez ele alınmış ve bu amaçla bir şans kısıtlı matematiksel model önerilmiştir. Önerilen model, IBM ILOG CPLEX 12.4 yazılımı yardımıyla küçük ve orta boyutlu problemler için çözülmüştür. Elde edilen en iyi çözümler, aynı problemin zaman tabanlı yaklaşımla elde edilen en iyi çözümleri ile istasyon sayısı ve toplam işgücü maliyeti açısından karşılaştırılmıştır. Maliyet tabanlı modelin amaç fonksiyonu, istasyon sayısının en aza indirilmesi olmamasına rağmen, zaman tabanlı modele karşın çözülen 79 problemin tümünde, aynı sayıda istasyon ve 64 tanesinde daha düşük maliyetler elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Maliyet Tabanlı Montaj Hattı Dengeleme, Stokastik Görev Zamanı, Şans Kısıtlı Programlama

## COST ORIENTED STOCHASTIC ASSEMBLY LINE BALANCING PROBLEM

### ABSTRACT

In today's business that need for economic studies are significant, evaluation and effective use of resources is a very important issue. Therefore, in assembly lines, reduction of costs and benefit from resources such as labor efficiently has become imperative. In this paper the chance constraint mathematical model for stochastic cost oriented assembly line balancing problem has been proposed. The proposed model, have been solved for small to medium-sized problems with using IBM ILOG CPLEX 12.4 solver. Obtained the best solutions were compared with the time oriented assembly line balancing results in terms of the number of station and total labor costs.

**Keywords:** Cost Oriented Assembly Line Balancing, Stochastic Task Time, Chance Constraint Programming

### 1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Montaj hatları genellikle üretimin son aşamasında daha önce yapılan parçalar ile ürünün son montajını gerçekleştirmek için kullanılır. Bir montaj hattı birbirine malzeme taşıma sistemleri ile bağlanmış bir dizi istasyondan oluşur. Her bir istasyonda iş parçalarına çevrim zamanı denilen sınırlı bir zaman dilimi içerisinde bir veya daha fazla montaj işlemi yapılmaktadır. Montaj hatlarında karşılaşılan en temel problem, yapılması gerekli görevlerin ürün ve üretim sistemine bağlı kısıtlar altında bir veya daha fazla amaç gözetilerek hattaki istasyonlara atanmasıdır. Bu probleme montaj hattı dengeleme (MHD) denir.

İlk kez Bryton 1954 yılında yüksek lisans tezinde montaj hatlarının dengelenebileceğini belirtmiştir [1] ve Salveson 1955 yılında montaj hattı dengeleme problemini tanımlamıştır [2]. Bu çalışmalardan sonra günümüze kadar MHD problemi ile ilgili çok sayıda matematiksel model, çözüm prosedürleri, sezgisel ve meta sezgisel algoritmaları içeren çalışmalar yapılmıştır. MHD problemi için kapsamlı bir inceleme araştırması [3] ve [4] tarafından yapılmıştır.

Literatürde MHD problemleri üzerindeki çalışmaların çoğunda, montaj hattı dengelemenin amacı sabit bir çevrim zamanı içerisinde istasyon sayısının en aza indirilmesi ya da belirli bir istasyon sayısı için çevrim zamanının enaza indirilmesi olarak ifade edilmiştir.

Başka bir ifadeyle tüm istasyonlardaki toplam boş zamanı enaza indirilmesidir [5]. Bu tür problemler zaman tabanlı montaj hattı dengeleme (ZTMHD) problemleri olarak adlandırılır. Bununla birlikte, günümüzde Son yıllarda sanayide ortaya çıkan acımasız rekabet, üretim maliyetlerini daha fazla anlamlı hale getirmiştir. Montaj hattı sistemine sahip başarılı üretim sistemlerinde dahi, üretim maliyetlerini aşağı çekme çabası bir zorunluluk haline gelmiştir. Böyle bir ekonomik bakış açısından montaj hattı üretim sistemlerinde amacımız sadece istasyon sayısını ya da çevrim zamanını en aza indirmek olmamalıdır. Ayrıca birim başına toplam üretim maliyetinin en azlanması gibi hedefler de dikkate alınmalıdır. Bu tür problemler literatürde, maliyet tabanlı montaj hattı dengeleme (MTMHD) problemleri olarak tanımlanmaktadır.

Bir montaj hattında üretilen birime dair toplam maliyet, işgücü maliyetleri, sermaye maliyetleri, malzeme maliyetleri vb. unsurları içermektedir [6]. Toplam maliyeti azaltılması, yukarıda ifade edilen bileşenlerin azaltılması ile mümkün olabilecektir. Malzeme ve sermaye maliyetlerinin azaltılması, montaj hattı etkinliğinin artırılmasıyla doğrudan ilgili olmadığı değerlendirilmektedir. Geleneksel montaj kökenli, otomobil, ev aletleri, kameralar gibi sektörlerde, son montajın genellikle emeğe dayalı olarak yapıldığı, otomasyonun fazla olmadığı üretim ortamların işgücü maliyeti toplam maliyetin büyük bir yüzdesini oluşturmaktadır. Dolayısıyla iş gücü maliyetini azaltmak toplam üretim maliyetinin büyük bir kısmının azaltılmasına neden olmaktadır [7]. Steffen 1977 çalışmasında, bir istasyonda çalışan işçinin saatlik ücret oranının, istasyonuna atanan görevlerin ücret oranlarına farklı şekillerde bağlı olabileceğini belirtmiştir [8]. MTMHD problemlerinde her görevin zorluk derecesine göre belirli bir ücret oranı kabul edilmektedir ve bir istasyonda çalışan bir işçinin ücret oranı, o istasyonda yapılan en zor görevin ücret oranına eşittir. Bu ücret oranı, toplam çevrim zamanı (boş zaman + istasyon zamanı) için ödenmektedir. Dolayısıyla ürünün birim başına toplam iş gücü maliyeti, tüm istasyonların ücret oranları toplamının çevrim zamanı ile çarpılmasıdır. Literatürde MTMHD problemleri üzerinde çalışma çok azdır. Rosenberg ve Ziegler MTMHD probleminin tanımını yaparak, iki farklı sezgisel algoritma önermiştir [9]. Amen, MTMHD probleminin karakteristik özelliklerinden bahsetmiştir ve [9]'in çalışmasında ele alınan maliyetlere sermaye maliyetini de eklemiştir ve Probleminin en iyi çözümünü bulabilmek için 7 tane baskın kural tanımlamıştır. Ayrıca, tanımladığı 7 baskın kuralı kullanan dal-sınır algoritması da önermiştir [10]. Amen diğer çalışmasında MTMHD problemlerinde mevcut çözüm süreçleri ve önerdiği iki yeni sezgisel ayrıntılı olarak açıklamıştır [11]. Amen'in 2001 çalışması, daha önceki çalışmasının [10] devamı olarak MTMHD problemleri için sezgisel yöntemlerin

çözüm kalitesi ve hesaplama zamanı ihtiyaçlarına odaklanmıştır [12]. Scholl ve Becker, Amen'in [10] makalesinde MTMHD Probleminin çözümü için önerdiği Dal-Sınır algoritmasının kullandığı baskın kurallardan bir tanesinin yanlış olduğunu belirterek, düzeltmiştir ve bu kurallara yeni bir tanesini eklemiştir [13]. Amen MTMHD Problemi çözümü için matematiksel model geliştirmiştir [14]. Ayrıca görevleri istasyonlara atarken maksimum dolu kuralının maliyet tabanlı problemlerde geçerli olmadığını ve bunun yerine iki istasyon kuralının kullanılması gerektiğini göstermiştir ve bu nedenle problemin çözümünün daha zor hale geldiğini ifade etmiştir. Yazdanparast ve arkadaşları, genel montaj hattı dengeleme problemi için [15] tarafından önerilen modeli dikkate alarak bir maliyet tabanlı model önermişlerdir [16]. Roshani ve arkadaşları maliyet tabanlı iki taraflı montaj hatları için bir tavlama benzetim algoritması geliştirmişlerdir [17]. Tusan maliyet tabanlı paralel montaj hattı dengeleme problemleri için yeni modeller önermiştir [7].

Bir montaj hattında, görev zamanlarının genellikle deterministik olduğu varsayımı dikkate alınmaktadır. Oysaki görev zamanlarının çeşitli sebeplerden dolayı (yorulma, dikkatin dağılması, yetersiz nitelikteki işgücü, iş tatminsizliği, hatalı girdiler, araç/gereç bozulmaları gibi) değişkenlik gösterebilmektedir, başka bir deyişle görev zamanlarının stokastik olabileceği bilinmektedir. Stokastik montaj hattı dengeleme ise ilk defa Moodi ve Young tarafından ortaya koyulmuştur [18]. Literatürde stokastik montaj hatları üzerinde çeşitli çalışmalar bildirilmiştir [19-23].

Literatürde şu ana kadar maliyet tabanlı montaj hat dengeleme problemleri ile ilgili yapılan çalışmaların tamamında görev sürelerinin deterministik olduğu görülmektedir. O yüzden literatürde, maliyet tabanlı stokastik montaj hat dengeleme (MTSMHD) problemi için bir boşluk görülmektedir. Bu çalışmada bu boşluğu kaplamak için bir şans kısıtlı, karışık tam sayılı model önerilmiştir.

Çalışmanın geri kalan kısmı şu şekilde düzenlenmiştir: Bir sonraki bölümde; Amen [14]'nin önerdiği MTMHD modeli ele alınmış ve küçük bir problem üzerinde açıklanmıştır. Bölüm 3'te, önerilen şans kısıtlı, karışık tam sayılı model verilmiştir. Bölüm 4'te sonuçlar ve tartışma ve son olarak da sonuçların değerlendirilmesi Bölüm 5'de yapılmıştır.

## 2. MTMHD MODELİ VE BİR ÖRNEK AÇIKLAMASI (MTMHD MODEL AND DESCRIPTION OF AN EXAMPLE)

Önerilen stokastik yapı model ve esas alınan [14]'in modelinde, aşağıdaki notasyonlar kullanılmıştır :

C çevrim zamanı  
n görev sayısı

- M istasyon sayısı  
 i, h görev indisi  $i, h = 1, \dots, n$   
 j istasyon indisi  $j = 1, \dots, M$   
 $k_j^s$  j. istasyon ücret oranı  
 $k_i^t$  i. görevin ücret oranı  
 $x_{ij}$  i görevi j istasyonuna atanmışsa 1, diğer durumlarda 0 değeri  
 $S_j$  eğer j istasyonu açılmışsa 1, diğer durumlarda 0  
 $R_i$  i. görevin öncüller kümesi  
 $E_i$  i görevin yapılabileceği en erken istasyon  
 $L_i$  i görevin yapılabileceği en geç istasyon  
 $w_j$  j istasyonuna atanabilen görev kümesi

Deterministik Maliyet Tabanlı MHD problemi için [14]'in modeli aşağıda verilmektedir:

$$\text{Min } k = c. \sum_{j=1}^M k_j^s$$

st:

$$\sum_{j=1}^M x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

$$k_j^s \geq k_i^t \cdot x_{ij} \quad j = 1, \dots, M \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^n t_i \cdot x_{ij} \leq c \cdot S_j \quad j = 1, \dots, M \quad (2.3)$$

$$\sum_{j=1}^M j \cdot x_{hj} \leq \sum_{j=1}^M j \cdot x_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad h \in R_i \quad (2.4)$$

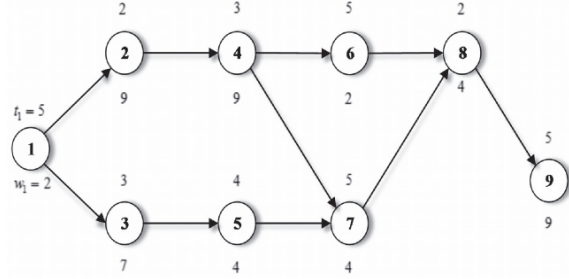
$$S_j \geq S_{j+1} \quad j = 1, \dots, M - 1 \quad (2.5)$$

$$x_{ij}, S_j \in \{0,1\} \quad j = 1, \dots, M, i = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

Modelin amacı, bir üretim biriminin toplam üretim maliyetini en küçükmektir. Eş. (2.1) her görevin sadece bir istasyona atanmasını sağlamaktadır ve tüm görevler atanmalıdır. Eş. (2.2), Bir istasyonun maliyet oranı, o istasyona atanan görevlerin en yüksek maliyet oranı olduğunu ifade etmektedir. Eş. (2.3), montaj hattında kullanılan herhangi bir istasyonun toplam iş yükünün, çevrim zamanını aşmamasını sağlamaktadır. Eş. (2.4), görevler arasındaki öncelik ilişkilerinin sağlanmasını ifade etmektedir. Eş. (2.5), istasyonların ardışık kurulmasını sağlamaktadır. Eş. (2.6), karar değişkenlerin 0 veya 1 değerini almalarını sağlamaktadır.

ZTMHD probleminin çözümünde başarılı olan maksimum dolu istasyon kuralı, MTMHD Probleminde optimal çözümü kaçırdığı için kullanılamaz, bu nedenle de istasyon doluluk oranını biraz daha gevşek tutan iki istasyon kuralı kullanılmaktadır. Bu durumun ve MTMHD probleminin daha iyi anlaşılması için Şekil 1.'de

verilen sayısal örnek problem çözülmüştür ve maliyet tabanlı yaklaşımla elde edilen çözüm ile zaman tabanlı yaklaşımla elde edilen çözüm, istasyon sayısı ve toplam üretim maliyeti açısından karşılaştırılmıştır. Bu örnek için çevrim zamanı 8 olarak verilmiştir.



Şekil 1. 9 görevli öncelik diyagramı (9 task precedence diagram)

Yukarıdaki örnek problemin en iyi çözümü IBM ILOG CPLEX 12.4 yazılımı yardımıyla bulunmuştur. Tablo 1'in sağ tarafında yer alan MTMHD probleminin en iyi görev atamalarına göre, birim ürünün toplam üretim maliyeti 240 pb ve tüm görevlerin atandığı istasyon sayısı ise 6 olarak bulunmuştur. Bunun yanında, görevlerin maliyet oranları ihmal edilerek aynı örnek problem, istasyon sayısını en küçükleyecek şekilde ZTMHD problemi olarak da çözülmüştür. ZTMHD probleminin elde edilen en iyi çözümü Tablo 1'in sol tarafında verilmiştir. Zaman tabanlı probleminin en iyi görev atamalarına göre, kullanılan istasyon sayısı 5 iken, birim ürünün toplam üretim maliyeti 304 pb bulunmuştur.

Tablo 1. MTMHD ve ZTMHD problemlerinin en iyi çözümleri (the best solutions of MTMHD and ZTMHD problems)

İstasyon (k)	ZTMHD			MTMHD		
	$I_k^s$	Boş zaman	Maliyet oranı	$I_k^s$	Boş zaman	Maliyet oranı
1	{1,2}	1	9	{1}	3	2
2	{3,5}	1	7	{2,3,4}	0	9
3	{4,7}	0	9	{5}	4	4
4	{6,8}	1	4	{6}	3	2
5	{9}	3	9	{7}	3	4
6				{8,9}	1	9
Toplam maliyet oranı		38		30		
Toplam üretim maliyeti		38*8= 304		30*8= 240		
Toplam boş zaman		6		14		
Toplam istasyon sayısı		5		6		

Buradan çıkarılması gereken üç sonuç vardır: Birincisi, eğer problem maksimum dolu istasyon kuralına göre çözümlerse, MTMHD problemin optimal sonucu bulunmamaktadır. İkincisi, istasyon sayısındaki en küçükleme toplam maliyeti azaltmamaktadır. Tam tersine çözümden de görüleceği gibi, istasyon sayısındaki artış, toplam üretim maliyetini 304'den 240'ye düşürmüştür. Üçüncü sonuç ise, ZTMHD Probleminde amaç, istasyon sayısını en küçüklerken, istasyon (operatör) boş zamanlarını da (idle time) en küçüklemektir. Fakat, MTMHD Problemindeki amaç bir ürünün toplam üretim maliyetini en küçüklemek olduğu için, bu istediğimiz sonuç değildir.

### 3. ÖNERİLEN ŞANS KISITLI MALİYET TABANLI STOKASTİK MONTAJ HATTI DENGELEME (MTSMHD) MODELİ (PROPOSED COST ORIENTED STOCHASTIC ASSEMBLY LINE BALANCING MODEL)

Geliştirilen yeni şans kısıtlı 0-1 tam sayılı programlama modelinin amacı, istasyona atanan görev zamanları toplamının, istasyon çevrim zamanını aşma olasılığın belirlenen  $\alpha$  seviyesinin altında kalacak şekilde ( $P_k \leq \alpha$ ) en küçük maliyet ile dengelemeyi yapmaktır. Model içerisinde stokastik durum ifade eden görev zamanlarının normal olasılık dağılımına uyduğu kabul edilmiştir. Ayrıca modelde maliyet oranlarının sabit ve belirli olduğu varsayılmıştır.

Görev zamanı  $t_i$ ,  $t_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$  iken  $Y = \sum t_i$  alınırsa,  $Y \sim N(\sum \mu_i, \sum \sigma_i^2)$ ,  $z = \frac{Y - \sum \mu_i}{\sqrt{\sum \sigma_i^2}}$

dönüşümü ile  $Z \sim N(0,1)$  olur.

İstasyon zamanını çevrim zamanını aşma olasılığı en fazla  $\alpha$  olacağından,  $P(Y > C) \leq \alpha$  yazılabilir. Biraz daha düzenleme yapılırsa  $1 - P(Y \leq C) \leq \alpha$  ve ya  $P(Y \leq C) \geq 1 - \alpha$  olur. Buradan  $Z$  dönüşümü yapılırsa Eş. 3.1 Eşitliği elde edilir.

$$P\left(z \leq \frac{C - \sum \mu_i}{\sqrt{\sum \sigma_i^2}}\right) \geq 1 - \alpha \quad (3.1)$$

$P(z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$  olduğundan. Eş. 3.1 den Eş. 3.2 veya 3.3 elde edilir.

$$z_{1-\alpha} \leq \frac{C - \sum \mu_i}{\sqrt{\sum \sigma_i^2}} \quad (3.2)$$

$$\sum \mu_i + z_{1-\alpha} \sqrt{\sum \sigma_i^2} \leq C \quad (3.3)$$

Eş. 3.3' a göre değişkenleri ( $x_{ij}$ ) eklendiğinde sonuç olarak Eş. 3.4'te verilen yeni kısıtlar elde edilir. Bu kısıtlar yeni modelde deterministik çevrim zamanı kısıtlarının yani Eş. 2.3'ün yerini alacaktır.

$$\sum_{i=1}^n \mu_i \cdot x_{ij} + z_{1-\alpha} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \cdot x_{ij}} \leq c \cdot Z_j \quad (3.4)$$

$$j = 1, \dots, M$$

Geliştirilen kısıt doğrusal olmayan kısıttır ve bu kısıtın doğrusallaştırılması gereklidir. Bunun için Ağpak ve Gökçen çalışmasında kullanılan yaklaşım bu kısıt için de uygulanmıştır [24]. Bu kısıtın doğrusal olmamasının sebebi eş 3.3 teki görev değişkeni eklenmiş haliyle  $\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \cdot x_{ij}}$  terimidir. Bu nedenle bu terimde kökün kaldırılması ile doğrusallaştırma mümkün olacaktır. Bunun için Eş 3.3'ün her iki tarafının karesi alınarak Eş 3. 5 elde edilmiştir.

$$z_{1-\alpha} \leq \frac{C - \sum \mu_i \cdot x_{ij}}{\sqrt{\sum \sigma_i^2 \cdot x_{ij}}} \rightarrow \quad (3.5)$$

$$(z_{1-\alpha})^2 \leq \frac{(C - \sum \mu_i \cdot x_{ij})^2}{\left(\sqrt{\sum \sigma_i^2 \cdot x_{ij}}\right)^2}$$

Eş 3.5 ile  $\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \cdot x_{ij}}$  teriminden kaynaklanan doğrusal olmayan durum kaldırılırken  $(C - \sum \mu_i \cdot x_{ij})^2$  terimiyle yeni bir doğrusal olmayan durum karşımıza çıkmıştır. Terimin açılmış hali Eş 3.6'te verilmiştir.

$$\left( C - \sum \mu_i \cdot x_{ij} \right)^2 = C^2 - 2C \sum \mu_i \cdot x_{ij} + \begin{pmatrix} \mu_1^2 x_{1j}^2 + \mu_1 x_{1j} \mu_2 x_{2j} + \dots + \mu_1 x_{1j} \mu_n x_{nj} \\ \mu_1 x_{1j} \mu_2 x_{2j} + \mu_2^2 x_{2j}^2 + \dots + \mu_2 x_{2j} \mu_n x_{nj} \\ \vdots \\ \mu_1 x_{1j} \mu_n x_{nj} + \mu_2 x_{2j} \mu_n x_{nj} + \dots + \mu_n^2 x_{nj}^2 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$x_{ij}^2$  değişken 0-1 tamsayı olduğundan  $x_{ij}$  ye eşittir.  $(\mu_i x_{ij} \mu_n x_{nj})$  terimi ise doğrusal olmayan kısımdır. Bunun için literatürde var olan dönüşüm teknikleri kullanılmıştır.

$$u_{ivj} = x_{ij} \cdot x_{vj} \quad (3.7)$$

Eş 3.7 teki değişken dönüşümü yapıldıktan sonra Eş 3.8 ve 3.9 ile  $u_{inj}$ ,  $x_{ij}$  ve  $x_{nj}$  ile ilişkilendirilmiştir.

$$x_{ij} + x_{vj} - u_{ivj} \leq 1 \quad (3.8)$$

$$x_{ij} + x_{vj} - 2u_{ivj} \geq 0 \quad (3.9)$$

Eş 3.5 dikkat edilmesi gereken bir diğer durumda eşitsizliğin, payın iki durumu için geçerli olmasıdır. Bunlar Eş 3.10 ve 3.11 da verilmiştir.

$$z_{1-\alpha} \leq \frac{C - \sum \mu_i \cdot x_{ij}}{\sqrt{\sum \sigma_i^2 \cdot x_{ij}}} \quad (3.10)$$

$$-z_{1-\alpha} \geq \frac{C - \sum \mu_i \cdot x_{ij}}{\sqrt{\sum \sigma_i^2 \cdot x_{ij}}} \quad (3.11)$$

Eş 3.11, Eş 3.5'in  $1 - (1 - \alpha)$  olasılığında da geçerli olmasına izin vermektedir. Bu nedenle Eş 3.12, Eş 3.5'le birlikte kullanarak bu durum ortadan kaldırılmış olacaktır. Aynı zamanda bu kısıt temel deterministik modelde yer alan çevrim zamanı kısıtıyla aynıdır.

$$\left(C - \sum \mu_i \cdot x_{ij}\right) \geq 0 \quad (3.12)$$

stokastik montaj hatlar için tanımlanan minimum istasyon sayısı  $T_{min}$ ,  $i$  görevin yapılabileceği en erken istasyon  $E_i$  ve  $i$  görevin yapılabileceği en geç istasyon  $L_i$ , aşağıda eşitsizlikler ile ifade edilmektedirler.

$$T_{min} = \left\lceil \frac{z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2} + \sum_{i=1}^n \mu_i}{C} \right\rceil \quad (3.13)$$

$$E_i = \left\lceil \frac{\mu_i + \sum_{i \in p_i} \mu_i + z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\sigma_i^2 + \sum_{i \in p_i} \sigma_i^2}}{C} \right\rceil \quad (3.14)$$

$$L_i = M + 1 - \left\lfloor \frac{\mu_i + \sum_{i \in s_i} \mu_i + z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\sigma_i^2 + \sum_{i \in s_i} \sigma_i^2}}{C} \right\rfloor \quad (3.15)$$

$E_i$  ve  $L_i$  tanımları kullanılarak doğrusallaştırılmış olan model aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$\min k = c \cdot \sum_{j=1}^M k_j^s$$

st:

$$\sum_{j=E_i}^{L_i} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.16)$$

$$k_j^s \geq k_i^t \cdot x_{ij} \quad j = E_i, \dots, L_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.17)$$

$$C^2 - 2C \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot x_{ij} + \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \cdot x_{ij}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{v=i+1}^n \mu_i \cdot \mu_v \cdot u_{ivj} - \quad (3.18)$$

$$z_{1-\alpha}^2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \cdot x_{ij} \geq 0 \quad j = 1, \dots, M$$

$$\sum_{i \in w_j} \mu_i \cdot x_{ij} \leq c \cdot S_j \quad j = 1, \dots, M \quad (3.19)$$

$$\sum_{j=E_h}^{L_i} j \cdot x_{hj} \leq \sum_{j=E_i}^{L_i} j \cdot x_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad h \in R_i \quad (3.20)$$

$$S_j \geq S_{j+1} \quad j = 1, \dots, M - 1 \quad (3.21)$$

$$x_{ij} + x_{vj} - u_{ivj} \leq 1 \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, M \\ i = 1, \dots, n \\ v = i + 1, \dots, n \end{matrix} \quad (3.22)$$

$$x_{ij} + x_{vj} - 2u_{ivj} \geq 0 \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, M \\ i = 1, \dots, n \\ v = i + 1, \dots, n \end{matrix} \quad (3.23)$$

$$x_{ij}, u_{ivj}, S_j \in \{0,1\} \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, M \\ i = 1, \dots, n \\ v = i + 1, \dots, n \end{matrix} \quad (3.24)$$

#### 4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA (RESULTS AND DISCUSSION)

Literatürde MSMHD problemleri için test problemi bulunmamaktadır. Dolayısıyla geliştirilen modelin performans ve davranış analizini yapmak için test problemi gerekmektedir. Test problemlerinin üretimi için, literatürdeki bilinen deterministik test problemlerinden faydalanılmıştır. Her problem, görev sayısı, görev süresi, görevlerin öncelik ilişkileri ve çevrim zamanını içermektedir. Problem verileri arasında her görevin ücret oranı bilgisi bulunmamaktadır. Ücret oranları verileri hazırlanırken, kolay, orta ve zor test problem setleri hazırlamak için, Amen [12]'nin çalışmasında yer alan yöntem dikkate alınmıştır.

Stokastik test problemleri oluşturulurken Guerriero ve Miltenburg çalışması ele alınmıştır [25]. Bu çalışmada, test problemi oluşturulması amacıyla öncelikle üç farklı varyans tipi ve bunların alabileceği değişim katsayılarının (CV- Coefficient of Variation) alt ve üst sınır değerlerini oluşturmuşlardır. Kullanılan CV değeri; istatistik bilimi içerisinde sıkça karşılaşılan ve verilerin değişkenliğini standart sapmanın ortalamaya oranlanması yoluyla normalize eden bir katsayıdır. Belirlenen varyans tipleri düşük varyans ( $0 < CV < 0,3$ ), yüksek varyans ( $0,3 < CV < 0,6$ ), ve rassal varyanstır ( $0 < CV < 0,6$ ). İkinci aşamada ise bu aralıklarda rassal sayılar üretilerek ortalama zaman değerleri ile çarpılmış ve sonuç olarak her varyans tipi için uygun varyans değerleri oluşturulmuştur. Bu çalışmada kullanılan deterministik test problemlerin görev zamanları ortalama görev zamanı olarak kabul edilmiştir, belirlenen varyans tipine göre sınır değerleri arasından düzgün (Uniform) dağılıma uygun olarak rassal sayılar üretilerek her bir görev için ayrı CV değerleri üretilmiştir. Bu değerler ortalama görev zamanları ile çarpılarak her bir görevin varyansı

belirlenmiştir. Böylelikle deterministik test problemi kümesi, stokastik durum için kullanılabilir bir yapıya dönüştürülmüştür. Yukarıda anlatılan yaklaşım ile her

test probleminden farklı değişim katsayıları dikkate alınarak, 3 test problemi üretilmiştir.

**Tablo 2.** MTSMHD ve ZTSMHD problemlerin istasyon ve toplam işgücü açısından karşılaştırılması (Comparison in terms of total cost and number of station between MTSMHD and ZTSMHD)

Problem No	Görev No	Çevrim zamanı	Varyans Tipleri	$(\alpha)$	$M_{min}$	MTSMHD			ZTSMHD		
						Maliyet	İstasyon	Zaman	Maliyet	İstasyon	Zaman
1 (Jackson)	11	10	L	H	5	500	6	0,59	540	6	0,08
				M	5	500	6	0,39	540	6	0,11
				L	5	520	6	0,33	540	6	0,08
			H	H	6	570	7	0,37	600	7	0,09
				M	6	620	8	0,56	620	8	0,16
				L	6	NF	-	-	NF	-	-
			R	H	6	570	7	0,37	590	7	0,08
				M	6	580	7	0,41	580	7	0,08
				L	6	630	8	0,50	660	8	0,11
2 (Jackson)	11	15	L	H	4	525	4	1,31	540	4	0,09
				M	4	525	4	1,53	540	4	0,09
				L	4	525	4	1,25	585	4	0,16
			H	H	4	525	4	1,09	525	4	0,11
				M	4	585	4	0,98	585	4	0,14
				L	4	615	5	1,40	720	5	0,14
			R	H	4	525	4	1,48	525	4	0,08
				M	4	525	4	1,42	525	4	0,06
				L	4	615	5	1,67	615	5	0,20
3 (Jackson)	11	19	L	H	3	513	3	1,00	513	3	0,09
				M	3	513	3	1,18	513	3	0,08
				L	3	513	3	0,67	551	3	0,08
			H	H	3	551	3	0,58	551	3	0,06
				M	3	627	4	1,68	703	4	0,13
				L	3	665	4	0,95	665	4	0,12
			R	H	3	551	3	0,76	551	3	0,08
				M	3	551	3	0,56	551	3	0,08
				L	3	627	4	1,26	722	4	0,19
4 (Roszieg)	25	16	L	H	9	3488	10	266,26	3568	10	1,22
				M	9	3552	10	184,69	3584	10	1,11
				L	9	3680	11	113,15	3950	11	1,15
			H	H	9	3680	11	100,84	3872	11	1,67
				M	9	3888	12	123,52	4176	12	1,51
				L	9	NF	-	-	NF	-	-
			R	H	9	3552	10	212,47	3568	10	1,47
				M	9	3776	11	395,88	3952	11	3,26
				L	9	3856	11	379,19	3936	11	4,56
5 (Roszieg)	25	22	L	H	6	3388	7	47,39	3674	7	1,54
				M	6	3630	7	36,74	3652	7	1,84
				L	6	3630	7	41,86	3696	7	1,72
			H	H	7	3630	7	33,24	3718	7	1,45
				M	7	3718	8	57,55	4114	8	9,11
				L	7	3784	8	41,50	4202	8	9,47
			R	H	6	3630	7	43,99	3630	7	1,62
				M	7	3630	7	36,39	3718	7	1,79
				L	7	3718	8	45,72	4114	8	8,49
6 (Roszieg)	25	30	L	H	5	3540	5	6,47	3630	5	1,57
				M	5	3540	5	7,30	3630	5	0,78
				L	5	3570	5	9,50	3630	5	1,56
			H	H	5	3630	5	27,99	3630	5	2,75
				M	5	3930	6	38,16	4350	6	5,32
				L	5	3930	6	57,33	4290	6	3,24
			R	H	5	3540	5	7,77	3540	5	0,56
				M	5	3900	6	45,30	4230	6	3,59
				L	5	3930	6	32,65	4230	6	2,76

Tablo 2. (Devam)

Problem No	Görev No	Çevrim zamanı	Varyans Tipleri	$(\alpha)$	$M_{min}$	MTSMHD			ZTSMHD		
						Maliyet	İstasyon	Zaman	Maliyet	İstasyon	Zaman
7 (Kilbridge)	45	79	L	H	8	23621*	8	72000	26623	8	72000
				M	8	24095*	8	72000	25833	8	59296
				L	8	24332*	8	72000	25517	8	15928
			H	H	8	24569*	8	72000	26070	8	12591
				M	8	24648*	8	72000	26465	8	35,97
				L	8	26623*	9	72000	26781	8	1460
			R	H	8	24490*	8	72000	27176*	8	72000
				M	8	24490*	8	72000	26307	8	13982
				L	8	25596*	8	72000	25991	8	17,13
8 (Kilbridge)	45	110	L	H	6	24420*	6	72000	26785	6	11654
				M	6	24530	6	72000	26982	6	12567
				L	6	24310	6	72000	25786	6	10987
			H	H	6	24310	6	60296	25690	6	987
				M	6	24420	6	62486	26342	6	8998
				L	6	25410*	6	72000	28912	6	1786
			R	H	6	24640*	6	72000	27675	6	60756
				M	6	24640*	6	72000	27914	6	80989
				L	6	24750*	6	72000	27914	6	56778
9 (Kilbridge)	45	138	L	H	5	25254*	5	72000	29118	5	1773
				M	5	25392*	5	72000	29118	5	31744
				L	5	25530*	5	72000	29118	5	31976
			H	H	5	25392	5	17792	30536	5	3
				M	5	25392	5	8327	29808	5	2
				L	5	25668	5	19802	29290	5	3
			R	H	5	25254	5	5983	29118	5	17614
				M	5	25254	5	5946	29670	5	3
				L	5	26082*	5	72000	29118	5	3380

Bu test problemler, modelde farklı  $(\alpha)$  değerleri (istasyon zamanı, çevrim zamanı aşma olasılığının üst limiti) alınarak çözülmüştür.  $(\alpha)$  değerleri düşük ( $\alpha=0.05$ ) orta ( $\alpha=0.10$ ) ve yüksek ( $\alpha=0.15$ ) olarak belirlenmiştir. Böylece her bir test problemi farklı parametreler ile 9 kez çözülmüştür. Toplamda bu çalışmada 9 küçük ve orta boyutlu test problemi farklı parametrelerle 81 kez, hem ZTSMHD problemi hem de MTSMHD problemi için IBM ILOG Cplex 12.0 Optimizer Solver yazılımı kullanılarak çözülmüştür (Tablo 2). 81 test problemin 2 tanesinde uygun çözüm bulunmamaktadır. Bu nedenle değerlendirme 79 problem üzerinden yapılmıştır.

Tablo 2'de "\*" bulunan değerler 72000 saniyede bulunabilen en iyi değeri ifade etmektedir.  $M_{min}$ , teorik minimum istasyon sayısını göstermektedir.

MTSMHD'de amaç maliyet minimizasyonudur. MTSMHD'de amaç istasyon sayısının minimizasyonu olmamasına rağmen, elde edilen sonuçlara bakıldığında, ZTSMHD probleminin (amaç, istasyon minimizasyonudur) bulunduğu sonuçların tamamında MTSMHD'nin de aynı sonuçları bulunduğu (istasyon sayısı bakımından) görülmektedir. Bu önemli bir performanstır. Aynı zamanda çözülen 79 problemde 64 tanesinde MTSMHD den daha iyi maliyete sahip sonuçlar elde edilmiştir. Geri kalan 15 problemde ise aynı maliyet bulunmuştur.

## 5. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışmanın temel amacı, stokastik görev zamanlı maliyet tabanlı montaj hattı dengeleme problemi için bir matematiksel model önermektir. Bu amaçla, şans kısıt programlama yöntemi kullanılmaktadır. Geliştirilen model çeşitli test problemler üzerinde çözülmüştür ve sonuçlar istasyon sayısı ve toplam işgücü maliyeti açısından zaman tabanlı montaj hattı dengeleme problemleri sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Maliyet tabanlı modelin amaç fonksiyonu istasyon sayısının en aza indirilmesi olmamasına rağmen zaman tabanlı modele karşı aynı sayıda istasyon ve daha düşük maliyetler elde edilmiştir.

Bu çalışma gelecek çalışmalar için iyi bir başlangıç noktasını olarak şöyle özetlenebilir:

- MTSMHD problemleri bir NP-Hard problemi olduğu için büyük boyutlu problemlerde verimli bir şekilde çözülemez. Bu yüzden gelecek araştırmalarda sezgisel ve meta sezgisel yöntemlerin geliştirilmesi gerekmektedir;
- Hedef programlama yaklaşımı gibi çok kriterli karar verme tekniklerinin incelenmesi gelecekteki araştırmalar için iyi bir konu olabilir;

- Önerilen yaklaşımı farklı montaj hatları örneğin U şeklinde, paralel ve iki taraflı, hatlar için genişletmek ilgi çekici olabilir;
- Gama gibi farklı olasılık dağılımına göre stokastik görev zamanlarının geliştirilmesi ileriki çalışmalar da dikkate alınabilir;

#### KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Bryton, B., Balancing of a continuous production line. **M.Sc. Thesis, North-Western University**, 1954.
2. Salveson, M.E., The assembly line balancing problem. **Journal of Industrial Engineering**. Cilt:6, No:3, 18-25, 1955.
3. Becker, C.,Scholl, A., A survey on problems and methods in generalized assembly line balancing. **European Journal of Operational Research**. Cilt:168, No:3, 694-715, 2006.
4. Battaia, O.,Dolgui, A., A taxonomy of line balancing problems and their solution approaches. **International Journal of Production Economics**. Cilt:142, No:2, 259-277, 2013.
5. Cercioglu, H., et al., A Simulated Annealing Approach for Parallel Assembly Line Balancing Problem. **Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University**. Cilt:24, No:2, 331-341, 2009.
6. Scholl, A., Balancing and sequencing of assembly lines. **Darmstadt Technical University, Department of Business Administration, Economics and Law, Institute for Business Studies (BWL)**, 1999.
7. Tusan, D., Maliyet Tabanlı Paralel Montaj Hattı Dengeleme Problemleri: Yeni modeller. **Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Ankara, 2012.
8. Steffen, R., Produktionsplanung Bei Fließbandfertigung. **Gabler, Wiesbaden**, 1977.
9. Rosenberg, O.,Ziegler, H., A comparison of heuristic algorithms for cost-oriented assembly line balancing. **Zeitschrift für Operations Research**. Cilt:36, 477-495, 1992.
10. Amen, M., An exact method for cost-oriented assembly line balancing. **International Journal of Production Economics**. Cilt:64, No:1-3, 187-195, 2000a.
11. Amen, M., Heuristic methods for cost-oriented assembly line balancing: A survey. **International Journal of Production Economics**. Cilt:68, No:1, 1-14, 2000b.
12. Amen, M., Heuristic methods for cost-oriented assembly line balancing: A comparison on solution quality and computing time. **International Journal of Production Economics**. Cilt:69, No:3, 255-264, 2001.
13. Scholl, A.,Becker, C., A note on "An exact method for cost-oriented assembly line balancing". **International Journal of Production Economics**. Cilt:97, No:3, 343-352, 2005.
14. Amen, M., Cost-oriented assembly line balancing: Model formulations, solution difficulty, upper and lower bounds. **European Journal of Operational Research**. Cilt:168, No:3, 747-770, 2006.
15. Andres, C., Miralles, C.,Pastor, R., Balancing and scheduling tasks in assembly lines with sequence-dependent setup times. **European Journal of Operational Research**. Cilt:187, No:3, 1212-1223, 2008.
16. Yazdanparast, V., Hajihosseini, H.,Bahalke , A., Cost Oriented Assembly Line Balancing Problem with Sequence Dependent Setup Times **Australian Journal of Basic and Applied Sciences**. Cilt:5, 878-884, 2011.
17. Roshani, A., et al., Cost-oriented two-sided assembly line balancing problem: A simulated annealing approach. **International Journal of Computer Integrated Manufacturing**. Cilt:25, No:8, 689-715, 2012.
18. Moodie, C.L.,Young, H.H., A heuristic method of assembly line balancing for assumptions of constant or variable work element times. **The Journal of Industrial Engineering**. Cilt:16, No:1, 23-29, 1965.
19. Kottas, J.F.,Lau, H.-S., A stochastic line balancing procedure. **The International Journal of Production Research**. Cilt:19, No:2, 177-193, 1981.
20. Carraway, R.L., A Dynamic-Programming Approach to Stochastic Assembly Line Balancing. **Management Science**. Cilt:35, No:4, 459-471, 1989.
21. Suresh, G.,Sahu, S., Stochastic assembly line balancing using simulated annealing. **The International Journal of Production Research**. Cilt:32, No:8, 1801-1810, 1994.
22. Liu, S., Ong, H.,Huang, H., A bidirectional heuristic for stochastic assembly line balancing type II problem. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**. Cilt:25, No:1-2, 71-77, 2005.
23. Alagas, H.M., Yuzukirmizi, M.,Turker, A.K., Balancing Stochastic Assembly Lines Using Constraint Programming and Queueing Networks. **Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University**. Cilt:28, No:2, 231-240, 2013.
24. Ağpak, K.,Gökçen, H., A chance-constrained approach to stochastic line balancing problem. **European Journal of Operational Research**. Cilt:180, No:3, 1098-1115, 2007.
25. Guerriero, F.,Miltenburg, J., The stochastic U-Line balancing problem. **Naval Research Logistics**. Cilt:50, No:1, 31-57, 2003.