

## Türkiye 2014-2016 Hayat Tablolarında Doğrusal-olmayan Büyüme Fonksiyonları Uygulaması

Cemil İskender<sup>1</sup> 

### Öz

Hayat tabloları, nüfus istatistikleri esas alınarak düzenlenir ve yaşlara göre ölüm hızlarını, ölüm olasılıklarını, yıllara göre hayatta kalanların sayıları ve yaşanması beklenen süreleri ihtiva eder. Bu tablolar sosyal güvenlik kurumları, sigorta şirketleri, emeklilik kurumları vs. tarafından aktüeryal hesaplamalarda kullanılır. Türkiye’de de bu tablolar TÜİK tarafından yayınlanmaktadır. En son 2013-2016 yıllarını kapsayan tablolar yayınlanmıştır. Bu çalışmamızda tablolardaki yüz yıllık sürede hayatta kalanlar istatistiklerinin doğrusal-olmayan fonksiyonlarla temsiliyetini istatistiksel analiz ile araştırdık. Amacımıza uygun olarak Gompertz büyüme fonksiyonunu kullandık ve tablolardaki toplam nüfus ve kadın ve erkek nüfus için üç hesaplama yaptık. Başarılı istatistik sonuçlar aldık. Hayatta kalanlar için % 9-11 arası küçülme hızları tespit ettik. Aynı verilere Richards lojistik büyüme fonksiyonunu uyguladığımızda iyi sonuçlar alamadık. Elimizdeki serilere dayanarak düzenlediğimiz yıllara göre artan ölümler serilerine Richards fonksiyonunu uyguladığımızda uygun ve başarılı sonuçlar aldık. % 20-23 arası büyüme oranları bulduk. Her iki fonksiyon analizinde de önceliğimiz doğrusal olmayan fonksiyonların ve fonksiyonların hesaplanmasında kullanılan istatistiksel yöntemlerin hesap ve ispat gücünü ve faydasını ortaya koymak, teorik bilgileri verilerle buluşturmak. Başardığımız kanısındayım.

### Anahtar Kelimeler

Türkiye Hayat tabloları • Richards Lojistik Büyüme Fonksiyonu • Gompertz Büyüme Fonksiyonu  
• Hayat Tabloları İstatistiksel Analizi • Matematik Modelleme

### Application of Non-linear Growth Functions for Turkish 2014–2016 Life Tables

### Abstract

In this study, a representation of survivors statistics from TÜİK Turkish mortality tables (2014-2016) with non-linear growth functions was investigated by applying advanced statistical methods. Firstly, the Gompertz function was used for this purpose. Gompertz function was specifically developed by Benjamin Gompertz for the analysis of mortality tables. We calculated three functions for both male and female populations and for total population. Successful statistical results were obtained for all groups. Intrinsic contraction rates ranging from 9 to 11% were calculated for the survivors of the three series. Although we have been successful with statistical tests of Gompertz function, Richards logistic growth function didn't give us satisfactory statistical results when applied this function to survivors series of Turkish mortality table. This was not a surprise because we knew that logistic growth function was already developed by Verhulst mainly for mathematical explanation of increasing population figures not for decreasing population figures. Turkish mortality tables does not include number of dying population by ages. Then we recalculated number of dying population by years from the survivors figures of Turkish mortality tables. In this case Richards logistic function gave successful statistical results with the number of dying population by years. The intrinsic growth rate was found between 20 and 23% for total population and male and female populations. As result we used Gompertz function successfully for survivors population of mortality table which is a decreasing serie by years and Richards logistic function for number of dying population which is an increasing serie by years. Our priority in the analysis of both functions was to show the calculation and proof power of non-linear growth functions and advanced statistical methods were applied for this reason. Six successful functions were obtained of which three were for the survivors series using the Gompertz function and three were for the number of dying population series using the Richards logistic growth curve.

### Keywords

Türkish Mortality Tables • Richards Logistic Growth Function • Gompertz Growth Function

• Statistical Analysis of Life Tables

1 Sorumlu Yazar: Cemil İskender, Ekonomist, İstanbul, Türkiye. Eposta: iskenderc@ttmail.com

Atf: İskender, C. (2018). Türkiye 2014-2016 Hayat Tablolarında Doğrusal-olmayan Büyüme Fonksiyonları Uygulaması. *Ekoist: Journal of Econometrics and Statistics*, 14(29), 151-168. <https://doi.org/10.26650/ekoist.2018.14.29.0011>

Hayat tabloları, nüfus istatistikleri esas alınarak düzenlenir ve yaşlara göre ölüm hızlarını, ölüm olasılıklarını, yıllara göre hayatta kalanların sayıları ve yaşanması beklenen süreleri ihtiva eder. Bu tablolar sosyal güvenlik kurumları, sigorta şirketleri, emeklilik kurumları vs. tarafından aktüeryal hesaplamalarda kullanılır. Mortalite tabloları olarak da anılırlar. İlk olarak Batı Avrupa’da on dokuzuncu yüzyılın başından itibaren düzenlenip kullanılmaya başlanmıştır. Tablolarda örneğin yüz bin kişilik örnek bir nüfus kitlesinin yüz yıllık bir sürede ölenler ve kalanlar olarak nasıl seyrettiğini, hayat bekleyişlerini, yaşlar itibariyle hayatta kalma ihtimallerini vs. gösterir. Tüm nüfus için temsil kabiliyetine sahiptirler. Tablolar nüfusun gelişimine paralel olarak belirli sürelerde yenilenirler. Hesaplamalar demograflar tarafından bu disiplin için geliştirilmiş yöntemlere göre yapılır. Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) hayat tablolarından<sup>1</sup> 0-16 yaş kısmı örnek resmi aşağıda verilmiştir. Tablodaki l(x) kolonları çalışmamızda kullanılmıştır.

Amacımız TÜİK tablosundaki yüzyıllık sürede hayatta kalanların sayılarını analiz ederek bunların matematiksel büyüme fonksiyonlarıyla temsiliyetini istatistiksel olarak belirlemektir. Tablodaki serilerin hesap tarzlarını ve yöntemlerini irdelemek gibi bir amacımız yoktur. Nüfus istatistikleri çoğunlukla artan serileri temsil ederler. Ancak burada durum farklıdır. Hayat tabloları azalan serileri ihtiva eder. İstatistikler sıfır yaşında yüz bin olan nüfusun yıllar itibariyle azalarak yüz yaşında kaç kişiye indiğini gösterir. Bu nedenle analizimiz bir büyüme olayını değil bir küçülme olayını ortaya koyacaktır. TÜİK tarafından 2014-2016 dönemi için düzenlenen tek yaş hayat tablosundaki toplam nüfus, kadın ve erkek nüfusta hayatta kalma istatistikleri küçülme olayına uygun örneklerdir. Aşağıda hayat tablosundaki “hayatta kalanlar” istatistiklerinin Gompertz<sup>2</sup> büyüme fonksiyonu ve hayatta kalanlar istatistiklerinden hesapladığımız “ölüm” istatistiklerinin Richards<sup>3</sup> lojistik büyüme fonksiyonu ile temsiliyeti irdelenerek elde edilen istatistiksel sonuçların geçerliliği ortaya konup yorumlanacaktır.

2014-2016 TÜİK hayat tablolarında yüz bin kişilik nüfus elli yaşına kadar çok az kayıp vermekte, ölümler elli yaşından ve özellikle altmış yaşından sonra hızlanmaktadır. Elli yaşına gelindiğinde nüfusun % 4.18’inin<sup>4</sup> öldüğü görülmektedir. Seksen yaşına gelindiğinde ölenlerin oranı % 46.15’dir. Nüfusun yarısından fazlası henüz hayattadır. Doksan yaşına gelindiğinde nüfusun % 82.21’i ölmüştür. 80-90 yaş arasında ölenlerin sayısı 36059 kişi, nüfusun % 36.01’idir. Doksan ve sonrası ölümler yavaşlamaktadır. Maalesef elimizde yüz yaş ötesi rakamlar olmadığından bu dönem bilinmemektedir. Hayat tablolarını on dokuzuncu yüz yılın başında analiz eden matematikçi Benjamin Gompertz doksan yaşını geçenlerin ölümlerinin iyice

1 <http://www.tuik.gov.tr>.

2 Gompertz, B. (1825). *On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 115, 513–583.

3 Richards, F.J., (1959) *A Flexible Growth Function for Empirical Use*, Journal of Experimental Botany, 10, 290–300.

4 Bu çalışmamızda kullandığımız SAS University Edition yazılımının uygulamasına bağlı kalarak ondalık kesirleri nokta ve gerektiğinde binlik haneleri virgül ile gösterdik.

Tablo 1

## TÜİK Hayat Tablosu Başlangıç Kısmı

Cinsiyete göre Türkiye tek yaş hayat tablosu, 2013-2016													
Single age life table for Turkey by sex, 2013-2016													
Yıl Year	Yaş Age	Toplam-Total				Erkek-Male				Kadın-Female			
		$m(x,n)^{(1)}$	$q(x,n)^{(2)}$	$l(x)^{(3)}$	$e(x)^{(4)}$	$m(x,n)^{(1)}$	$q(x,n)^{(2)}$	$l(x)^{(3)}$	$e(x)^{(4)}$	$m(x,n)^{(1)}$	$q(x,n)^{(2)}$	$l(x)^{(3)}$	$e(x)^{(4)}$
2014-2016	0	0.01089	0.01079	100 000	78.0	0.01157	0.01145	100 000	75.3	0.01018	0.01008	100 000	80.7
	1	0.00098	0.00098	98 921	77.8	0.00100	0.00100	98 855	75.1	0.00096	0.00096	98 992	80.5
	2	0.00055	0.00055	98 825	76.9	0.00059	0.00059	98 756	74.2	0.00051	0.00051	98 897	79.6
	3	0.00040	0.00040	98 770	75.9	0.00044	0.00044	98 698	73.3	0.00036	0.00036	98 846	78.6
	4	0.00032	0.00032	98 730	75.0	0.00035	0.00035	98 654	72.3	0.00030	0.00030	98 811	77.7
	5	0.00027	0.00027	98 698	74.0	0.00030	0.00030	98 620	71.3	0.00025	0.00025	98 781	76.7
	6	0.00024	0.00024	98 672	73.0	0.00026	0.00026	98 591	70.3	0.00022	0.00022	98 757	75.7
	7	0.00023	0.00023	98 648	72.0	0.00026	0.00026	98 565	69.4	0.00020	0.00020	98 736	74.7
	8	0.00023	0.00023	98 625	71.0	0.00027	0.00027	98 539	68.4	0.00018	0.00018	98 716	73.7
	9	0.00019	0.00019	98 603	70.1	0.00022	0.00022	98 513	67.4	0.00016	0.00016	98 699	72.7
	10	0.00022	0.00022	98 584	69.1	0.00026	0.00026	98 491	66.4	0.00017	0.00017	98 683	71.8
	11	0.00023	0.00023	98 563	68.1	0.00027	0.00027	98 465	65.4	0.00018	0.00018	98 665	70.8
	12	0.00025	0.00025	98 540	67.1	0.00031	0.00031	98 439	64.4	0.00019	0.00019	98 648	69.8
	13	0.00028	0.00028	98 516	66.1	0.00035	0.00035	98 408	63.5	0.00020	0.00020	98 629	68.8
	14	0.00033	0.00033	98 488	65.1	0.00043	0.00043	98 374	62.5	0.00022	0.00022	98 609	67.8
	15	0.00038	0.00038	98 456	64.2	0.00051	0.00051	98 332	61.5	0.00024	0.00024	98 587	66.8
	16	0.00043	0.00043	98 419	63.2	0.00059	0.00059	98 282	60.5	0.00026	0.00026	98 564	65.8

Kaynak: TÜİK, Hayat Tabloları, 2013-2016

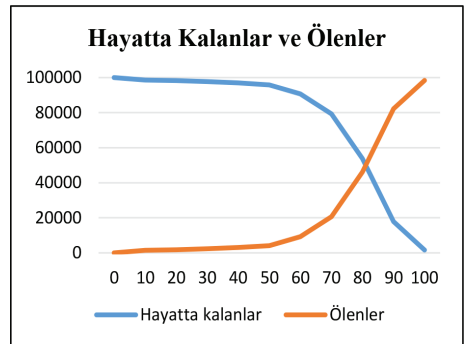
(1)  $m(x,n)$ : x ile x+n yaşları arasındaki yaşam tablosu ölüm hızı(2)  $q(x,n)$ : x yaşının başında hayatta olanların x+n yaşına kadar ölüm olasılığı(3)  $l(x)$ : x yaşının başında hayatta kalanların sayısı(4)  $e(x)$ : x yaşından sonra yaşanması beklenen süre

azaldığı ve uzun yıllar yaşadıkları tespitinde bulunmaktadır. Aynı tespit burada da geçerliliğini korumaktadır. On dokuzuncu yüzyılda düzenlenen hayat tablolarında ilk üç yıl içinde bebek ölümlerinin de çok yüksek olduğu görülmektedir. Türkiye örneğinde bu bir yaşına kadar düşmüştür ancak 0-1 yaş ölümleri halen yüksektir. 0-1 yaş arasında toplam nüfusta 1079 kişi ölmüştür. 1-2 yaş aralığında bu rakam sadece 96 kişidir. Takip eden rakamlarda hayatta kalma oranı yükselmektedir. 0-1 yaş verisi diğer verilerden önemli ölçüde ayrılmakta ve istatistiksel analizi olumsuz etkilemektedir. İleride göreceğiz.

Tablo 2

## Toplam Nüfus Özet Hayat Tablosu

Yaş	Hayatta kalanlar	Ölenler	Ölenler/100000 (%)
0	100,000	0	0
10	98,584	1,416	1.42
20	98,227	1,773	1.77
30	97,680	2,320	2.32
40	96,985	3,015	3.02
50	95,824	4,176	4.18
60	90,739	9,261	9.26
70	79,320	20,680	20.7
80	53,854	46,146	46.15
90	17,795	82,205	82.21
100	1,638	98,362	98.36



Grafik 1. Toplam Nüfus Grafiği.

Matematiksel büyüme fonksiyonları ve istatistiksel yöntemler yeni yayınlanan “Türkiye Nüfus Büyümesi ve Tahminleri” başlıklı yazımda<sup>5</sup> ayrıntılı olarak açıkladığından burada tekrar edilmeyecektir. Aşağıda sadece bu çalışmada kullandığımız Gompertz büyüme fonksiyonu ve Richards lojistik büyüme fonksiyonu için kısa bilgiler verilerek istatistiksel analize geçilecektir.

Hesaplamalarda doğrusal olmayan fonksiyonlar için geliştirilen hata kareleri toplamını en aza indirme yöntemi olarak “SAS University Edition NLIN Procedure<sup>6</sup>” yazılımı kullanılmıştır. Bu yöntem bilinen basit en küçük kareler yönteminden farklıdır. Çözüm ayrıntıları dipnot 5’te vardır.

### Gompertz Büyüme Fonksiyonu Sonuçları:

Gompertz (Gompertz-Makeham modeli) fonksiyonunda, L: başlangıç nüfusu (üst asimptot), K: son nüfus (alt asimptot), Q: büyüme taban sayısı, r içsel büyüme (küçülme) oranı (intrinsic growth rate) ve t: yaştır. Gompertz fonksiyonu dört parametrelili (K, L, Q, r) bir fonksiyondur.

$$\text{Fonksiyon: } Y(t) = K + (L - K)e^{-Qe^{(-rt)}}$$

$$\text{Birinci türev: } \frac{dY}{dt} = (L - K)Qre^{-Q(e^{(-rt)} - rt)}$$

$$\text{İkinci türev: } \frac{d^2Y}{dt^2} = (L - K)Qr(Qre^{(-rt)} - r)e^{-Q(e^{(-rt)} - rt)}$$

$$\text{Dönüm noktası: } t = \frac{\ln(Q)}{r}$$

Fonksiyon bu haliyle Gompertz’in tanımından farklıdır. William Makeham fonksiyona sabit terimi ilave etmiştir. Ölümler; yaşa bağımlı ölümler ve yaşa bağı olmayan ölümler (sabit terim) olarak iki bölümden oluşmaktadır. Bu ayrımı esas olarak istatistiksel uygulamalarımız gerçekleştirdik. Yüz bin kişilik başlangıç nüfusu, istatistiksel hesaplamada parametrelerin aldığı değerlere göre yüz yıllık sürede sıfıra

5 İskender, C . “Türkiye Nüfus Büyümesi ve Tahminleri: Matematiksel Büyüme Modelleri ve İstatistiksel Analiz İle Kuramsal ve Uygulamalı Bir Yaklaşım”. Ekonometri ve İstatistik e-Dergisi 14 (2018): 75-141 <<http://dergipark.gov.tr/iuekois/issue/39224/461853>>

6 [http://documentation.sas.com/?docsetId=statug&docsetTarget=statug\\_nlin\\_toc.htm&docsetVersion=14.3&locale=en](http://documentation.sas.com/?docsetId=statug&docsetTarget=statug_nlin_toc.htm&docsetVersion=14.3&locale=en).

doğru yaklaşacaktır. Y bağımlı değişken hayatta kalanların sayısı ve t ise açıklayıcı değişken yaştır. Hayatta kalanlar sayısı giderek azalan bir seri olduğuna göre burada hesaplanacak olan bir büyüme değil bir küçülme olayıdır. İstatistiksel çalışmada bilinen istatistik testleriyle birlikte, uyguladığımız fonksiyonlar doğrusal olmayan – kısaca: fonksiyonun bir parametreye göre (değişkene göre değil) türevi diğer parametrelere bağımlı olan<sup>7</sup>- bir yapıya sahip olduğu için doğrusallığa yaklaşımlarını sağlayan testler de uygulanacaktır. Yukarıda tanımı verilen Gompertz fonksiyonu bu çalışmamızda istatistik ve doğrusallık testleri için beklenen sonuçları vermiştir.

Fonksiyonda doğrusallığı sağlamak için  $Q=\exp(Qe)$  olarak kullanılmıştır. Doğrusallık, fonksiyonun istatistik test değerleri yeterli olmayan parametrelerini ikinci aşamada tahminden önce yeniden tanımlayarak basit en küçük kareler yöntemine yaklaşma için uygulanan matematiksel dönüşümdür.

Gompertz fonksiyonuyla yapılan istatistiksel çalışma sonuçları tablo 3’te toplu olarak verilmiştir.

Gompertz fonksiyonu için istatistiksel çalışmadan elde ettiğimiz parametre değerlerini yerine koyduğumuz zaman toplam nüfus, kadın ve erkek nüfus 2014-2016 hayat tablosunda hayatta kalanlar temsili fonksiyonları aşağıdaki şekilde olmaktadır.

Toplam nüfus:

$$Y(t) = 847 + (98219 - 847)e^{[\exp(-8.7872)e^{-(0.1037)t}]}$$

Kadın Nüfus:

$$Y(t) = 2015.9 + (98320.4 - 2015.9)e^{[\exp(-10.109)e^{-(0.1168)t}]}$$

Erkek Nüfus:

$$Y(t) = 231.2 + (98178.5 - 231.2)e^{[\exp(-8.0847)e^{-(0.0980)t}]}$$

Aşağıdaki açıklamalarımız toplam nüfus sonuçları üzerinden olacak benzer niteliklere sahip kadın ve erkek nüfus için ayrıntılı açıklamalar yapılamayacak, okuyucunun ilgisine bırakılacaktır. Kadın ve erkek nüfus için istatistik analiz bilgileri de tablo 2 dışında çalışmamızda yer almayacaktır. Toplam nüfus için olduğu gibi kadın ve erkek nüfus istatistik bilgilerinin de tüm testleri tamamladığını belirtelim.

7 [http://documentation.sas.com/?docsetId=statug&docsetTarget=statug\\_nlin\\_gettingstarted01.htm&docsetVersion=14.3&locale=en](http://documentation.sas.com/?docsetId=statug&docsetTarget=statug_nlin_gettingstarted01.htm&docsetVersion=14.3&locale=en)

Tablo 3  
Gompertz Büyüme Fonksiyonu İstatistikleri

<b>Gompertz Büyüme Fonksiyonu</b>				
		<b>Fonksiyon 1</b>	<b>Fonksiyon 2</b>	<b>Fonksiyon 3</b>
	<b>Semboller</b>	<b>Toplam Nüfus</b>	<b>Kadınlar</b>	<b>Erkekler</b>
SAS file referansı		SurvivorsDeaths.sas	TÜLKGompertzWomenSKL.sas	TÜLKGompertzMenSKL.sas
Ek referansı				
Bağımlı değişken		Hayatta kalanlar	Hayatta kalanlar	Hayatta kalanlar
Bağımsız değişken		Yaş	Yaş	Yaş
Dışsal parametreler				
Alt asimptot	K	847.0	2,015.9	231.2
K'nın standart hatası	see	158.6	189.3	126.2
Üst asimptot	L	98,219.0	98,320.4	98,178.5
L'nin standart hatası	see	41.7831	43.8934	40.9365
İçsel parametreler				
Üstel fonksiyon çarpanı	Q	0.000152675	0.000040711	0.000308219
İçsel büyüme oranı	r	-0.1037	-0.1168	-0.0980
r'nin standart hatası	see	0.000532	0.000471	0.000295
Logaritmik değerler ln(Q)	Qe	-8.7872	-10.109	-8.0847
Qe'nin standart hatası	see	0.0276	0.0378	0.0227
Hata kareleri toplamı	ESS	7,619,925	9,463,206	6,668,507
Toplam kareler toplamı	TSS	9.603E+10	8.730E+10	1.068E+10
Hata kareleri toplamı/ Toplam kareler toplamı (%)		0.007935	0.010840	0.062439
F-değeri	F	403,244	295,173	512,408

İstatistiksel çalışmada alt asimptot  $K=847$ , üst asimptot  $L=98,219$  olarak bulunmuştur. Hayat tablosunda sıfır yaşında nüfus 100,000 iken bir yaşında 98,921'e düşmektedir. İlk yıl içinde ölüm sayısı 1,079'dur. Bu rakam müteakip yaş seviyelerindeki ölümlere göre büyüktür ve hata kareleri toplamını arttırmaktadır.<sup>8</sup> Yaptığımız regresyon analizinde sıfır yaş grubunu hesaplamalara dâhil etmemeyi daha uygun bulduk. Sıfır yaş grubunu regresyona dâhil ettiğimizde hata kareleri toplamı 10,845,055 olarak bulunurken dâhil etmediğimizde 7,619,925 olarak bulunmaktadır. Burada önemli bir kazanç sağlanmaktadır. Diğer taraftan dâhil etmediğimiz zaman, fonksiyon üzerinden hesapladığımız sıfır yaş grubu tahmini değeri 98,204, dâhil edildiği zaman hesaplanan değer ile aynı olduğu görülmektedir. Sonuç olarak sıfır yaş grubunu dâhil etmemek isabetli olmaktadır. Ve kalan 100 gözlem sayısı da analiz için yeterlidir.

<sup>8</sup> Yüz bin kişi içinde 0-1 yaşında 1079 ölüm sayısı ayrıca tıbbi olarak irdelenmesi gereken bir konudur. Günümüz tip olanaklarına göre yüksek bir rakam gibi görünmektedir.

Gompertz fonksiyonu istatistik çalışmasında yakınsama kısıtası ve yineleme aşaması (convergence criteria/iterative phase) anlamlı alınan başlangıç parametre değerleriyle gerçekleşmiştir (tablo 4). Yakınsama kısıtası yakalanırken hata kareleri toplamı minimize edilmiştir. Hata kareleri toplamı/toplam kareler toplamı yüzde 0.007935'dir. F test değerleri yeterli seviyelerdedir. Parametreler ait standart hatalar kabul edilebilir sınırlar içindedir. Tablo 5'deki tahmin edilen parametrelere ait Hougaard çarpıklık (skewness) ve Box eğrilik (bias) değerleri de kabul edilebilir sınırlar olan sırasıyla 0.24 ve % 1'in altındadır. Diğer taraftan genel doğrusal-olmayan ölçülerde de uygunluk sağlanmıştır. Aşağıdaki genel doğrusal-olmayan durum ölçüleri (Global Nonlinearity Measures) tablosundaki (tablo 6) ilk dört satır değerleri kritik değer olan (5. Satır) 0.6367 değerinin altındadır. Bu sonuçlara göre doğrusallığı yakalamış istatistikler üzerinden hesaplamalar gerçekleşmiş demektir. Grafik 2'nin tetkikinden de yaşayanlar sayısı, tahminleri ve güven aralıkları sınırlarının uyumlu olduğunu görmek mümkündür.

**Tablo 4: Yakınsama Kısıtası/Yineleme Aşaması**

**The NLIN Procedure**  
**Dependent Variable TotalS**  
**Method: Gauss-Newton**

Iterative Phase					
Iter	r	Qe	L	K	Sum of Squares
0	-0.1000	-8.5000	98219.0	847.0	36425178
1	-0.1036	-8.7787	98219.8	910.9	7672123
2	-0.1037	-8.7869	98219.2	846.0	7619933
3	-0.1037	-8.7872	98219.0	847.0	7619925
4	-0.1037	-8.7872	98219.0	847.0	7619925

NOTE: Convergence criterion met.

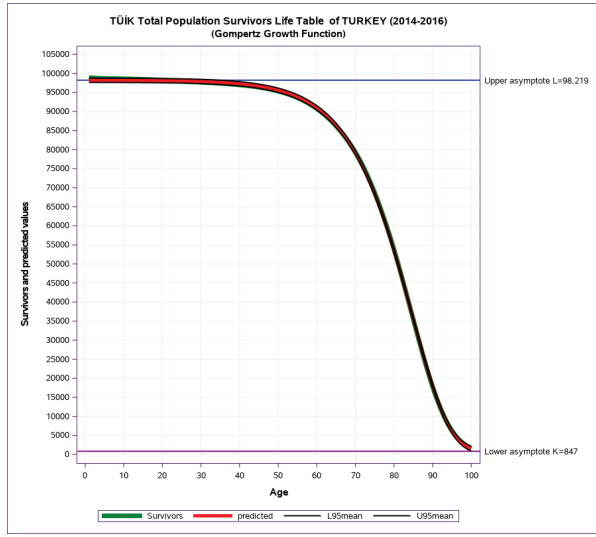
**Tablo 5: Gompertz Fonksiyonu İstatistikleri**

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Approx Pr > F
Model	3	9.602E10	3.201E10	403244	<.0001
Error	96	7619925	79374.2		
Corrected Total	99	9.603E10			

Parameter	Estimate	Approx Std Error	Approximate 95% Confidence Limits		Skewness	Bias	Percent Bias
r	-0.1037	0.000352	-0.1044	-0.1030	-0.00878	-8.38E-7	81E-5
Qe	-8.7872	0.0276	-8.8419	-8.7324	-0.0106	-0.00008	86E-5
L	98219.0	41.7831	98136.0	98301.9	0.00234	0.0418	43E-6
K	847.0	158.6	532.1	1161.9	-0.0212	-0.7294	-0.09

**Tablo 6:** Genel Doğrusal-olmayan durum Ölçüleri

Global Nonlinearity Measures	
Max Intrinsic Curvature	0.0069
RMS Intrinsic Curvature	0.0031
Max Parameter-Effects Curvature	0.0363
RMS Parameter-Effects Curvature	0.0140
Curvature Critical Value	0.6367
Raw Residual Variance	79374
Projected Residual Variance	12656

*Grafik 2. Gompertz Fonksiyonu Grafiği.*

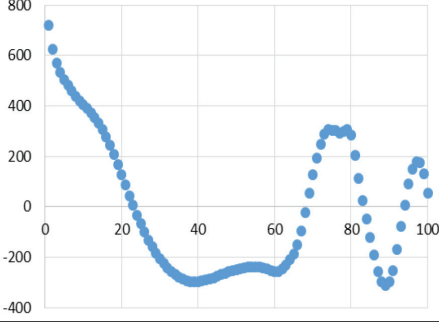
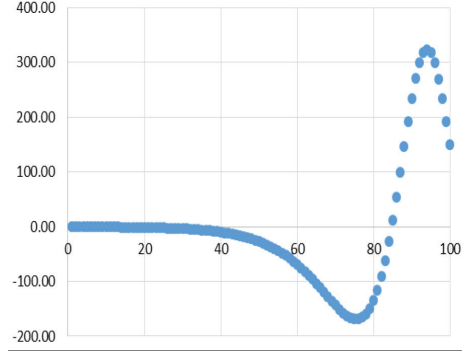
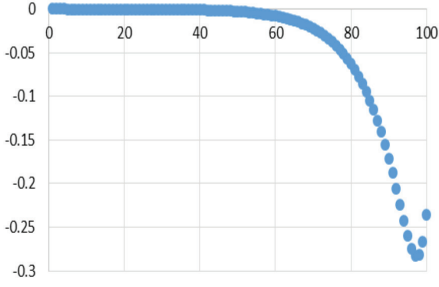
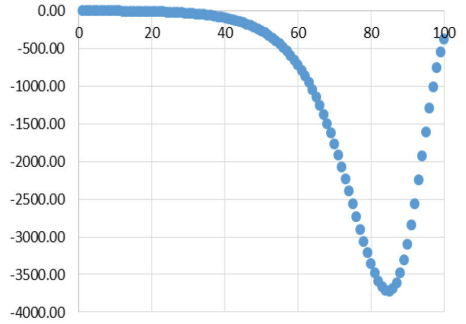
Fonksiyonun  $Q_e$  ( $Q$ 'nun doğal logaritması) değeri ve alometrik katsayısı ( $v$ ) hesaplarla uyumludur. Bu rakamlarda bir sorun yoktur. İstatistiksel testler ve fonksiyonun temsil kabiliyeti tamdır.

Fonksiyonun ikinci türevi alınıp sifıra eşitlenip  $t$  (yaş) için çözüldüğünde nüfustaki azalmanın dönüm noktası 84.71 yaş olarak bulunmaktadır. Bu yaşa kadar hızlanarak artan ölümler bu yaştan sonra hızını düşürerek devam etmektedir.

Fonksiyonun tespitinden sonra yapılan çalışmalarda (grafik 3-4) nüfusun yaşa göre yıllık mutlak ve nispi azalış miktarları hesaplanmıştır. Elli yaşına kadar yıllık olarak çok az kayıplar gösteren nüfustaki azalışlar elli yaşından itibaren hızlanarak artmakta 80.92 yaşında elli bine ulaşmaktadır.

Grafik 5'e göre yaklaşık 95 yaşından sonra ortalama ölüm hızı düşmektedir. Gompertz'in tespiti doğrudur.



**Hayatta Kalanlar- Tahminler Farkı  
(Residuals)***Grafik 3. Toplam Nüfusta Azalmalar.***Nüfusta Değişimin Değişimleri (İkinci türev)***Grafik 4. Nüfusta Değişimin Değişimleri.***Toplam Nüfusta Yıllık Ortalama  
Azalmalar (% olarak)  
(Birinci türev/tahmini değerler)***Grafik 5. Nüfusta Ortalama Azalmalar.***Toplam Nüfusta Mutlak Azalmalar  
(Birinci türev)***Grafik 6. Hayatta Kalanlar-Tahminler Farkı.*

Fonksiyon hesaplarında üst asimptotlar (L) her üç fonksiyonda da birbirine yakındır. Fakat K (alt asimptot) kadınlar için 2015.9 ve erkekler için 231.2 olarak bulunmuştur. Rakamlar birbirinden çok farklıdır. Yüz yaşına gelindiğinde kalan kadın sayısı erkek sayısının 8.7 katıdır. Erkek nüfus yüz yaş civarında tükenirken kadın nüfusun % 2'si yüz yaşından sonra yaşamaya devam etmektedir. Tablo1'de yeni doğanların hayat ümidi kadınlarda 80.7 ve erkeklerde 75.3 olması alt asimptot rakamları arasındaki bu farkı açıklamaktadır.

Son bir not grafik 6 ile ilgili olarak eklenmelidir. Hayatta kalanlar-tahminler farkı ilk yirmi yılda azalırken, doksan sonrasında yatay eksenle sürekli uzaklaşma eğilimindedir. 12-90 yaş aralığında fark (residuals)  $\pm 315$  değerleri bandında seyretmektedir. Diğer bir deyimle uygulamada en çok kullanılan bu yaş aralığı olduğundan sonuçların kullanım güvenliği daha da yüksek ve cazip olmaktadır.

### Richards Lojistik Büyüme Fonksiyonu Sonuçları:

Gompertz fonksiyonu azalan seriler taşıyan hayat tabloları analizi için özellikle geliştirilmiştir. Ancak günümüzde geliştirilen sürümleriyle artan nüfus serilerine de yaygın olarak uygulanmaktadır. Nüfus çalışmamızda biz de artan seriler için uygulamalar yapmıştık. Fonksiyonun esnek bir yapısı vardır ve istatistik analizinde sorun çıkarmamaktadır. Ancak lojistik fonksiyon için de aynı şeyleri söylemek mümkün değildir. Lojistik fonksiyon artan nüfus serilerini analiz için geliştirilmiştir ve simetrik bir yapısı vardır. Bu nedenle uygulamada elimizdeki veriye göre teknik sorunlar çıkartmaktadır. Doğal olarak simetrik yapısıyla analiz tahminlerini kendine doğru çekmektedir. Serinin yapısı simetrikten uzaklaştıkça istatistik test sonuçları sorunlu olmaya başlamaktadır. Yukarıda örneğini verdiğimiz TÜİK hayat tablolarındaki azalan serilerin analizinde, ilk olarak sıfır yaş grubu hariç olan verilerle ve

$$Y(t) = \frac{L}{(1 + Qe^{-rt})^{1/Q}}$$

şekliyle fonksiyonu uyguladık. Fonksiyon verileri doğru yorumlamakta ve hayatta kalanların küçülme oranı beklendiği gibi eksi % 10 dolayında çıkmaktadır. Diğer parametreler de uygun ve istatistik testler yeterli görünmektedir. Ancak genel doğrusal-olmayan durum ölçülerinden “Max ve RMS parameter-effects curvature” ölçülerine ait değerler kritik seviyenin üstünde çıkmaktadır. Fonksiyon veri ilişkisinin çok duyarlı bir yapıya sahip olduğunu yapılan çalışmalar sırasında gördüğümüzden de tereddütlerimiz bu fonksiyon modeli için artmış oldu. Deneyimlerimize göre parametreleri yeniden tanımlamanın da (re-parametrization) çözüm olamayacağını dikkate alarak bu yöntemi terk ettik.

Fonksiyonu alt ve üst asimptotlarla tanımlanmış aşağıdaki haliyle verilere uyguladığımızda Richards lojistik fonksiyonu istatistik testleri istenen sonuçları vermektedir. Ancak rakamların tetkikinde, azalan seriler içinde artış serisi oluşturan ölümleri ayırt edip ilgili tahminleri yaptıktan sonra üst asimptot sayısından bunları çıkararak elde edilen sonuçları güven sınırlarıyla birlikte bize sunmaktadır. Ölümler artan seri oluşturduğundan içsel büyüme oranını da artı olarak vermektedir. Ancak bu rakam hayatta kalanların küçülme oranını temsil etmemektedir. Bu nedenlerle hayat tablolarındaki azalan serilere uygulanan haliyle elde ettiğimiz sonuçları da buraya almadık.

İlk iki denemede de model ve istatistikler arasında uyum olmamaktadır. Yanlış modelleme olduğu ortaya çıkmaktadır.

Sonuçta, hayat tablolarındaki azalan nitelikteki hayatta kalanlar serilerinden yıllara göre birikimsel (kümülatif) olarak artan ölenler serilerini toplam nüfus ve kadın ve erkek nüfus için düzenleyip aşağıdaki haliyle Richards lojistik büyüme fonksiyonuna SAS NLIN yöntemiyle uyguladığımızda tamamı başarılı test sonuçları aldık. Bu şekilde artan serilere uygun bir model uygulamış olduk.

Tablo 7  
Yıllara Göre Ölüm Serileri Başlangıç Kısmı

Yıllara göre ölümler 2014-2016			
Yaş	Toplam	Erkek	Kadın
1	1079	1145	1008
2	1175	1244	1103
3	1230	1302	1154
4	1270	1346	1189
5	1302	1380	1219
6	1328	1409	1243
7	1352	1435	1264
8	1375	1461	1284
9	1397	1487	1301
10	1416	1509	1317
11	1437	1535	1335
12	1460	1561	1352
13	1484	1592	1371
14	1512	1626	1391
15	1544	1668	1413
16	1581	1718	1436

Richards büyüme fonksiyonu Verhulst'un lojistik büyüme fonksiyonuna uç-yön (alometrik: fonksiyonun gidiş yönünü belirleyen) katsayının ( $v$ ) ilavesiyle

$$Y(t) = L + \frac{(K - L)}{(1 + Qe^{-rt})^{1/v}}$$

şeklinde tanımlanır.  $L$ : alt asimptot (ölümler en alt seviyesi),  $K$ : üst asimptot (ölümler en üst seviyesi),  $r$ : içsel büyüme oranı,  $Q$ : büyüme taban sayısı,  $t$ : yaş ve  $v$ : uç-yön katsayıdır. Fonksiyon beş parametrelidir ( $K$ ,  $L$ ,  $Q$ ,  $r$ ,  $v$ ) bir fonksiyondur. Elde ettiğimiz istatistik değerlerini lojistik fonksiyonda yerine koyduğumuzda,

toplam nüfus için ölüm fonksiyonu:

$$Y(t) = 1503.4 + \frac{[\exp(11.5299) - 1503.4]}{[1 + \exp(19.4576) e^{-0.2201t}]^{(2.4604)^{-1}}}$$

kadın nüfus için ölüm fonksiyonu:

$$Y(t) = 1508.1 + \frac{(101065 - 1508.1)}{[1 + \exp(21.2257) e^{-0.2370t}]^{(2.3029)^{-1}}}$$

erkek nüfus için ölüm fonksiyonu:

$$Y(t) = 1546.1 + \frac{[\exp(11.538) - 1546.1]}{[1 + \exp(17.4520) e^{-0.2025 t}]^{\frac{1}{2.3690}}}$$

olmaktadır.

Richards lojistik fonksiyonu çalışmamızda artan ölüm serilerini analiz ettiğimizden doğal olarak 1-100 yaş arası gözlemlerle çalıştık. Yaptığımız istatistiksel testlerin tamamında yeterli sonuçlar alınmıştır. Yakınsama kıstası/yineleme aşaması yakalanmıştır. Toplam nüfus için ölenlerin içsel büyüme oranı % 22.01 olarak bulunmuştur. Kadınlar ve erkekler için de sırasıyla % 23.7 ve % 20.25 olarak bulunmuştur. Kadın nüfusun oranının erkeklerden üç puan yüksek olması ilginç görünmekle birlikte sebepleri hakkında bir araştırmamız yoktur. Grafik tetkikinden de kadın nüfus grafiğinin daha dik yükseldiğini gördük. Büyük ölüm oranının daha dik bir

Tablo 8  
Richards Lojistik Büyüme Fonksiyonu İstatistikleri

Richards Lojistik Büyüme Fonksiyonu				
		Fonksiyon 1	Fonksiyon 2	Fonksiyon 3
		Toplam Nüfus	Kadınlar	Erkekler
SAS file referansı		SurvivorsDeaths.sas	TÜKLogisticWome nDKL.sas	TÜKLogisticMen DKL.sas
Ek referansı				
Bağımlı değişken		Ölümler	Ölümler	Ölümler
Bağımsız değişken		Yaş	Yaş	Yaş
	Semboller			
Dışsal parametreler				
Üst asimptot	K	101,711.94	101,065.00	102,539.15
Logaritmik değer ln(K)	Ke	11.5299		11.538
Ke'nin standart hatası	see	0.00189		0.00271
Alt asimptot	L	1503.4	1508.1	1546.1
Logaritmik değer		30.8788		56.617
İçsel parametreler				
Üstel fonksiyon çarpanı	Q	282,051,433.34	1,652,739,415.53	37,958,347.57
Ölenler içsel büyüme oranı	r	0.2201	0.237	0.2025
r'nin standart hatası	see	0.00265	0.00307	0.00373
Alometrik katsayı	v	2.4604	2.3029	2.369
v'nin standart hatası	see	0.0398	0.0404	0.0607
Logaritmik değerler ln(Q)	Qe	19.4576	21.2257	17.452
Qe'nin standart hatası	see	0.2459	0.2873	0.3416
Hata kareleri toplamı	ESS	3,066,328	3,258,964	8,983,777
Toplam kareler toplamı	TSS	9.603E+10	8.730E+10	1.068E+11
Hata kareleri toplamı/ Toplam kareler toplamı (%)		0.003193094	0.003733063	0.008411776
F-değeri	F	743,763	636,179	282,286

eğri olduğunu bilmekteyiz. Çalışmamızda üç parametrenin her birinin bulunan değerleri ve standart hataları yeterli ve sorunsuzdur. F istatistikleri yeterlidir. Parametrelere ait Hougaard çarpıklık (skewness) ve Box eğrilik (bias) değerleri sınır değerler olan 0.24 ve % 1'in altındadır. Genel doğrusal-olmayan durum ölçüleri kritik değer olan 0.6579'un çok altındadır. Hata kareleri toplamının toplam kareler toplamı içindeki payı % 1'in çok altında olduğundan ek istatistiksel analizlere ihtiyaç duymadık. Yazının metnini büyütmemek ve tekrardan kaçınmak için aşağıda sadece toplam nüfus ölümlerine ait istatistik tablolarını ve grafiğini vermekle yetindik. Gompertz fonksiyonuna göre Richards lojistik fonksiyonu türev analizi çok zaman ve yer aldığından, hesaplamaları ve formülleri yazımımızın hacmine göre çok yer tuttuğundan Gompertz fonksiyonundaki analizle yetinmenin doğru olacağını düşündük.

**Tablo 9: Yakınsama kıstası/Yineleme Aşaması**

**The NLIN Procedure  
Dependent Variable TotalD  
Method: Gauss-Newton**

Iterative Phase						
İter	r	Qe	v	Ke	L	Sum of Squares
0	0.2500	22.0848	2.5000	11.5299	1503.4	2.6877E8
1	0.2265	20.0746	2.5852	11.5263	1537.2	5004146
2	0.2202	19.4681	2.4616	11.5297	1502.5	3077587
3	0.2201	19.4582	2.4605	11.5299	1503.4	3066328
4	0.2201	19.4576	2.4604	11.5299	1503.4	3066327

NOTE: Convergence criterion met.

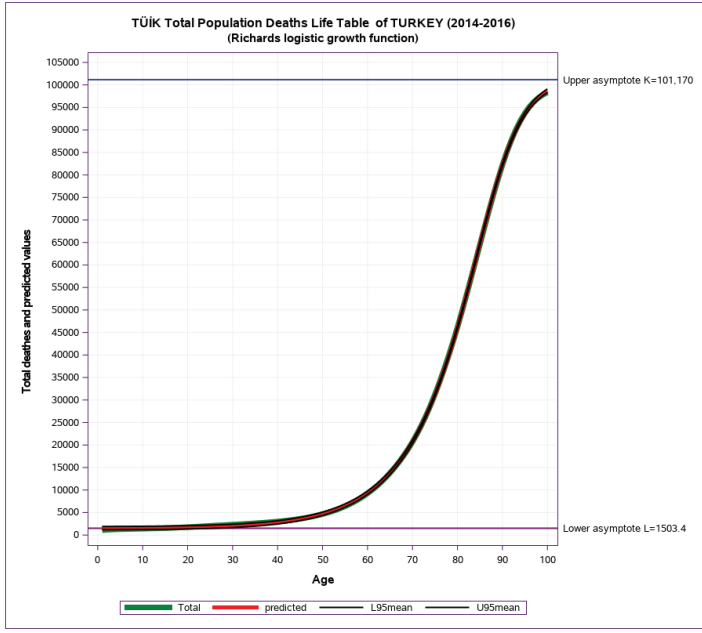
**Tablo 10: Richards Lojistik Büyüme Fonksiyonu İstatistikleri**

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Approx Pr > F
Model	4	9.603E10	2.401E10	743763	<.0001
Error	95	3066327	32277.1		
Corrected Total	99	9.603E10			

Parameter	Estimate	Approx Std Error	Approximate 95% Confidence Limits		Skewness	Bias	Percent Bias
r	0.2201	0.00265	0.2149	0.2254	0.0397	0.000020	0.009
Qe	19.4576	0.2459	18.9696	19.9457	0.0384	0.001174	0.009
v	2.4604	0.0398	2.3814	2.5394	0.0406	0.000278	0.011
Ke	11.5299	0.00189	11.5261	11.5336	0.0388	0.000012	1E-4
L	1503.4	30.8788	1442.1	1564.7	-0.00327	-0.00440	-0.00

**Tablo 11:** Genel Doğrusal-olmayan durum Ölçüleri

Global Nonlinearity Measures	
Max Intrinsic Curvature	0.0038
RMS Intrinsic Curvature	0.0052
Max Parameter-Effects Curvature	0.3394
RMS Parameter-Effects Curvature	0.1009
Curvature Critical Value	0.6579
Raw Residual Variance	32277
Projected Residual Variance	8568.5



Grafik 7. Toplam Nüfus Ölümler Grafiği.

**Metodolojik Açıklamalar:**

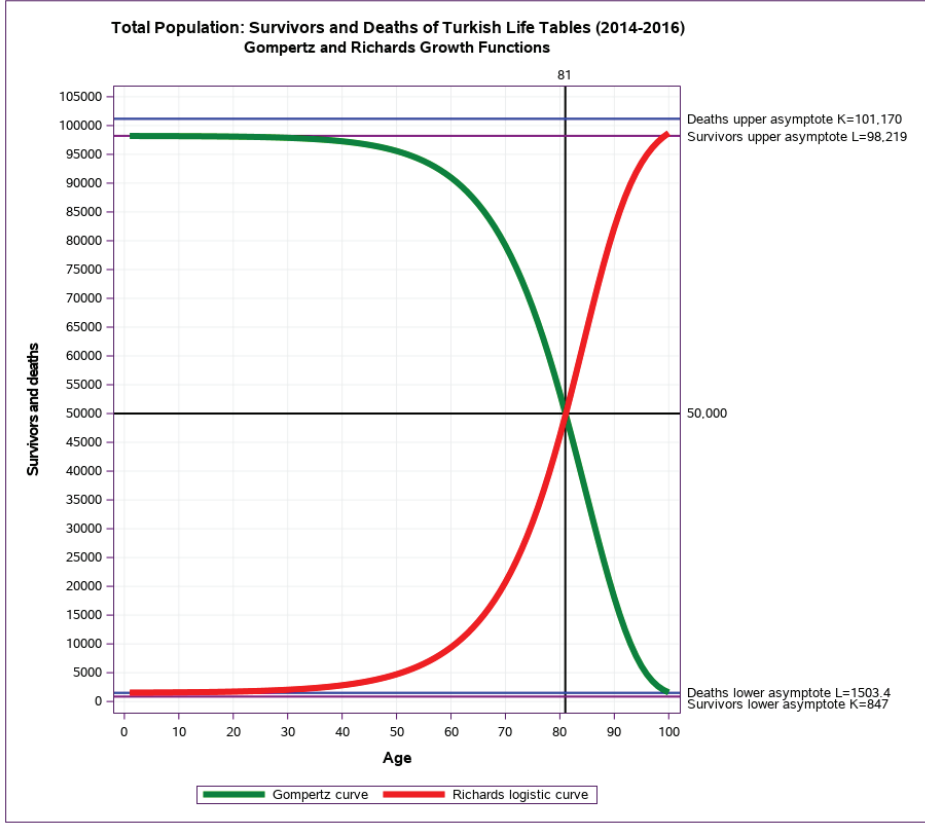
Hayat tablolarındaki yıllara göre hayatta kalanlar ve bunlara dayanarak oluşturduğumuz ölenler rakamları bir istatistikçinin önüne gelen en düzenli analiz rakamlarıdır. Hayatta kalanlar belli bir rakamdan itibaren sürekli azalmaktadır. Artış ve azalışlar yoktur. Sadece artış hızında değişimler, artışlar ve azalmalar vardır. Bu durum oluşturulan serilerin tabiatı gereği ortaya çıkmaktadır. Hayat tablosu serilerine uygulanan istatistiki metotlarla çok iyi sonuçlar alınmakta ve güven aralıkları çok dar olarak gerçekleşmektedir. Biyometri ve botanik olaylarında da bu durum görülebilir. Belirli bir bölgede yetiştirilen çam ağaçlarının yıllara göre boy uzunluğunu ve gövde çap büyüklüklerinin gelişimini incelediğimizde de düzgün istatistik sonuçlara ulaşacağımız aşikârdır. Fakat biyometri ve botanik verilerinin çoğu, ekonomi verileri, diğer nüfus verilerinin önemli bir kısmı bu yapıyı içermez. “Türkiye nüfus büyümesi ve tahminleri” çalışmamızda kullandığımız toplam Türkiye

nüfus verilerinin analizinde birçok teknik sorunla karşılaştık. Sayıma dayalı veriler sahadan derlenmekte buna karşılık hayat tabloları nüfus verilerine dayanılarak belirli düzenleme ilkelerine ve formüllere göre üretilmektedir. Ekonomi verilerine geldiğimiz zaman durum daha da karışık bir hal alır: Fiyat verileri, miktar verileri ve bunların çarpımı olan tutar (ciro) verileri istatistik analizi öncesi geniş çaplı düzenlemeleri gerektirir. Ele aldığımız verilerin niteliğine göre istatistik yöntemlerinde yardımcı unsurlara başvurmak doğaldır. Veriye önceden hareketli ortalamalar uygulamak gibi. Anlattığımız mülahazaları dikkate alarak daha önceki çalışmamızda nüfus verilerini analiz ederken verilerin niteliğinden dolayı dışsal parametreler için istatistik testleri uygulamadık. Hayat tablosu çalışmamızda ise dışsal parametreleri (K ve L) veri alıp –bunlar için test verileri hesaplamaksızın- hata karelerini minimize eden çalışmalar yaptığımız gibi dışsal parametreler dâhil tüm parametreler için de istatistik testleri hesapladık. Veriler bu yöntemle misaitti. Ve yukarıya bu son halin analiz sonuçlarını aldık. Esasen kapsamı iyice geniş olan nüfus çalışmamızda bu yöne gitseydik tatbikatta karşılaşıcağımız teknik sorunları aşmak için uzun etütler gerekecekti. Zaman bulursak başka bir çalışmada bu hususun ele alınması doğru olacaktır.

Hayat tabloları istatistik analizinde yüz veri ile çalışılması bazı özellikler arz etmektedir. Birçok araştırmada genelde veri sayısı yirmiyi geçmezken burada her yaş seviyesi için aynı ilkelere göre düzenlenmiş yüz veri ile karşı karşıyayız. Olayı yansıtan çok veri olması bir üstünlük olarak görülmektedir. Evet, bu doğrudur. Diğer taraftan veri sayısının çok olması doğru bir büyüme modelini de zorunlu kılmaktadır. Model fonksiyon yanlış ve eksik tanımlandığında istatistik testlerinden bir veya bir kaçını başarılı olmamaktadır. Yukarıda bunu anlattık. Genelde bu husus doğrusallığın sağlanması safhasında karşımıza çıkmaktadır. Kanımızca doğrusallık standart regresyon testleri kadar önemli bir husustur. Referanslarını aşağıda verdiğimiz teorik doğrusallık çalışmaları son elli yılda geliştirilmiş olup bilgisayar teknolojisinin sağladığı ileri hesaplama imkânlarıyla istatistik biliminde yeni ufuklar açmıştır. Çalışmamızda klasik regresyon testleri kadar doğrusallık testlerinin de dikkate alınmasına özen gösterdik.

Tüm parametrelere ait geçerli istatistiksel standart test sonuçlarını elde ederken doğrusallığı sağlamak için bazı fonksiyonlarda üstel değerleri kullanmak zorunda kaldık. Konu doğrusallık olduğu zaman en sıhhatli veriler dahi ek çalışmaları gerektirmektedir. Doğrusallığın sağlanması için üç grup test vardır: Skewness (çarpıklık) (Hougaard 1982, 1985) , bias (eğrilik) (Box 1971), genel doğrusal-olmayan durum ölçüleri (Bates ve Watts 1980)<sup>9</sup>. Ratkowsky'e (1983 ve 1990) göre “doğrusala yakın doğrusal-olmayan regresyon modeli parametre tahmin edicileri doğrusal regresyon modeline benzer özellikler taşıyan modeldir. Diğer bir deyişle parametrelerin en küçük kareler tahmin edicileri eğri olmayana (unbiased)

9 [https://support.sas.com/documentation/cdl/en/statug/63962/HTML/default/viewer.htm#statug\\_nlin\\_sect040.htm](https://support.sas.com/documentation/cdl/en/statug/63962/HTML/default/viewer.htm#statug_nlin_sect040.htm).



Grafik 8. Hayat Tabloları Yaşayanlar ve Ölenler.

yakın ve normal dağılmış olup, minimum varyansa sahiptirler.”<sup>10</sup> Kullandığımız yazılım içinde yer alan bu ölçüleri çalışmamızda analiz edip uyguladık. Hougaard skewness (çarpıklık) kuralı şu şekildedir: Eğer tahmin değeri 0.1’den küçükse doğrusal gibi, 0.1-0.25 arasındaysa makul ölçüde doğrusala yakın, 0.25-1 arasıya çarpıklık açık, 1’den büyükse doğrusal-olmayan ilişki kesindir. Box bias (eğrilik) ölçüsü ise % 1’dir. Yüzde birin üzerinde eğrilik çıkması halinde re-parametrization düşünülmelidir. Üçüncü testimiz doğrusal-olmayan durum eğrilik derecesi ölçümleridir (Bates ve Watts 1980). Her iki fonksiyona ait bu testleri de –sırasıyla tablo 6 ve tablo 10’da- verdik. Bu testler de iki gruptur: Maksimum içsel eğrilik ve maksimum parametre-etkili eğrilik olarak sınıflanır. Bunlardan ikincisi birinciden büyük çıkmaktadır. Re-parametrization yöntemiyle maksimum parametre-etkili eğrilik değiştirilerek istenen sonuçlara varılabilir. Bu değerlerin aynı tabloda verilen eğrilik kritik değerinin altında olması esastır.

Gompertz büyüme fonksiyonu ve Richards lojistik büyüme fonksiyonunun incelediğimiz sonuçlarından sonra aşağıdaki grafik 8’de her iki fonksiyona ait eğrinin

10 [https://support.sas.com/documentation/cdl/en/statug/63962/HTML/default/viewer.htm#statug\\_nlin\\_sect020.htm](https://support.sas.com/documentation/cdl/en/statug/63962/HTML/default/viewer.htm#statug_nlin_sect020.htm).



aynı grafikte bir arada sunumunun da faydalı olacağını düşündük. Bu sunum grafik 1'in fonksiyonlar üzerinden çizilmiş halidir. İki farklı fonksiyon üzerinde tanımlanan modellerden sonra elde ettiğimiz fonksiyon değerlerine göre tahmin değerlerini esas alan diyagramda simetrik yapıyı çıplak gözle görmek mümkündür. Her iki eğri 50,000 kişi seviyesinde ve 81 yaşında kesişmektedir. Bu rakamlar yukarıda bulduğumuzla aynıdır. Eğrilerin yüz yaş üstü verilerine sahip olabilseydik muhtemelen eğrilere ait alt ve üst asimptotların birbirine daha da yakınlaşacağını görecektik. Kesişme noktalarını hesaplamadan, bu haliyle dahi fonksiyonlar hayat tablolarını temsilde yeterli olmaktadır. Amacımız da bu noktaya ulaşmaktı. Metodolojik açıklamalarımızda grafik 8'in de önemli bir katkı sağlayacağı düşüncesindeyiz.

Doğrusal olmayan regresyon çalışmamızda doğrusallığa ait daha çok diyagramlara dayanan; leverage, local etki ve residuals incelemelerine konunun çok ayrıntılı olmasından dolayı bu yazımızda girmiyoruz.

## Sonuç

Hayat tabloları analizimizde Benjamin Gompertz'in,

“Hayatın sonsuz eşit ve küçük zaman aralıklarına bölünmesi halinde, bir insanın her aralığın başında sahip olduğu ölümden kaçınma –yok olmaya direnme- gücünden her bir aralık sonunda eşit kısımlar kaybettiği kabul edilirse, o zaman  $x$  yaşında ölümden kaçınma gücü veya ölüme yaklaşma hızı  $aq^x$  ( $a$  ve  $q$  sabit) ile gösterilebilir” (bk. 2 nolu dipnot sayfa 518, Art. 5).

tezini günümüz Türkiye hayat tabloları üzerinden ileri istatistik metotları ve hesap teknikleriyle uygulamış oluyoruz. Çalışmamızda hayat tablolarındaki yıllara göre hayatta kalanların sayılarını matematiksel olarak temsil eden üç fonksiyon ortaya koyduk ve temsiliyetlerini istatistiksel verilerle destekledik. Aynı çalışmayı tablolardaki ölüm hızları, ölüm olasılıkları ve yaşanması beklenen süre serileri için de yapabildik. Ama Gompertz'in 1825 yılında yazdığı makalede (bk. dipnot 2) matematiksel analizini yaptığı büyüme fonksiyonundan sonra fonksiyonu istatistiksel olarak desteklemek için kullandığı Northampton, Deparcieux, Sweden ve Carlisle hayat tablolarını analiz yöntemini izleyerek sadece hayatta kalanlar serisi üzerinde çalışmamızı tamamlarken üstadı da saygıyla anıyoruz. Gompertz'in analiz ettiği hayat tabloları elli yıl veya altında gözlem sayısına sahiptir. Kullandığı hayat tablolarında on veya on beş yaş altı ve elli veya altmış yaş üstü gözlemlerin olmayışının, analizlerinde dönemin anlayışına uygun olarak logaritmik enterpolasyon tekniklerini düz yazı yazar gibi başarılı bir şekilde kullanabilen matematikçi Gompertz'in analizini güçleştirdiği yazı dikkatli okununca anlaşılmalıdır. Bugünkü hayat tablolarında gözlem sayısı yüze ulaşmıştır. Yüz on yaşına kadar olmalarını arzu ederdim, zira grafiklerde alt asimptota paralel olacak kısım kısa kalmaktadır ve tabii ki hayat yüz yaşında(!) bitmemektedir. Bu gün yukarıda kullandığımız ileri istatistik ve hesap tekniklerine sahip olduğumuz için şanslı olduğumuzu düşünürken, iki yüz yıl öncesine oranla

günümüz Türkiye eğitim anlayışında ve özellikle iktisat eğitiminde logaritma ve diferansiyel denklemler konusunda ileri ve iyi bir matematik öğretiminin olmayışını da önemli bir eksiklik olarak görüyorum. En azından ben tahsil hayatımda böyle gördüm. Gompertz'in makalesini okuduktan sonra keyfiyetin önemi bir kere daha ortaya çıkmaktadır. Bu yazı vesilesiyle iki yüz yıllık tarihin başlangıcına da kısa bir göz atmış oluyoruz.

Gompertz fonksiyonu ile hayat tablosu analizlerinden sonra Richards lojistik fonksiyonuyla çalışmalarımız sonunda 1-100 yaş aralığında artan bir seri izleyen ölümleri analiz etmeyi tercih ettik. Toplam nüfus kadın ve erkek nüfus için oluşturduğumuz üç fonksiyonda da olumlu sonuçlar aldık. Amacımız lojistik fonksiyonun hayat tabloları analizindeki imkânlarını ortaya koymaktı. Bu nedenle sadece Gompertz fonksiyonuyla yetinmek istemedik. Lojistik fonksiyonla da bir perspektif edindiğimiz kanısındayım. Hayatta kalanların analizi yanında ölümlerin analizinin de kullanıcı çalışmalarında önemli olacağı düşüncesindeyiz. Her iki fonksiyon analizinde de önceliğimiz doğrusal olmayan fonksiyonlar ve bu fonksiyonların hesaplanmasında istatistiksel yöntemlerin gücünü ve faydasını ortaya koymak, teorik bilgileri verilerle buluşturmak. Amacımıza ulaştığımızı düşünürken henüz Türkiye'de istatistik çalışmalarında yeterince yerini almamış bu konunun yeni yapılacak çalışmalarla desteklenmesi gerektiğine inanıyoruz.

Cemil İskender, Kasım 2018  
iskenderc@ttmail.com

### **Ek: Metinde bahsi geçen yazarlara ait belli başlı eserler:**

[https://support.sas.com/documentation/cdl/en/statug/63962/HTML/default/viewer.htm#statug\\_nlin\\_sect040.htm](https://support.sas.com/documentation/cdl/en/statug/63962/HTML/default/viewer.htm#statug_nlin_sect040.htm).

Referans eserler yukarıdaki linkten alıntıdır.

Bates, D. M. ve Watts, D. L. (1980), "Relative Curvature Measures of Nonlinearity (with Discussion)", *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 1–25.

Bates, D. M, ve Watts, D. L. (1981), "A Relative Offset Orthogonality Convergence Criterion for Nonlinear Least Squares," *Technometrics*, 123, 179–183.

Box, M. J. (1971), "Bias in Nonlinear Estimation (with Discussion)," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 171–201.

Hougaard, P. (1982), "Parameterizations of Nonlinear Models," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 244–252.

Hougaard, P. (1985), "The Appropriateness of the Asymptotic Distribution in a Nonlinear Regression Model in Relation to Curvature," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 103–114.

Ratkowsky, D. (1983), *Nonlinear Regression Modeling*, New York and Basel: Marcel Dekker.

Ratkowsky, D. (1990), *Handbook of Nonlinear Regression Models*, New York and Basel: Marcel Dekker.