Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University 36:2 (2021) 743-757

Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi
Journal of The Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University
Elektronik / Online ISSN : 1304 - 4915
Basılı / Printed ISSN : 1300 - 1884

Free vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by Navier's method

Muhittin Turan[1]*, Volkan Kahya[2]
[1]Department of Civil Engineering, Bayburt University, Bayburt, 69000, Turkey
[2]Department of Civil Engineering, Karadeniz Technical University, Trabzon, 61080, Turkey

Highlights:
- Free vibration and buckling analysis of FGM sandwich beams
- Trigonometric series functions
- Navier's method

Keywords:
- Functionally graded material
- Sandwich beam
- Navier method
- Free vibration
- Buckling

Article Info:
Research Article
Received: 01.08.2019
Accepted: 14.10.2020

DOI:
10.17341/gazimmfd.599928

Correspondence:
Author: Muhittin Turan
e-mail: mturan@bayburt.edu.tr
phone: +90 458 211 1177

Graphical/Tabular Abstract

In this study, free vibration and buckling analyses of functionally graded (FGM) sandwich beams is investigated by Navier's method. Two cases of functionally graded sandwich beams are considered: a) Homogeneous ceramic core and FGM faces (Type A), and b) FGM core and homogeneous faces (Type B).

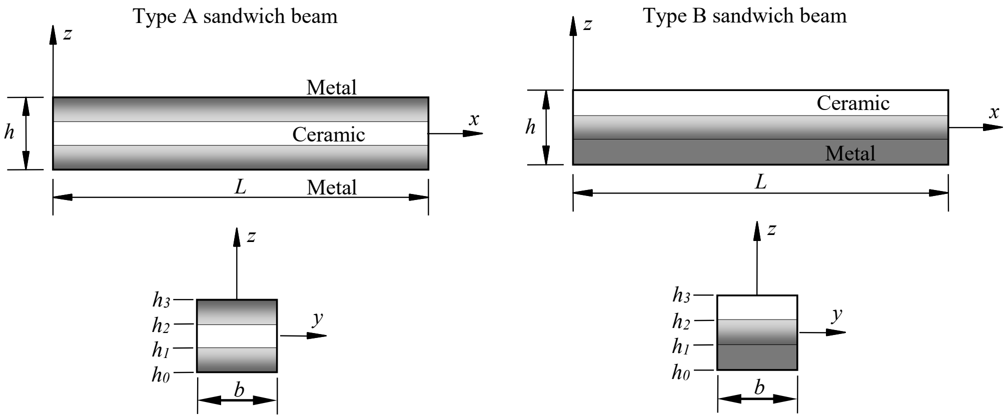


Figure A. Geometric properties of FGM beams considered

Purpose: The aim of this study is to perform free vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams with different boundary conditions, power-law indices and slenderness using trigonometric series functions.

Theory and Methods:
Displacement field is defined according to the first order shear deformation theory, and the equations of motion are derived by the Lagrange's principle. Volumetric ceramic ratio is defined by a power-law rule. In the analytical solution, different trigonometric series functions are used for each end conditions considered.

Results:
Natural frequencies and buckling loads are obtained for different boundary conditions, power-law indices and slenderness. Numerical results are compared with the available literature, and a good agreement are obtained between the results.

Conclusion:
To make a generalization, it is seen that natural frequencies and buckling loads decrease when the metallic feature is dominant in FDM sandwich beams, and increase when the ceramic feature is dominant.

Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University 36:2 (2021) 743-757

Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi
Journal of The Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University
Elektronik / Online ISSN : 1304 - 4915
Basılı / Printed ISSN : 1300 - 1884

Fonksiyonel derecelendirilmiş sandviç kirişlerin Navier yöntemiyle serbest titreşim ve burkulma analizi

Muhittin Turan[1]*, Volkan Kahya[2]
[1]Bayburt Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 69000, Bayburt, Türkiye
[2]Karadeniz Teknik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 61080, Trabzon, Türkiye

Ö N E Ç I K A N L A R

- FDM sandviç kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizi
- Trigonometrik seri fonksiyonları
- Navier çözüm yöntemi

Makale Bilgileri
Araştırma Makalesi
Geliş: 01.08.2019
Kabul: 14.10.2020

DOI:
10.17341/gazimmfd.599928

Anahtar Kelimeler:
Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme,
sandviç kiriş,
Navier yöntemi,
serbest titreşim,
burkulma

ÖZET

Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş (FDM) sandviç kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizleri Navier yöntemiyle incelenmiştir. Yer değiştirme alanı, birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine göre ifade edilmiş; Lagrange prensibi kullanılarak hareket denklemleri elde edilmiştir. Hacimsel seramik oranı, bir kuvvet fonksiyonu şeklinde tanımlanmıştır. Analitik çözümde, göz önüne alınan her sınır şartı için farklı trigonometrik seri fonksiyonları kullanılmıştır. Çalışmada, a) Homojen seramik çekirdek ve FDM yüzeylerden oluşturulan sandviç kiriş (Tip A) ve b) FDM çekirdek ve homojen yüzeylerden oluşturulan sandviç kiriş (Tip B) olmak üzere iki durum ele alınmıştır. Çeşitli sınır şartları, kuvvet fonksiyonu indis değerleri ve narinlik oranları için doğal frekanslar ve burkulma yükleri elde edilmiştir. Sayısal sonuçlar literatürdeki mevcut çalışmaların sonuçları ile karşılaştırılmış ve son derece uyumlu oldukları görülmüştür.

Free vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by Navier's method

H I G H L I G H T S

- Free vibration and buckling analysis of FGM sandwich beams
- Trigonometric series functions
- Navier's method

Article Info
Research Article
Received: 01.08.2019
Accepted: 14.10.2020

DOI:
10.17341/gazimmfd.599928

Keywords:
Functionally graded material,
sandwich beam,
Navier method,
free vibration,
buckling

ABSTRACT

In this study, free vibration and buckling analyses of functionally graded (FGM) sandwich beams is investigated by Navier's method. Displacement field is defined according to the first order shear deformation theory, and the equations of motion are derived by the Lagrange's principle. Volumetric ceramic ratio is defined by a power-law rule. In the analytical solution, different trigonometric series functions are used for each end conditions considered. Two cases of functionally graded sandwich beams are considered: a) Homogeneous ceramic core and FGM faces (Type A), and b) FGM core and homogeneous faces (Type B). Natural frequencies and buckling loads are obtained for different boundary conditions, power-law indices and slenderness. Numerical results are compared with the available literature, and a good agreement are obtained between the results.

*Sorumlu Yazar/Yazarlar / *Corresponding Author/Authors: *mturan@bayburt.edu.tr, volkan@ktu.edu.tr / Tel: +90 458 211 1177

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Mekanik özelliklerin bir noktadan diğerine belli bir kurala göre değiştiği fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM), uzay, havacılık, endüstri, tıp, savunma ve enerji gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu malzemeler, geleneksel yapı malzemelerine göre üstün özellikleri sebebiyle kiriş ve plak türü yapısal taşıyıcı elemanlarda kullanılabilirler. Özellikle fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış kirişlerde kesitlerin küçülmesi, bu elemanlarda hem titreşim hem de burkulma yönünden tehlike anlamına gelmektedir. Bu sebeple, FDM ile imal edilmiş kiriş yapı elemanlarının titreşim ve burkulma davranışlarının yeterince anlaşılması önemlidir.

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış kirişlerin mekanik davranışlarını inceleyen çalışmalarda çeşitli analitik ve sayısal yöntemler kullanılmıştır. Sayısal yöntemler arasında sonlu elemanlar yöntemi, araştırmacılar tarafından tercih edilmesi sebebiyle ön plana çıkmaktadır. Yıldırım [1], fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış kenar çatlaklı bir tabakanın ısıl şok kırılmasını sonlu elemanlar yöntemi ile incelemiştir. Alshorbagy vd. [2], bir kuvvet fonksiyonuna göre enine veya boyuna doğrultuda fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin serbest titreşimini Euler teorisine dayalı bir sonlu eleman modeli ile ele almışlardır. Vo vd. [3], FDM sandviç kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizleri için yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine dayalı bir sonlu eleman modeli önermişlerdir. Çalışmada yer değiştirme alanı Reddy-Bickford kiriş teorisine dayandırılmıştır. Kahya ve Turan [4, 5], FDM kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizlerini sonlu elemanlar yöntemiyle ele almışlardır. Yazarlar hem tek tabakalı kiriş hem de sandviç kiriş için boyutsuz doğal frekansları ve burkulma yüklerini elde etmişlerdir. Aria ve Friswell [6] birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine dayalı sonlu elemanlar yöntemiyle FDM nano-kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizlerini gerçekleştirmişlerdir. Mollamahmutoğlu ve Mercan [7], fonksiyonel derecelendirilmiş Timoshenko mikro-kirişlerin eğilme, serbest titreşim ve burkulma analizleri için değiştirilmiş gerilme teorisine dayalı yeni bir karışık sonlu eleman önermişlerdir.

FDM kirişlerin mekanik davranışlarının analitik yöntemlerle incelendiği çalışmalarda, çözümde Navier yöntemi genellikle kullanılmaktadır. Burada, çözüm için sınır şartlarını sağlayan bir trigonometrik fonksiyon seçilmesi gerekmektedir. Bu fonksiyonun seçimindeki zorluk sebebiyle Navier yöntemini kullanan çalışmalar genellikle basit kiriş ile sınırlı kalmıştır. Sankar [8], statik yükleme altındaki FDM kirişin eğilme problemini elastisite yöntemi ile ele almış; çözümde trigonometrik fonksiyonlardan yararlanmıştır. Yazar, kirişin elastisite modülünün yükseklik boyunca üstel değiştiğini, Poisson oranının ise sabit kaldığını kabul etmiştir. Çalışmada ayrıca FDM kirişler için Euler-Bernoulli teorisine dayalı basit bir teori geliştirilmiştir. Aydoğdu ve Taşkın [9], FDM basit kirişin serbest titreşimlerini yüksek mertebeden kayma deformasyonlu farklı kiriş teorileri ile ele almışlardır. Çalışmalarında, elastisite modülünün yükseklik boyunca bir kuvvet fonksiyonuna göre değiştiği kabul edilmiştir. Hareket denklemleri Hamilton prensibi ile elde edilmiş; çözüm, Navier yöntemiyle yapılmıştır. Sina vd. [10], FDM kirişlerin serbest titreşim analizi için geleneksel kayma deformasyonlu kiriş teorisinden faklı yeni bir teori önermişlerdir. Kirişte yanal normal gerilmelerin sıfır olduğu varsayılarak Hamilton prensipleri yardımıyla hareket denklemleri türetilmiştir. Bu denklemler, Navier yöntemiyle üstel fonksiyonlar kullanılarak çözülmüştür. Çelebi vd. [11], homojen olmayan çubuğun zorlanmış titreşim analizi için kapalı formda çözümler elde etmişlerdir. Çözümler Laplace uzayında elde edilmiş; gerçek zaman uzayına geçmek için ise ters dönüşüm Rezidü teoremi kullanılmıştır. Pradhan ve Chakraverty [12], farklı sınır şartlarına sahip FDM kirişlerin serbest titreşimini klasik ve birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorilerine göre Rayleigh-Ritz yöntemiyle incelemişlerdir. Öktem [13], fonksiyonel olarak derecelendirilmiş kompozit plakların statik analizini klasik Navier tipi çözüm ile incelemiştir. Kısmi türevli yüksek dereceden lineer diferansiyel denklemlerden oluşan sistem, ankastre ve basit mesnetli sınır şartları için süreksiz Fourier serileri kullanılarak çözülmüştür. Nguyen ve Nguyen [14], FDM sandviç kirişlerin statik, burkulma ve serbest titreşim analizleri için yüksek mertebeden kayma deformasyonlu bir kiriş teorisi geliştirmişlerdir. Yazarlar, boyuna yer değiştirme için üçüncü mertebeden ve ters trigonometrik terimler içeren bir fonksiyon seçmişlerdir. Chen ve Chang [15], FDM Euler-Bernoulli kirişlerinin serbest titreşimlerini dönüştürülmüş kesit yöntemi ile incelemişlerdir. Kirişte malzeme özellikleri yükseklik boyunca bir kuvvet fonksiyonuna göre değişmektedir. Yazarlar, kirişin doğal frekansları için kapalı formda çözümleri üstel fonksiyonlar ile elde etmişlerdir. Lee ve Lee [16], FDM Euler-Bernoulli kirişlerinin serbest titreşimlerini transfer matrisi yöntemiyle incelemişlerdir. Denge denklemlerini Hamilton prensibi ile elde etmişler ve çözümde üstel fonksiyonlar kullanmışlardır. Bu yöntemin, malzeme özelliklerinin yükseklik boyunca kuvvet fonksiyonuna göre değiştiği problemlerde doğal frekanslar ve mod şekillerinin hesabında gayet kullanışlı olduğunu ifade etmişlerdir. Turan [17], FDM sandviç kirişlerin statik, serbest titreşim ve burkulma analizleri için iki farklı sonlu eleman modeli önermiş; elde ettiği sonuçları Navier tipi analitik çözümle karşılaştırmıştır. Avcar ve Mohammed [18], iki parametreli elastik zemin üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin serbest titreşimini ele almışlardır. FDM kiriş, klasik kiriş teorisi ile modellenmiş; fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özellikleri ile Winkler-Pasternak zemin etkilerini içeren yönetici diferansiyel denklem çarpım tipi çözüm ile çözülmüştür. Avcar [19], içerisinde boşluklar bulunan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden yapılmış kirişlerin serbest titreşimini klasik kiriş teorisine ve birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine göre incelemiştir. Sayyad ve Ghugal [20], farklı sınır şartlarına sahip FDM kirişlerin eğilme, burkulma ve serbest titreşim analizlerini değiştirilmiş üstel kayma deformasyonlu kiriş teorisine dayalı analitik çözümle yapmışlardır. Problemde, Navier tipi çözüm yöntemi tercih edilmiş ve trigonometrik fonksiyonlardan yararlanılmıştır. Bu çalışmanın devamı niteliğinde Sayyad ve Avhad [21] hiperbolik kayma deformasyonlu kiriş teorisine dayalı simetrik fonksiyonel derecelendirilmiş sandviç kirişlerin eğilme, burkulma ve serbest titreşim analizlerini kapalı formda Navier tipi çözüm yöntemi ile incelemişlerdir. Lee ve Lee [22], fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin doğal frekanslarını transfer matrisi yöntemiyle elde etmişlerdir. Problemin çözümünde üstel fonksiyonlardan yararlanmışlardır. Turan ve Kahya [23, 24], trigonometrik seri fonksiyonlarını kullanarak FDM kiriş ve tabakalı kompozit kirişin serbest titreşimlerini Navier yöntemiyle ele almışlardır. Yukarıda kısaca özetlenen çalışmalara ek olarak, günümüzde mühendislik ve biyomedikal alanlarında yaygın olarak kullanılan mikro ve nano ölçekli çubuk, kiriş ve plakların titreşimi ve stabilitesini ele alan çalışmalar da mevcuttur. Civalek ve Demir [25], konsol karbon nanotüplerin statik ve burkulma analizleri için yerel olmayan elastisite teorisine dayalı Euler-Bernoulli kiriş modeli geliştirmişlerdir. Akgöz ve Civalek [26], elastik zemine oturan gömülü karbon nanotüplerin eğilmesini şekil değiştirme gradyanı teorisi ile ele almışlardır. Gürses vd. [27], nano boyutlu dairesel sektör plakalarının titreşim probleminin matematiksel modellemesi için yerel olmayan sürekli ortam teorisini kullanmışlardır. Yazarlar, sayısal hesaplamalarda sekiz noktalı ayrık tekil konvolüsyon dönüşümünü kullanmışlardır. Akgöz ve Civalek [28], farklı sınır koşullarına sahip fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden yapılmış mikro-kirişlerin burkulma davranışlarını Bernoulli-Euler kiriş teorisini şekil değiştirme gradyanı teorisiyle birlikte kullanarak incelemişlerdir. Demir ve Civalek [29], ısıl ortamda bulunan ve elastik bir matrise gömülü nano ölçekli kirişin titreşimini sonlu elemanlar yöntemiyle ele almışlardır. Yukarıda verilen literatür taramasından da görüleceği üzere FDM kirişlerin mekanik davranışlarını sayısal ve analitik yöntemlerle ele alan çok sayıda çalışma vardır. Analitik çözümde, Navier yöntemi genellikle tercih edilmekle birlikte, mevcut çalışmaları birbirinden ayıran en önemli husus çözümde kullanılan fonksiyonlardır. Bu çalışmada, FDM sandviç kirişlerin doğal frekansları ve burkulma yükleri trigonometrik seri fonksiyonları kullanılarak Navier yöntemiyle elde edilmiştir. Çalışma, [23] nolu çalışmanın devamı niteliğinde olup, burada trigonometrik seri çözümü FDM sandviç kirişlere genişletilmiştir. Farklı sınır şartları için [23]'de daha önce verilen trigonometrik seri fonksiyonları bu kez FDM sandviç kirişlerde kullanılmıştır. Çözümde kayma deformasyonları ve dönel atalet etkileri dikkate alınmış; hareket denklemleri Lagrange prensibiyle elde edilmiştir. Çalışmada, a) Homojen seramik çekirdek ve FDM yüzeylerden oluşturulan sandviç kiriş (Tip A) ve b) FDM çekirdek ve homojen yüzeylerden oluşturulan sandviç kiriş (Tip B) olmak üzere iki durum ele alınmıştır. Farklı sınır şartları için doğal frekanslar ve burkulma yüklerinin ortamdaki seramik oranı ve kaplama tabakası yüksekliğinin çekirdek tabakasınınkine oranı ile değişimi incelenmiştir.

2. PROBLEMİN TANIMI VE ANALİTİK ÇÖZÜM
(DEFINITION OF THE PROBLEM AND ANALYTICAL SOLUTION)

2.1. Malzeme Özellikleri (Material Properties)

Şekil 1a'da görülen dikdörtgen kesitli üniform FDM kirişte malzeme özelliklerinin yükseklik boyunca Eş. 1'deki gibi değiştiği kabul edilmektedir.

$$P(z) = (P_s - P_m)V_c(z) + P_m \tag{1}$$

Burada P_s ve P_m sırasıyla seramik ve metal bileşenlerine ait malzeme özelliklerini (Elastisite modülü E, Poisson oranı ν, yoğunluk ρ), V_c ise bileşimdeki hacimsel seramik oranını göstermektedir. FDM kirişte seramik oranının bir kuvvet fonksiyonu şeklinde değiştiği kabul edilmiştir. Çalışmada, iki farklı tipte FDM sandviç kiriş kullanılmıştır.

(i) Homojen seramik çekirdek ve FDM yüzeylerden oluşturulan sandviç kiriş (Tip A): Bu tip kirişte, yüzeyler metalden seramiğe doğru FDM tabakadan, çekirdek ise seramik tabakadan oluşturulmuştur. Kirişteki seramiğin hacimsel oranının $V_c^{(j)}$ değişimi her tabaka için Eş. 2'de verilmiştir.

$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = \left(\dfrac{z-h_0}{h_1-h_0}\right)^k & h_0 \le z \le h_1 \quad (alt\ yüzey) \\ V_c^{(2)}(z) = 1 & h_1 \le z \le h_2 \quad (çekirdek) \\ V_c^{(3)}(z) = \left(\dfrac{z-h_3}{h_2-h_3}\right)^k & h_2 \le z \le h_3 \quad (üst\ yüzey) \end{cases} \tag{2}$$

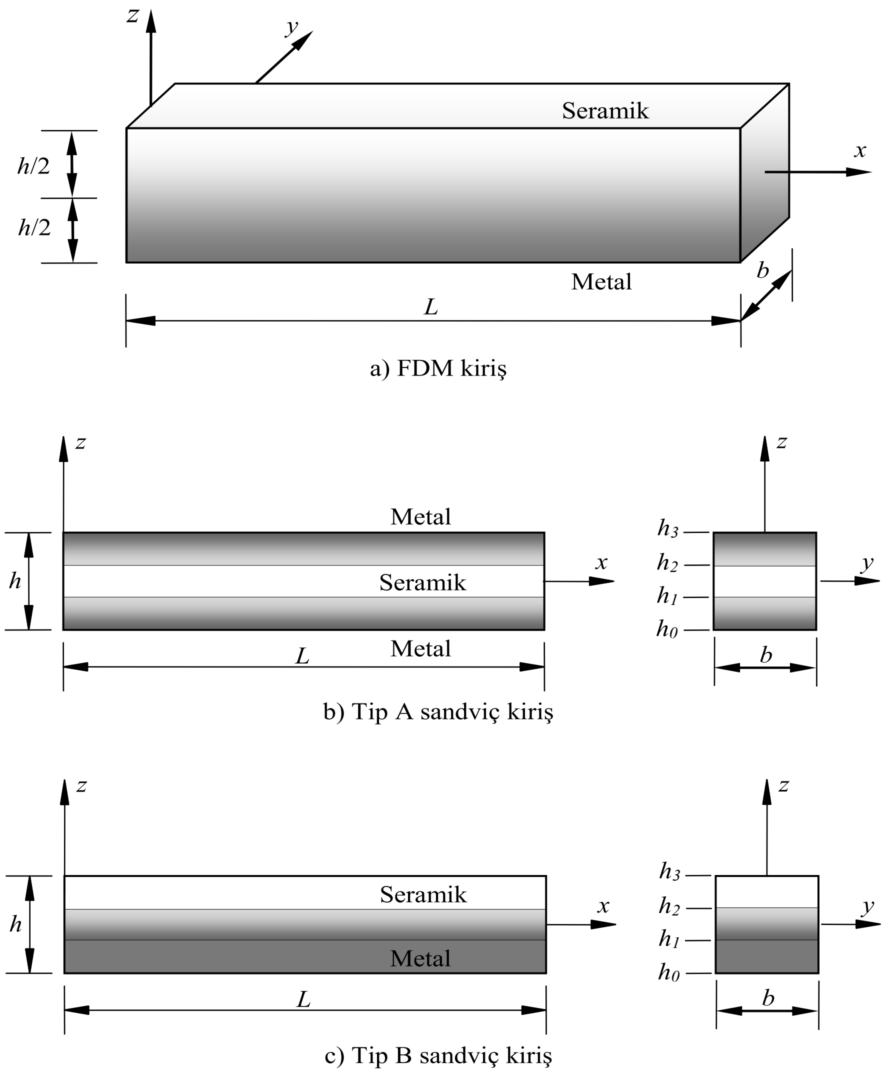
(ii) FDM çekirdek ve homojen yüzeylerden oluşturulan sandviç kiriş (Tip B): Bu tip kirişte, alt ve üst yüzeyler sırasıyla metal ve seramik tabakalardan, çekirdek ise FDM tabakadan oluşturulmuştur. Seramiğin hacimsel oranı $V_c^{(j)}$ her bir tabaka için Eş. 3'de verilmiştir.

$$\begin{cases} V_c^{(1)}(z) = 0 & h_0 \le z \le h_1 \quad (alt\ yüzey) \\ V_c^{(2)}(z) = \left(\dfrac{z-h_1}{h_2-h_1}\right)^k & h_1 \le z \le h_2 \quad (çekirdek) \\ V_c^{(3)}(z) = 1 & h_2 \le z \le h_3 \quad (üst\ yüzey) \end{cases} \tag{3}$$

Eş. 2 ve Eş.3 ifadelerinde görülen $k \ge 0$ bir reel sayı olup kuvvet fonksiyonu indisidir. k büyüdükçe, malzeme bileşimindeki metal oranı artmaktadır.

2.2. Hareket Denklemleri ve Analitik Çözüm
(Governing Equations and Analytical Solution)

Birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine göre kirişin tarafsız ekseni üzerinde olmayan herhangi bir noktasındaki yer değiştirmeleri Eş. 4'de verilmektedir.



Şekil 1. Göz önüne alınan FDM kirişlerin geometrik özellikleri (Geometric properties of FGM beams considered)

$$u(x,z,t) = u^0(x,t) - z\phi^0(x,t), \quad w(x,z,t) = w^0(x,t) \tag{4}$$

Burada t zamanı ifade etmektedir. u^0, w^0 ve ϕ^0 ise sırasıyla kirişin tarafsız ekseni üzerinde ölçülen yatay ve düşey yer değiştirmeler ile kesit dönmesini göstermektedir. Buradan şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları Eş. 5'deki gibi elde edilir.

$$\varepsilon_{xx} = u^0_{,x} - z\phi^0_{,x}, \qquad \gamma_{xz} = w^0_{,x} - \phi^0 \tag{5}$$

Burada, ε_{xx} ve γ_{xz} sırasıyla normal ve kayma şekil değiştirmelerini, $(\cdot)_{,x}$ x değişkenine göre türevi göstermektedir. FDM izotropik kiriş için bünye denklemleri Eş. 6'daki gibi yazılır.

$$\sigma_{xx} = E(z)\varepsilon_{xx}, \quad \tau_{xz} = KG(z)\gamma_{xz} \tag{6}$$

Burada, σ_{xx} ve τ_{xz} sırasıyla normal ve kayma gerilmelerini, $E(z)$, $\nu(z)$ ve $G(z) = E(z)/2[1+\nu(z)]$ sırasıyla elastisite modülü, Poisson oranı ve kayma modülünü göstermektedir. K kesmede düzeltme katsayısı olup dikdörtgen kesitler için 5/6'dır.

Hareket denklemleri Eş. 7 ile verilen Lagrange eşitliği yardımıyla elde edilmiştir.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \tag{7}$$

Burada q_i ve $\dot{q}_i$ bağımsız değişkenler olup Lagrangian Eş. 8'deki gibi tanımlıdır.

$$\Pi = T - (U + V) \tag{8}$$

Eş. 8'deki T kinetik enerjiyi, U şekil değiştirme enerjisini ve V dış yükün yaptığı işi göstermektedir.

Kirişin şekil değiştirme enerjisi Eş. 9'da verilmiştir. Burada *A* kirişin kesit alanıdır.

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \int_A (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{xz}\gamma_{xz})dAdx \tag{9}$$

Kirişin kinetik enerjisi ise Eş. 10'daki gibi tanımlıdır.

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \int_A \rho(z)(\dot{u}^2 + \dot{w}^2)dAdx \tag{10}$$

Burada ρ malzeme yoğunluğudur. Üst nokta ile zamana göre türev ifade edilmektedir. Kirişe ekseni doğrultusunda uçlarından etkiyen P_0 basınç kuvveti ile açıklık boyunca etkiyen q düşey yayılı yükünün yaptığı iş Eş. 11'de tanımlıdır.

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L P_0 (w^0_{,x})^2 dx + \int_0^L q\, w^0\, dx \tag{11}$$

Eş. 9 ve Eş. 10 kullanılarak şekil değiştirme enerjisi ve kinetik enerji ifadeleri Eş. 12 ve Eş. 13 gibi elde edilir:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{ \begin{array}{l} A_0\left(u^0_{,x}\right)^2 - 2A_1 u^0_{,x}\phi^0_{,x} + A_2\left(\phi^0_{,x}\right)^2 \\ \quad + B_0\left(\left(\phi^0\right)^2 - 2\phi^0 w^0_{,x} + \left(w^0_{,x}\right)^2\right) \end{array} \right\} dx \tag{12}$$

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{ I_0\left(\dot{u}^0\right)^2 - 2I_1\dot{u}^0\dot{\phi}^0 + I_2\left(\dot{\phi}^0\right)^2 + I_0\left(\dot{w}^0\right)^2 \right\} dx \tag{13}$$

Buradaki bazı ifadeler Eş. 14 ve Eş. 15'deki gibi tanımlıdır.

$$[A_0, A_1, A_2] = \int_A E(z)[1, z, z^2]dA, \quad B_0 = \int_A KG(z)dA \tag{14}$$

$$[I_0, I_1, I_2] = \int_A \rho(z)[1, z, z^2]dA \tag{15}$$

Tablo 1. Analitik çözümde kullanılan trigonometrik seri fonksiyonlar
(Trigonometric series functions used in the analytical solution)

Sınır şartları	$\varphi_i(x)$	$\psi_i(x)$	$\theta_i(x)$
B-B	$\cos\frac{i\pi x}{L}$	$\sin\frac{i\pi x}{L}$	$\cos\frac{i\pi x}{L}$
A-S	$\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2L}$	$1-\cos\frac{(2i-1)\pi x}{2L}$	$\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2L}$
A-A	$\sin\frac{2i\pi x}{L}$	$\sin^2\frac{i\pi x}{L}$	$\sin\frac{2i\pi x}{L}$

Sayısal çözüm için yer değiştirmeler Eş. 16'daki gibi kabul edilmiştir.

$$u^0(x,t) = \sum_{i=1}^{m}\varphi_i(x)u_i(t), \quad w^0(x,t) = \sum_{i=1}^{m}\psi_i(x)w_i(t), \\ \phi^0(x,t) = \sum_{i=1}^{m}\theta_i(x)\phi_i(t) \tag{16}$$

Burada, $u_i(t)$, $w_i(t)$ ve $\phi_i(t)$ genelleştirilmiş koordinatları, $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$ ve $\theta_i(x)$ kirişin sınır şartlarına bağlı olarak değişen trigonometrik seri fonksiyonları, *m* ise trigonometrik seri sayısını göstermektedir. Tablo 1'de, çalışmada göz önüne alınan kirişler için mesnet şartlarını sağlayacak şekilde seçilen trigonometrik seri fonksiyonlar verilmiştir. Burada, B-B basit kirişi, A-S konsol kirişi, A-A ise iki ucu ankastre kirişi ifade etmektedir.

İş ve enerji ifadeleri, Tablo 1'de verilen çözüm fonksiyonları da hesaba katılarak Lagrange denkleminde yazılırsa *L* boyundaki kiriş için hareket denklemi Eş. 17 gibi elde edilir.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K_e} - P_0\mathbf{K_g})\mathbf{X} = \mathbf{F} \tag{17}$$

Burada **M**, **Ke**, **Kg** ve **F** sırasıyla sistem kütle, rijitlik ve geometrik rijitlik matrisleri ile yük vektörü olup Eş. 18'de verilmiştir.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M_{11}} & \mathbf{M_{12}} & \mathbf{M_{13}} \\ \mathbf{M_{12}^T} & \mathbf{M_{22}} & \mathbf{M_{23}} \\ \mathbf{M_{13}^T} & \mathbf{M_{23}^T} & \mathbf{M_{33}} \end{bmatrix}, \mathbf{K_e} = \begin{bmatrix} \mathbf{K_{11}} & \mathbf{K_{12}} & \mathbf{K_{13}} \\ \mathbf{K_{12}^T} & \mathbf{K_{22}} & \mathbf{K_{23}} \\ \mathbf{K_{13}^T} & \mathbf{K_{23}^T} & \mathbf{K_{33}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K_g} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G_{22}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \ \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F_2} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{18}$$

Turan ve Kahya [23] tarafından yapılan çalışmada Eş. 18'deki matris ve vektör terimlerin açılımı verilmiştir. **X** yer değiştirme vektörü ise Eş. 19'da tanımlıdır.

$$\mathbf{X} = \{u_1 \ \cdots \ u_m \ \ w_1 \ \cdots \ w_m \ \ \phi_1 \ \cdots \ \phi_m\}^T \tag{19}$$

Serbest titreşim analizi için Eş. 17'de F = **0** ve $P_0 = 0$ olarak alınır ve çözüm $\mathbf{X} = \mathbf{u}e^{i\omega t}$ şeklinde düşünülürse Eş. 20 elde edilir.

$$(\mathbf{K_e} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{20}$$

Burada ω kirişin doğal frekansıdır. Burkulma analizi için ise Eş. 17'de M = **0** ve **F** = **0** olarak alınıp çözüm $\mathbf{X} = \mathbf{u}e^{P_0 x}$ şeklinde düşünülürse $P_0 = (P_0)_{kr}$ kritik burkulma yükü olmak üzere Eş. 21 elde edilir.

$$(\mathbf{K_e} - P_0\mathbf{K_g})\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{21}$$

Eş. 20 ve Eş. 21 denklem sistemleri standart öz değer problemi olup, bu denklem sistemlerinin katsayılar matrislerini sıfır yapan ω ve P_0 değerleri, sırasıyla kirişin doğal frekansları ve kritik burkulma yükleridir.

3. SONUÇLAR VE TARTIŞMALAR
(RESULTS AND DISCUSSIONS)

Bu bölümde, çeşitli sınır şartlarına sahip FDM sandviç kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizlerinden elde edilen sayısal sonuçlar sunulmuştur. Sayısal sonuçlar, MATLAB [30] programında yazılan bir kod ile elde edilmiştir. FDM sandviç kirişte kullanılan metal (Alüminyum, Al) ve seramiğin (Alüminyum oksit, Al_2O_3) malzeme özellikleri sırasıyla, metal için E_m = 70GPa, ρ_m = 2702kg/m^3, ν_m = 0,3; seramik için E_s = 380GPa, ρ_s = 3960kg/m^3, ν_s = 0,3 şeklindedir. Çözümden elde edilen doğal frekanslar Eş. 22'deki gibi boyutsuz olarak sunulmuştur.

$$\bar{\varpi} = \frac{\omega L^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \tag{22}$$

Kritik burkulma yükleri ise Eş. 23'deki gibi boyutsuz olarak sunulmuştur.

$$\bar{\lambda} = \frac{12L^2}{E_m h^3}\left(P_0\right)_{kr} \tag{23}$$

3.1. Serbest Titreşim Analizi (Free Vibration Analysis)

Bu bölümde, çeşitli sınır şartlarına sahip FDM sandviç kirişlerin doğal frekanslarının kuvvet fonksiyonu indisi (*k*), narinlik oranı (*L*/*h*) ve çekirdek tabakası/kiriş yüksekliği oranı ($h_ç/h$) parametrelerine göre değişimi ile ilgili bulgular sunulmuş ve tartışılmıştır.

Tablo 2'de, yeterli doğrulukta sonuç için çözümde kullanılması gereken terim sayısını belirlemek üzere yapılan yakınsama analizinin sonuçları verilmiştir. Burada, sandviç kirişteki tabakaların yüksekliklerinin eşit olduğu kabul edilmiştir. Tablo incelendiğinde, *m* = 12 terim için analitik sonuçların yeterli doğrulukta olduğu görülmüştür. Bu sebeple çalışmanın serbest titreşimle ilgili sonuçlarının elde edilmesinde bu değer kullanılmıştır. Tablo 3 ve Tablo 4'te çeşitli sınır şartlarına göre Tip A FDM sandviç kirişlerin boyutsuz doğal frekansları *L* / *h* = 5 ve 20 için sunulmuştur. Tablolar incelendiğinde, Vo vd. [3]'nun yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine dayalı sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçlarla iyi bir uyum içerisinde olunduğu görülmektedir. Ayrıca hem tablolara hem de Şekil 2'ye göre, seramik çekirdek tabakasının yüksekliği arttıkça boyutsuz doğal frekansların arttığı görülmektedir. Buna göre, Tip A sandviç kirişte seramik tabakasının yüksekliği, dolayısıyla seramik oranı, arttıkça boyutsuz doğal frekanslar artmaktadır.

Şekil 3 ve 4'te iki ucu ankastre Tip A FDM sandviç kirişin boyutsuz doğal frekanslarının narinlik oranı (*L*/*h*) ve çekirdek tabakası/kiriş yüksekliği oranı ($h_ç/h$) ile değişimi verilmiştir. Şekil 3'teki sonuçlar elde edilirken tabaka kalınlıkları eşit tutulmuştur. Şekil 4 için ise alt ve üst yüzeylerdeki FDM tabakaların yükseklikleri eşit tutulmuş, çekirdek tabakasının kalınlığı değiştirilmiştir. Şekillerden görüleceği üzere *k* indisi arttıkça boyutsuz doğal frekanslar azalmaktadır. Bu değerin artması kirişin metal özelliğe yaklaşması anlamına gelmektedir. Buna göre metale yaklaşıldıkça boyutsuz doğal frekanslar azalmaktadır. Şekil 3'e dikkat edilirse, narinliğin artması, *L*/*h* = 20'ye kadar boyutsuz doğal frekansların hızla artmasına sebep olurken bu değerden sonra önemli bir değişim görülmemektedir. Şekil 4'te ise $h_ç/h$ oranı arttıkça boyutsuz doğal frekansların da arttığı görülmektedir. FDM Tip A sandviç kirişte boyutsuz doğal frekanslar, kirişin tamamen çekirdekteki seramikten oluşması durumunda elde edilenlere göre daima daha küçük olmaktadır. *k*=0 için kiriş tamamen seramik olduğundan boyutsuz doğal frekanslar çekirdek tabakasının yüksekliğinin değişmesinden etkilenmemektedir.

Tablo 5 ve Tablo 6'da çeşitli sınır şartlarına sahip Tip B FDM sandviç kirişlerin boyutsuz doğal frekansları *L* / *h* = 5 ve 20 narinlik oranları için verilmiştir. *k* değeri arttıkça boyutsuz doğal frekanslar azalmaktadır. Ancak burada değerler, Tip A'daki kadar hızlı bir düşüş göstermemekte birbirlerine yakın seyretmektedir. Tablolardan, çekirdek tabakasının yüksekliğinin artmasının boyutsuz doğal frekansların artmasına sebep olduğu görülmektedir. İstisna olarak, iki ucu ankastre yüksek kirişte (*L*/*h* = 5), büyük *k* değerleri için (Tablo 5'te *k* = 5 ve 10 için) söylenilen trendin aksine çekirdek yüksekliğinin artmasıyla boyutsuz doğal

Tablo 2. Analitik çözümde gerekli terim sayısı için yakınsama analizi sonuçları (*L* / *h* = 5, *k* = 1)
(Convergency analysis for suffcient number of terms in the analytical solution, *L* / *h* = 5, *k* = 1)

FDM kiriş	*m*	Sınır şartları		
		B-B	A-A	A-S
Tip A	2	3,8635	7,9938	1,4150
	4	3,8635	7,9087	1,4114
	8	3,8635	7,8674	1,4102
	12	3,8635	7,8536	1,4098
	16	3,8635	7,8465	1,4097
Tip B	2	3,5835	7,4162	1,3148
	4	3,5835	7,3381	1,3115
	8	3,5835	7,3002	1,3103
	12	3,5835	7,2875	1,3100
	16	3,5835	7,2810	1,3099

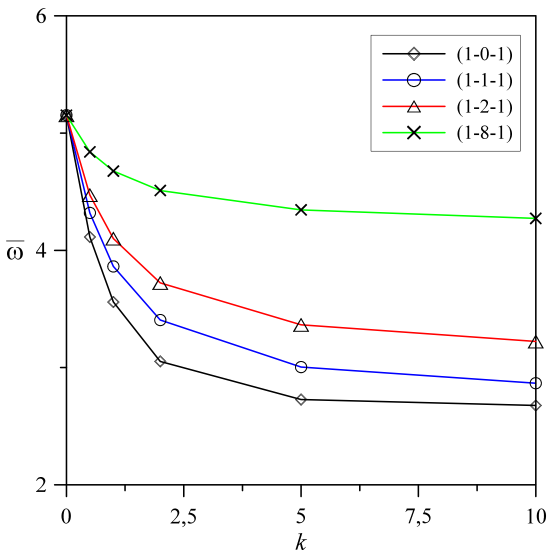
Tablo 3. Çeşitli sınır şartlarına sahip Tip A FDM sandviç kirişlerin boyutsuz doğal frekansları (L / h = 5)
(Normalized fundamental frequencies of Type A FGM sandwich beams with various boundary conditions, L / h = 5)

Kiriş	*k*	Teori	1-0-1	1-1-1	1-2-1	1-8-1	2-1-2	2-1-1	2-2-1
B-B	0	Bu çalışma	5,1525	5,1525	5,1525	5,1525	5,1525	5,1525	5,1525
		Vo vd. [3]	5,1528	5,1528	5,1528	5,1528	5,1528	5,1528	5,1528
	0,5	Bu çalışma	4,1143	4,3192	4,4712	4,8397	4,2229	4,2848	4,3962
		Vo vd. [3]	4,1268	4,3303	4,4798	4,8422	4,2351	4,2945	4,4051
	1	Bu çalışma	3,5592	3,8627	4,1003	4,6763	3,7158	3,8084	3,9800
		Vo vd. [3]	3,0680	3,4190	3,7334	4,5142	3,2365	3,3514	3,5692
	5	Bu çalışma	2,7274	3,0039	3,3653	4,3456	2,8281	2,9655	3,1840
		Vo vd. [3]	2,7446	3,0181	3,3771	4,3501	2,8439	2,9746	3,1928
A-A	0	Bu çalışma	10,0470	10,0470	10,0470	10,0470	10,0470	10,0470	10,0470
		Vo vd. [3]	10,0678	10,0678	10,0678	10,0678	10,0678	10,0678	10,0678
	0,5	Bu çalışma	8,2539	8,6508	8,9217	9,5444	8,4718	8,5795	8,7848
		Vo vd. [3]	8,3600	8,7423	8,9942	9,5731	8,5720	8,6673	8,8648
	1	Bu çalışma	7,2475	7,8519	8,2862	9,2773	7,5706	7,7383	8,0626
		Vo vd. [3]	7,3661	7,9580	8,3705	9,3076	7,6865	7,8390	8,1554
	5	Bu çalışma	5,5807	6,2640	6,9678	8,7251	5,8897	6,1569	6,6097
		Vo vd. [3]	5,7264	6,3889	7,0691	8,7605	6,0293	6,2737	6,7188
A-S	0	Bu çalışma	1,8957	1,8957	1,8957	1,8957	1,8957	1,8957	1,8957
		Vo vd. [3]	1,8952	1,8952	1,8952	1,8952	1,8952	1,8952	1,8952
	0,5	Bu çalışma	1,5050	1,5805	1,6373	1,7764	1,5448	1,5681	1,6095
		Vo vd. [3]	1,5069	1,5821	1,6384	1,7764	1,5466	1,5696	1,6108
	1	Bu çalışma	1,2985	1,4095	1,4978	1,7144	1,3554	1,3900	1,4533
		Vo vd. [3]	1,3007	1,4115	1,4992	1,7145	1,3575	1,3918	1,4549
	5	Bu çalışma	0,9944	1,0912	1,2239	1,5894	1,0277	1,0785	1,1577
		Vo vd. [3]	0,9973	1,0935	1,2257	1,5897	1,0303	1,0806	1,1597

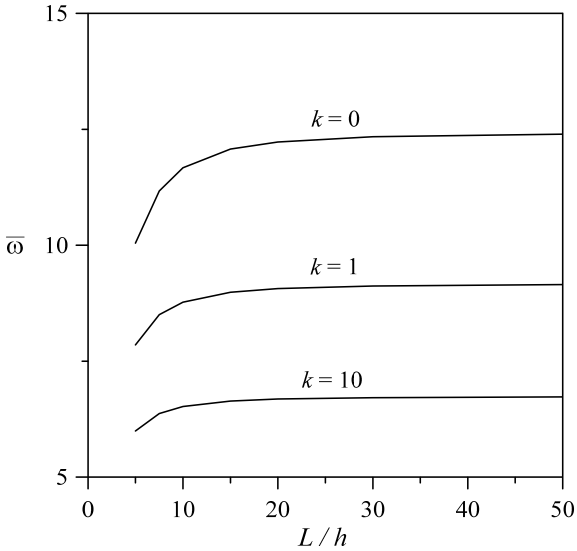
Tablo 4. Çeşitli sınır şartlarına sahip Tip A FDM sandviç kirişlerin boyutsuz doğal frekansları (L / h = 20)
(Normalized fundamental frequencies of Type A FGM sandwich beams with various boundary conditions, L / h = 20)

Kiriş	k	Teori	1-0-1	1-1-1	1-2-1	1-8-1	2-1-2	2-1-1	2-2-1
B-B	0	Bu çalışma	5,4603	5,4603	5,4603	5,4603	5,4603	5,4603	5,4603
		Vo vd. [3]	5,4603	5,4603	5,4603	5,4603	5,4603	5,4603	5,4603
	0,5	Bu çalışma	4,3138	4,5322	4,6972	5,1065	4,4281	4,4963	4,6164
		Vo vd. [3]	4,3148	4,5324	4,6979	5,1067	4,4290	4,4970	4,6170
	1	Bu çalışma	3,7137	4,0327	4,2882	4,9231	3,8758	3,9766	4,1594
		Vo vd. [3]	3,7147	4,0328	4,2889	4,9233	3,8768	3,9774	4,1602
	5	Bu çalışma	2,8427	3,1112	3,4913	4,5551	2,9300	3,0766	3,3021
		Vo vd. [3]	2,8439	3,1111	3,4921	4,5554	2,9310	3,0773	3,3028
A-A	0	Bu çalışma	12,2259	12,2259	12,2259	12,2259	12,2259	12,2259	12,2259
		Vo vd. [3]	12,2228	12,2228	12,2228	12,2228	12,2228	12,2228	12,2228
	0,5	Bu çalışma	9,6863	10,1747	10,5415	11,4468	9,9425	10,0937	10,3614
		Vo vd. [3]	9,6942	10,1800	10,5460	11,4459	9,9501	10,1001	10,3668
	1	Bu çalışma	8,3497	9,0658	9,6349	11,0421	8,7147	8,9392	9,3477
		Vo vd. [3]	8,3594	9,0722	9,6411	11,0421	8,7241	8,9474	9,3550
	5	Bu çalışma	6,3941	7,0096	7,8612	10,2284	6,6003	6,9289	7,4368
		Vo vd. [3]	6,4064	7,0170	7,8692	10,2298	6,6116	6,9389	7,4461
A-S	0	Bu çalışma	1,9497	1,9497	1,9497	1,9497	1,9497	1,9497	1,9497
		Vo vd. [3]	1,9496	1,9496	1,9496	1,9496	1,9496	1,9496	1,9496
	0,5	Bu çalışma	1,5397	1,6176	1,6767	1,8231	1,5805	1,6048	1,6477
		Vo vd. [3]	1,5397	1,6175	1,6766	1,8229	1,5805	1,6048	1,6477
	1	Bu çalışma	1,3252	1,4391	1,5304	1,7574	1,3830	1,4191	1,4844
		Vo vd. [3]	1,3253	1,4388	1,5304	1,7573	1,3831	1,4191	1,4844
	5	Bu çalışma	1,0144	1,1099	1,2456	1,6257	1,0452	1,0976	1,1781
		Vo vd. [3]	1,0145	1,1096	1,2456	1,6257	1,0453	1,0977	1,1781

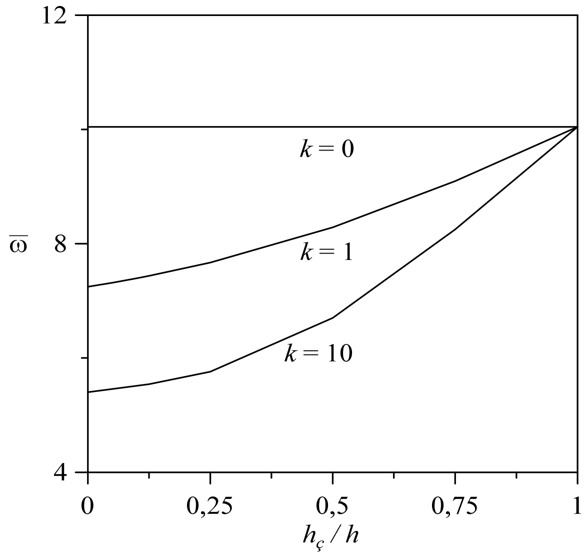
frekansların azaldığı görülmektedir. Şekil 5'te (1-1-1) Tip B FDM sandviç basit kirişin boyutsuz doğal frekanslarının L/h'ye göre değişimi verilmiştir. Tip A durumunda olduğu gibi narinliğin artması, L/h = 20'ye kadar boyutsuz doğal frekansların hızla artmasına sebep olmaktadır. Bu değerden sonra ise boyutsuz doğal frekanslarda önemli bir değişim olmamaktadır. Şekil 6'da iki ucu ankastre Tip B FDM sandviç kirişin boyutsuz doğal frekanslarının $h_ç/h$'ye göre değişimi verilmiştir. Alt ve üst yüzeylerdeki FDM tabakaların yükseklikleri eşit tutulmuş, çekirdek tabakasının kalınlığı değiştirilmiştir. Daha önce, Tablo 5 ve 6'nın sonuçlarına göre, basit ve konsol kiriş durumlarında Tip B FDM sandviç kirişte çekirdek yüksekliğinin artması durumunda boyutsuz doğal frekanslardaki değişimin Tip A'daki gibi olduğu ifade edilmişti. İki ucu ankastre Tip B yüksek kirişte (L/h = 5) ise davranış farklı olduğundan Şekil 6'da bu hale ait sonuçlar irdelenmiştir. Şekilden görüleceği üzere, $h_ç/h$ arttıkça küçük k değerleri için (k = 0 ve 1) boyutsuz doğal frekanslar artmaktadır. Ancak k büyüdükçe (FDM çekirdek metale yaklaştıkça), bu sonucun aksine çekirdek yüksekliğinin artması Tip B yüksek kirişlerde boyutsuz doğal frekansları azaltmaktadır.



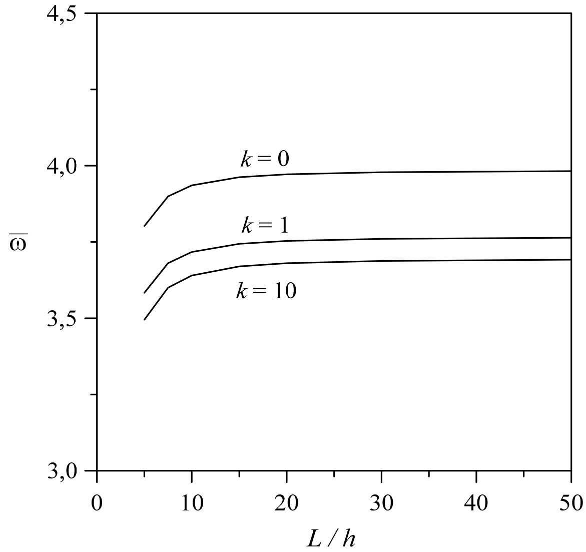
Şekil 2. Basit mesnetli Tip A FDM sandviç kirişlerin boyutsuz doğal frekansları (L / h = 5)
(Normalized fundamental frequencies of Type A FGM sandwich beams with simple supported, L / h = 5)



Şekil 3. İki ucu ankastre Tip A FDM sandviç kirişlerin boyutsuz doğal frekanslarının L/h'ye göre değişimi
(Variation of the normalized fundamental frequencies of Type A clamped-clamped FGM sandwich beams with L/h)



Şekil 4. İki ucu ankastre Tip A FDM sandviç kirişlerin boyutsuz doğal frekanslarının $h_ç/h$'ye göre değişimi (L/h = 5) (Variation of the normalized fundamental frequencies of Type A clamped-clamped FGM sandwich beams with $h_ç/h$ (L/h = 5))



Şekil 5. Basit mesnetli (1-1-1) Tip B FDM sandviç kirişlerin boyutsuz doğal frekanslarının L/h'ye göre değişimi
(Variation of the normalized fundamental frequencies of simple supported (1-1-1) Type B FGM sandwich beams with L/h)

3.2. *Burkulma Analizi* *(Buckling Analysis)*

Çeşitli sınır şartlarına sahip FDM sandviç kirişlerin kritik burkulma yüklerinin kuvvet fonksiyonu indisi (k), narinlik oranı (L/h) ve çekirdek tabakası/kiriş yüksekliği oranı ($h_ç/h$) parametrelerine göre değişimi ile ilgili bulgular sunulmuş ve tartışılmıştır.

Tablo 7'de sonuçların yeterli doğrulukta sonuçların elde edilebilmesi için gerekli terim sayısına yönelik yakınsama analizi verilmiştir. Sandviç kirişte tabaka yüksekliklerinin

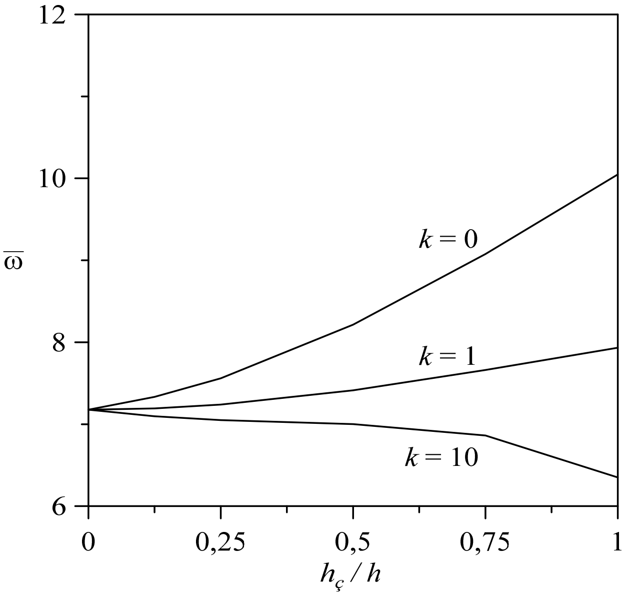
Tablo 5. Çeşitli sınır şartlarına sahip Tip B FDM sandviç kirişlerin boyutsuz doğal frekansları (L / h = 5)
(Normalized fundamental frequencies of Type B FGM sandwich beams with various boundary conditions, L / h = 5)

Kiriş	*k*	1-1-1	1-2-1	1-8-1
B-B	0	3,8022	4,0564	4,6675
	0,5	3,6540	3,7903	4,1314
	1	3,5835	3,6608	3,8495
	5	3,4964	3,5164	3,5248
	10	3,4949	3,5209	3,5111
A-A	0	7,7524	8,2154	9,2640
	0,5	7,4408	7,6823	8,2607
	1	7,2875	7,4138	7,7154
	5	7,0585	7,0369	6,9238
	10	7,0331	7,0015	6,8019
A-S	0	1,3881	1,4822	1,7114
	0,5	1,3351	1,3857	1,5136
	1	1,3102	1,3392	1,4104
	5	1,2810	1,2907	1,2982
	10	1,2815	1,2942	1,2965

Tablo 6. Çeşitli sınır şartlarına sahip Tip B FDM sandviç kirişlerin boyutsuz doğal frekansları (L / h = 20)
(Normalized fundamental frequencies of Type B FGM sandwich beams with various boundary conditions, L / h = 20)

Kiriş	*k*	1-1-1	1-2-1	1-8-1
B-B	0	3,9717	4,2436	4,9139
	0,5	3,8228	3,9695	4,3429
	1	3,7534	3,8385	4,0477
	5	3,6767	3,7100	3,7421
	10	3,6802	3,7243	3,7457
A-A	0	8,9305	9,5363	11,0219
	0,5	8,5943	8,9206	9,7479
	1	8,4371	8,6254	9,0869
	5	8,2557	8,3267	8,3833
	10	8,2461	8,3534	8,3796
A-S	0	1,4174	1,5145	1,7541
	0,5	1,3643	1,4167	1,5503
	1	1,3396	1,3700	1,4448
	5	1,3124	1,3245	1,3363
	10	1,3138	1,3297	1,3379

eşit olduğu kabul edilmiştir. Tablo incelendiğinde, önerilen çözüm ile m = 2 terimle dahi yeterli doğrulukta sonuç elde edilebildiği görülmektedir. Bu sebeple, kritik burkulma yüklerinin hesabında m = 2 terim için sonuçlar elde edilmiştir. Tablo 8 ve Tablo 9'da çeşitli sınır şartlarına sahip Tip A FDM sandviç kirişlerin boyutsuz kritik burkulma yükleri verilmiştir. Görüleceği üzere, çalışmanın sonuçları ile Vo vd. [3] tarafından verilen yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine dayalı sonlu eleman çözümünden elde edilenler son derece uyumludur. k değeri arttıkça boyutsuz kritik burkulma yükleri azalmaktadır. Tablolardan ve Şekil 7'den görüldüğü üzere, çekirdek tabakasının yüksekliğinin artması Tip A FDM sandviç kirişte boyutsuz kritik burkulma yüklerini arttırmaktadır.



Şekil 6. İki ucu ankastre Tip B FDM sandviç kirişlerin boyutsuz doğal frekanslarının $h_ç/h$'ye göre değişimi (L/h = 5) (Variation of the normalized fundamental frequencies of Type B clamped-clamped FGM sandwich beams with $h_ç/h$ (L/h = 5))

Tablo 7. Kritik burkulma yükleri için yakınsama analizi sonuçları (L / h = 5, k = 1)
(Convegency analysis results fort he critical buckling loads)

FDM kiriş	m	Sınır şartları		
		B-B	A-A	A-S
Tip A	2	24,3992	81,8396	6,4082
	4	24,3992	81,8396	6,4082
	8	24,3992	81,8396	6,4082
	12	24,3992	81,8396	6,4082
	16	24,3992	81,8396	6,4082
Tip B	2	19,8887	66,6816	5,2243
	4	19,8887	66,6816	5,2243
	8	19,8887	66,6816	5,2243
	12	19,8887	66,6816	5,2243
	16	19,8887	66,6816	5,2243

Şekil 8'de iki ucu ankastre Tip A FDM sandviç kirişin boyutsuz kritik burkulma yüklerinin L/h'ye göre değişimi verilmiştir. Burada, tabaka yükseklikleri eşit alınmıştır. Narinlik oranı arttıkça kritik burkulma yükü artmaktadır. En büyük burkulma yükleri k = 0'da yani kirişin tamamen seramik olması durumunda elde edilmektedir. L/h > 20 değerinden sonra narinliğin artması kritik burkulma yüklerinde önemli bir değişim meydana getirmemektedir. k değerinin sonuçlara etkisi bu grafikte daha net görülmektedir. Şekil 9'da iki ucu ankastre Tip A FDM sandviç kirişte çekirdek tabakası/kiriş yüksekliği oranı ($h_ç/h$) ile boyutsuz kritik burkulma yüklerinin değişimi çeşitli k

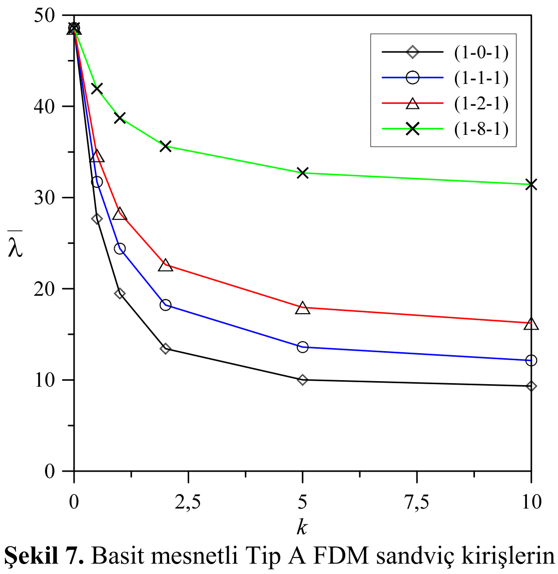
Tablo 8. Çeşitli sınır şartlarına sahip Tip A FDM sandviç kirişlerin boyutsuz kritik burkulma yükleri (L/h = 5)
(Normalized critical buckling loads of Type A FGM sandwich beams with various boundary conditions, L / h = 5)

Kiriş	k	Teori	1-0-1	1-1-1	1-2-1	1-8-1
B-B	0	Bu çalışma	48,5904	48,5904	48,5904	48,5904
		Vo vd. [3]	48,5959	48,5959	48,5959	48,5959
	0,5	Bu çalışma	27,6766	31,7142	34,6209	41,9406
		Vo vd. [3]	27,8574	31,8784	34,7653	41,9897
	1	Bu çalışma	19,4855	24,3991	28,2909	38,7235
		Vo vd. [3]	19,6525	24,5596	28,4447	38,7838
	5	Bu çalışma	10,0121	13,5978	17,9558	32,6960
		Vo vd. [3]	10,1460	13,7212	18,0914	32,7725
A-A	0	Bu çalışma	151,9319	151,9319	151,9319	151,9319
		Vo vd. [3]	152,1470	152,1470	152,1470	152,1470
	0,5	Bu çalışma	90,8563	103,7613	112,5616	133,6846
		Vo vd. [3]	92,8833	105,6790	114,1710	134,2870
	1	Bu çalışma	65,5545	81,8396	93,9698	124,6806
		Vo vd. [3]	67,4983	83,8177	95,7287	125,3860
	5	Bu çalışma	33,9472	47,5942	62,1124	107,4214
		Vo vd. [3]	35,5493	49,2763	63,7824	108,2970
A-S	0	Bu çalışma	13,0594	13,0594	13,0594	13,0594
		Vo vd. [3]	13,0594	13,0594	13,0594	13,0594
	0,5	Bu çalışma	7,3189	8,3957	9,1840	11,1988
		Vo vd. [3]	7,3314	8,4051	9,1940	11,2021
	1	Bu çalışma	5,1131	6,4082	7,4533	10,3051
		Vo vd. [3]	5,1245	6,4166	7,4639	10,3093
	5	Bu çalışma	2,6208	3,5253	4,6715	8,6440
		Vo vd. [3]	2,6298	3,5310	4,6806	8,6493

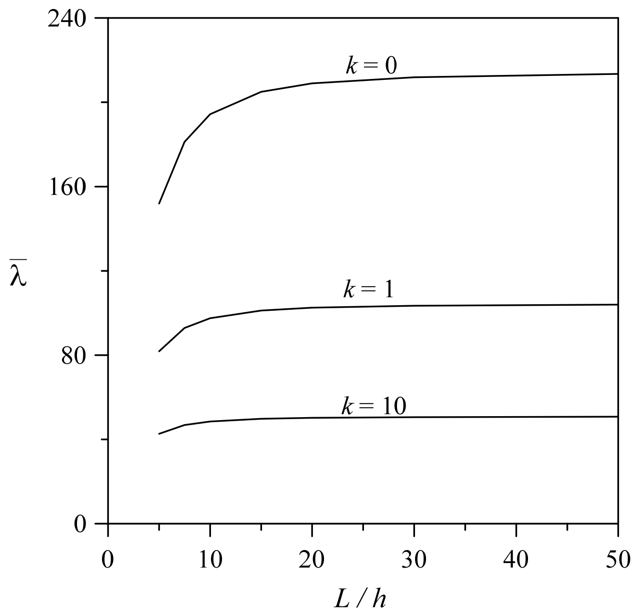
Tablo 9. Çeşitli sınır şartlarına sahip Tip A FDM sandviç kirişlerin boyutsuz kritik burkulma yükleri (*L*/*h*=20)
(Normalized critical buckling loads of Type A FGM sandwich beams with various boundary conditions, *L* / *h* = 20)

Kiriş	k	Teori	1-0-1	1-1-1	1-2-1	1-8-1
B-B	0	Bu çalışma	53,2363	53,2363	53,2363	53,2363
		Vo vd. [3]	53,2364	53,2364	53,2364	53,2364
	0,5	Bu çalışma	29,7047	34,0851	37,3056	45,5708
		Vo vd. [3]	29,7175	34,0862	37,3159	45,5742
	1	Bu çalışma	20,7096	25,9611	30,2199	41,8962
		Vo vd. [3]	20,7212	25,9588	30,2307	41,9004
	5	Bu çalışma	10,6079	14,2329	18,8781	35,0802
		Vo vd. [3]	10,6171	14,2284	18,8874	35,0856
A-A	0	Bu çalışma	208,9496	208,9496	208,9496	208,9496
		Vo vd. [3]	208,9510	208,9510	208,9510	208,9510
	0,5	Bu çalışma	117,1026	134,3320	146,9434	179,1813
		Vo vd. [3]	117,3030	134,4810	147,1040	179,2350
	1	Bu çalışma	81,8104	102,5318	119,2532	164,8830
		Vo vd. [3]	81,9927	102,6650	119,4220	164,9490
	5	Bu çalışma	41,9324	56,4050	74,7445	138,3039
		Vo vd. [3]	42,0775	56,4958	74,8903	138,3880
A-S	0	Bu çalışma	13,3730	13,3730	13,3730	13,3730
		Vo vd. [3]	13,3730	13,3730	13,3730	13,3730
	0,5	Bu çalışma	7,4535	8,5533	9,3627	11,4422
		Vo vd. [3]	7,4543	8,5512	9,3634	11,4424
	1	Bu çalışma	5,1937	6,5111	7,5808	10,5171
		Vo vd. [3]	5,1944	6,5083	7,5815	10,5174
	5	Bu çalışma	2,6599	3,5666	4,7316	8,8022
		Vo vd. [3]	2,6605	3,5637	4,7323	8,8025

değerleri için verilmiştir. Çekirdek tabakasının yüksekliğinin artması ile boyutsuz kritik burkulma yükleri artmaktadır. k = 0 değeri için tüm tabakalar seramik malzeme olduğundan FDM kiriş tek tabaka gibi davranmakta ve kritik burkulma yükleri, tabakaların kalınlıklarına bağlı olarak değişmemektedir. Şekilden, Tip A FDM kiriş için elde edilen boyutsuz kritik burkulma yüklerinin tamamen çekirdekteki seramik malzemeden yapılmış kirişten daima daha küçük olduğu görülmektedir.

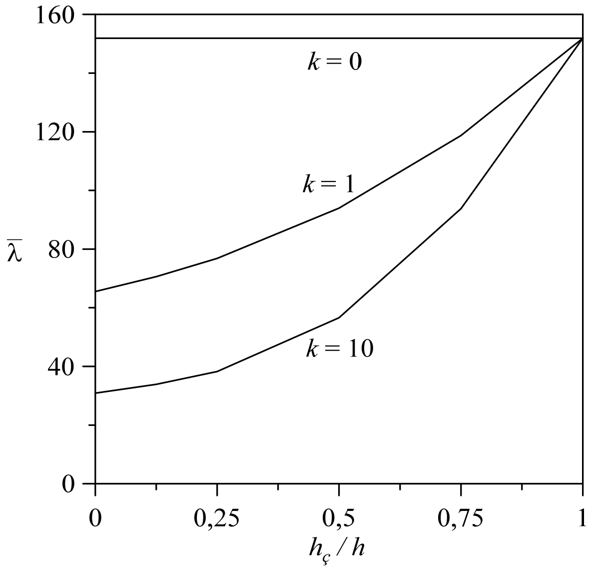


Şekil 7. Basit mesnetli Tip A FDM sandviç kirişlerin boyutsuz kritik burkulma yükleri (*L* / *h* = 5)
(Normalized critical buckling loads of Type A FGM sandwich beams with simple supported, *L* / *h* = 5)



Şekil 8. İki ucu ankastre Tip A FDM sandviç kirişlerin boyutsuz kritik burkulma yüklerinin *L*/*h*'ye göre değişimi
(Variation of the normalized critical buckling loads of Type A clamped-clamped FGM sandwich beams with *L*/*h*)

Tablo 10 ve 11'de çeşitli sınır şartlarına sahip Tip B FDM sandviç kirişlerin boyutsuz kritik burkulma yükleri verilmiştir. Tablolardan görüleceği üzere, kirişte seramik özellik hâkim iken (genellikle $k \leq 2$ iken) çekirdek tabakası yüksekliğinin artmasıyla kritik burkulma yükleri de artmaktadır. Ancak, kirişte metal özelliğin hâkim olmaya başlaması durumunda ($k > 2$ iken) ise çekirdek tabakasının yüksekliği arttıkça kritik burkulma yükleri azalmaktadır.



Şekil 9. İki ucu ankastre Tip A FDM sandviç kirişlerin boyutsuz kritik burkulma yüklerinin $h_ç/h$'ye göre değişimi (L/h = 5)
(Variation of the normalized critical buckling loads of Type A clamped-clamped sandwich beams with $h_ç/h$ (L/h = 5))

Tablo 10. Çeşitli sınır şartlarına sahip Tip B FDM sandviç kirişlerin boyutsuz kritik burkulma yükleri (L/h = 5)
(Normalized critical buckling loads of Type B FGM sandwich beams with various boundary conditions, L / h = 5)

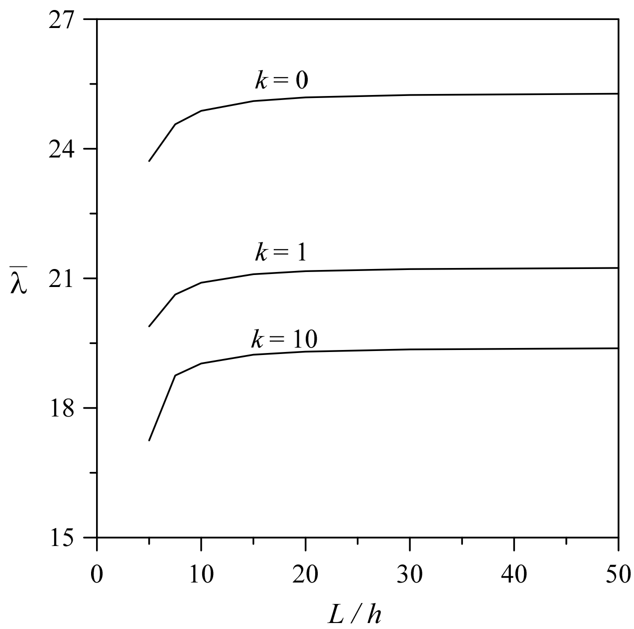
Kiriş	k	1-1-1	1-2-1	1-8-1
B-B	0	23,7148	27,7461	38,5911
	0,5	21,0835	22,8938	28,3499
	1	19,8887	20,7435	23,7567
	2	18,8857	19,0354	20,1265
	5	18,1915	18,0096	18,0550
	10	18,0052	17,7910	17,6642
A-A	0	79,9061	92,4621	124,3371
	0,5	70,8644	76,3548	90,1544
	1	66,6816	69,0673	74,9501
	2	63,0289	62,9927	62,8509
	5	60,2083	58,7149	54,8107
	10	59,2618	57,3692	51,7361
A-S	0	6,2197	7,3022	10,2677
	0,5	5,5338	6,0236	7,5075
	1	5,2243	5,4608	6,2778
	2	4,9680	5,0209	5,3176
	5	4,7981	4,7732	4,7948
	10	4,7574	4,7322	4,7158

Şekil 10'da basit mesnetli (1-1-1) Tip B FDM sandviç kirişlerin boyutsuz kritik burkulma yüklerinin L/h'ye göre değişimi verilmiştir. Görüleceği üzere, L/h oranı artıkça boyutsuz kritik burkulma yükleri artmaktadır. Ancak, Tip A kirişlerde olduğu gibi, $L/h > 20$ değerinden sonra narinliğin artması kritik burkulma yüklerinde önemli bir değişim meydana getirmemektedir.

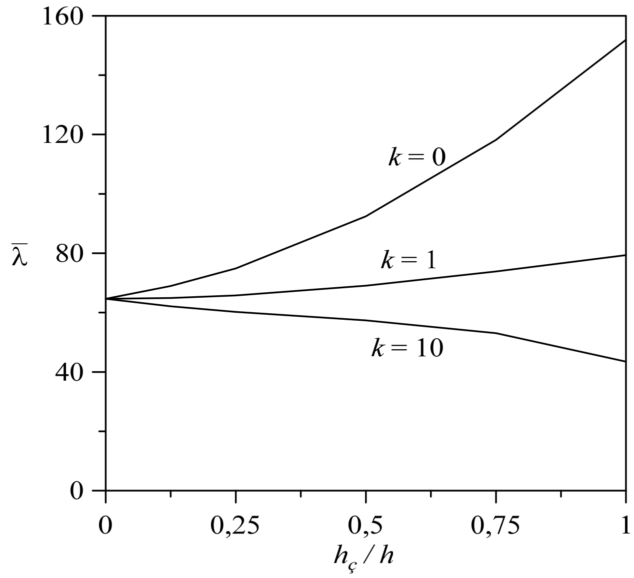
Tablo 11. Çeşitli sınır şartlarına sahip Tip B FDM sandviç kirişlerin boyutsuz kritik burkulma yükleri (L/h=20)
(Normalized critical buckling loads of Type B FGM sandwich beams with various boundary conditions, L / h = 20)

Kiriş	k	1-1-1	1-2-1	1-8-1
B-B	0	25,1878	29,5990	41,7412
	0,5	22,4148	24,4146	30,4817
	1	21,1656	22,1364	25,4741
	2	20,1350	20,3637	21,5771
	5	19,4599	19,3842	19,4826
	10	19,3041	19,2365	19,1889
A-A	0	99,5149	116,8354	164,2829
	0,5	88,5411	96,3779	117,2401
	1	83,5890	87,3721	97,0038
	2	79,4885	80,3337	82,0028
	5	76,7691	76,3712	74,3521
	10	76,1181	75,7156	72,4397
A-S	0	6,3166	7,4245	10,4781
	0,5	5,6215	6,1240	7,6492
	1	5,3084	5,5527	6,3916
	2	5,0505	5,1087	5,4138
	5	4,8820	4,8646	4,8899
	10	4,8435	4,8287	4,8180

Şekil 11'de iki ucu ankastre Tip B FDM sandviç kirişin boyutsuz kritik burkulma yüklerinin $h_ç/h$'ye göre değişimi verilmiştir. Tablo 10 ve 11'de ulaşılan sonuç bu grafikte daha net olarak görülmektedir. Çekirdek tabakasının yüksekliğinin artmasıyla kritik burkulma yükleri kirişteki seramik oranına bağlı olarak farklı trendler göstermektedir. Daha önce de söylenildiği gibi, kirişte seramik hâkim iken çekirdek tabakasının yüksekliği arttıkça kritik burkulma yükleri artarken; metal hâkim iken bunun aksine eğrilerin azalma eğiliminde olduğu görülmektedir.



Şekil 10. Basit mesnetli Tip B FDM sandviç kirişlerin boyutsuz kritik burkulma yüklerinin L/h'ye göre değişimi
(Variation of normalized critical buckling loads of simply supported Type B sandwich beams with L/h)



Şekil 11. İki ucu ankastre Tip B FDM sandviç kirişlerin boyutsuz kritik burkulma yüklerinin $h_ç/h$'ye göre değişimi (L/h = 5) (Variation of normalized critical buckling loads of Type B clamped-clamped sandwich beams with $h_ç/h$ (L/h = 5))

4. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada, son yıllarda mikro ve nano-elektromekanik sistemler biyosensörler, aktüatörler ve atomik kuvvet mikroskoplar gibi mikro ve nano yapıya sistemlerde çok yaygın olarak kullanılan fonksiyonel derecelendirilmiş (FDM) sandviç kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizleri Navier yöntemiyle analitik olarak ele alınmıştır. Yer değiştirme alanı, birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine göre ifade edilmiştir. Lagrange prensibi kullanılarak hareket denklemleri türetilmiş ve çözüm, trigonometrik seri fonksiyonlar kullanılarak elde edilmiştir. Seçilen trigonometrik fonksiyonlar, kirişin sınır şartlarını sağlamaktadır. Çalışmada, a) Homojen seramik çekirdek ve FDM yüzeylerden oluşturulan sandviç kiriş (Tip A) ve b) FDM çekirdek ve homojen yüzeylerden oluşturulan sandviç kiriş (Tip B) olmak üzere iki tip FDM sandviç kiriş göz önüne alınmıştır. Farklı sınır şartlarına sahip kirişler için kuvvet fonksiyonu indisi, çekirdek tabakasının yüksekliği ve narinliğin boyutsuz doğal frekanslar ve kritik burkulma yükleri üzerindeki etkileri irdelenmiştir. Çalışmadan elde edilen bulgular ışığında çıkarılan sonuçlar aşağıda sıralanmıştır:

- Tip A ve Tip B kirişlerde kuvvet fonksiyonu indisinin artmasıyla (metale doğru yaklaşılırken) hem boyutsuz doğal frekanslar hem de boyutsuz kritik burkulma yükleri azalmaktadır.

- Tip A kirişte çekirdek yüksekliğinin artması ile boyutsuz doğal frekanslar ve kritik burkulma yükleri artmaktadır.

- Tip B kirişlerde çekirdek yüksekliğinin artması boyutsuz doğal frekans ve kritik burkulma yükü eğrilerinde *k* değerine bağlı olarak farklı eğilimlere sebep olmaktadır. Buna göre, sandviç kirişte seramiğin hâkim olması durumunda çekirdek tabakasının yüksekliği arttıkça kritik burkulma yükleri artarken; tersine metalin hâkim olması durumunda eğrilerde azalma yönünde eğilim görülmektedir.

Bir genelleme yapmak gerekirse; FDM sandviç kirişlerde metal özelliğin hâkim olması durumunda doğal frekansların ve burkulma yüklerinin azaldığı, seramik özelliğin hâkim olması durumunda ise arttığı görülmektedir. Bu çalışmanın devamı niteliğinde ileride ele alınabilecek çalışmalarda, trigonometrik seri fonksiyonları kullanılarak malzeme özelliği iki doğrultuda değişen FDM kirişin serbest titreşimi ve burkulması incelenebilir. Ayrıca, aynı yöntem kullanılarak FDM mikro veya nano kirişler için analitik çözümler elde edilebilir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Yıldırım B., Investigation of thermal shock fracture in an edge-cracked functionally graded layer using finite element method, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 19 (3), 235-245, 2004.
2. Alshorbagy A. E., Eltaher M. A., Mahmoud F. F., Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method, Applied Mathematical Modelling, 35 (1), 412-425, 2011.
3. Vo T. P., Thai H.-T., Nguyen T.-K., Maheri A., Lee J., Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory, Engineering Structures, 64, 12-22, 2014.
4. Kahya V. ve Turan M., Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory, Composites Part B: Engineering, 109, 108-115, 2017.
5. Kahya V. ve Turan M., Vibration and stability analysis of functionally graded sandwich beams by a multi-layer finite element, Composites Part B: Engineering, 146, 198-212, 2018.
6. Aria A.I. ve Friswell M.I., A nonlocal finite element model for buckling and vibration of functionally graded nanobeams, Composites Part B: Engineering, 166, 233-246, 2019.
7. Mollamahmutoğlu Ç. ve Mercan A., A novel functional and mixed finite element analysis of functionally graded micro-beams based on modified couple stress theory, Composite Structures, 233, 1-15, 2019.
8. Sankar B.V., An elasticity solution for functionally graded beams, Composite Science and Technology, 61, 689-696, 2001.
9. Aydogdu M. ve Taskin V., Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges, Materials & Design, 28,5, 1651-1656, 2007.
10. Sina S. A., Navazi H. M., Haddadpour H., An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams, Materials & Design, 30 (3), 741-747, 2009.
11. Çelebi K., Keleş İ., Tütüncü N., Closed-form solutions for forced vibration analysis of inhomogenous rod,

Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 27 (4), 753-763, 2012.
12. Pradhan K. K. ve Chakraverty S., Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh–Ritz method, Composites Part B: Engineering, 51, 175-184, 2013.
13. Öktem A.S., Static analysis of functionally graded (FGM) composite plates, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 29 (1), 111-119, 2014.
14. Nguyen T.-K. ve Nguyen B.-D., A new higher-order shear deformation theory for static, buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich beams, Journal of Sandwich Structures & Materials, 17,6, 613-631, 2015.
15. Chen W. R. ve Chang H., Closed-form solutions for free vibration frequencies of functionally graded Euler-Bernoulli beams, Mechanics of Composite Materials, 53,1, 79-98, 2017.
16. Lee J. W. ve Lee J. Y., Free vibration analysis of functionally graded Bernoulli-Euler beams using an exact transfer matrix expression, International Journal of Mechanical Sciences, 122, 1-17, 2017.
17. Turan M., Tabakalı kirişlerin static, serbest titreşim ve burkulma analizleri için bir sonlu eleman modeli, Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2018.
18. Avcar M. ve Mohammed W. K. M., Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation. Arabian Journal of Geosciences, 11 (10), 232, 2018.
19. Avcar M., Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams. Steel and Composite Structures, 30 (6), 603-615, 2019.
20. Sayyad A.S. ve Ghugal Y.M., Analytical solutions for bending, buckling, and vibration analyses of exponential functionally graded higher order beams, Asian Journal of Civil Engineering, 19, 607-623, 2018.
21. Sayyad A.S. ve Avhad P.V., On static bending, elastic buckling and free vibration analysis of symmetric functionally graded sandwich beams, Journal of Solid Mechanics, 11, 166-180, 2019.
22. Lee J. W. ve Lee J. Y., Contribution rates of normal and shear strain energies to the natural frequencies of functionally graded shear deformation beams, Composites Part B: Engineering, 159, 86-104, 2019.
23. Turan M. ve Kahya V., Free vibration analysis of functionally graded beams, The Black Sea Journal of Sciences, 8 (2), 119-130, 2018.
24. Turan M. ve Kahya V., Use of trigonometric series functions in free vibration analysis of laminated composite beams, Challenge Journal of Structural Mechanics, 6 (2), 61-67, 2020.
25. Civalek Ö. ve Demir C., Buckling and bending analyses of cantilever carbon nanotubes using the Euler–Bernoulli beam theory based on non-local continuum model, Asian Journal of Civil Engineering, 12 (5), 651–661, 2011.
26. Akgöz B. ve Civalek O., Bending analysis of embedded carbon nanotubes resting on an elastic foundation using strain gradient theory, Acta Astronautica, 119, 1-12, 2016.
27. Gurses M., Akgoz B., Civalek O., Mathematical modeling of vibration problem of nano-sized annular sector plates using the nonlocal continuum theory via eight-node discrete singular convolution transformation, Applied Mathematics and Computation, 219, 3226-3240, 2012.
28. Akgöz B. ve Civalek O., Buckling analysis of functionally graded microbeams based on the strain gradient theory, Acta Mechanica, 224, 2185-2201, 2013.
29. Demir C. ve Civalek O., A new nonlocal FEM via Hermitian cubic shape functions for thermal vibration of nano beams surrounded by an elastic matrix, Composite Structures 168, 872-884, 2017.
30. MATLAB (matrix laboratory), MathWorks, USA, 2016.