Academic Platform Journal of Engineering and Science 7-3, 403-405, 2019

Academic Platform Journal of Engineering and Science

journal homepage: http://apjes.com/

Serbest Nilpotent Lie Cebirlerinin Otomorfizm Grupları Üzerine

*[1]Özge Öztekin, [2]Cennet Eskal
[1]Gaziantep Üniversitesi, Matematik Bölümü
ozgeoztekin@gantep.edu.tr
[2]Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Matematik Bölümü
cenneteskal@osmaniye.edu.tr

Araştırma Makalesi Geliş Tarihi: 11.04.2019 Kabul Tarihi: 27.06.2019

Öz

$L_{m,k}$ karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerinde sonlu $m, m \geq 2$ rankına sahip, k −yıncı sınıftan serbest nilpotent Lie cebiri olsun. $L_{m,k}$ nın merkezi otomorfizmler grubunun bu cebirin IA −otomorfizmler grubu ile iç otomorfizmler grubuna eşit olması için gerek ve yeter koşulları belirledik.

Anahtar Kelimeler: Serbest Lie cebir, ***IA*** −otomorfizm grubu, iç otomorfizm grubu, merkezi otomorfizm grubu.

On The Automorphism Groups of Free Nilpotent Lie Algebras

*[1]Özge Öztekin, [2]Cennet Eskal
[1]Department of Mathematics, Gaziantep University,
ozgeoztekin@gantep.edu.tr
[2]Department of Mathematics, Osmaniye Korkut Ata University,
cenneteskal@osmaniye.edu.tr

Abstract

Let $L_{m,k}$ be the free nilpotent Lie algebra of class k that of finite rank $m, m \geq 2$ over a field of characteristic zero. In this study, we give necessary and sufficient conditions on the equalities of the central automorphisms group of $L_{m,k}$ to the IA-automorphisms group and inner automorphisms group of $L_{m,k}$.

Keywords: Free Lie algebra, ***IA*** −automorphisms group, inner automorphisms group, central automorphisms group.

1. GİRİŞ

K karakteristiği sıfır olan bir cisim, F_m, K üzerinde $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ kümesi tarafından serbest olarak üretilen serbest Lie cebiri ve $\gamma_k(F_m)$, F_m nin alt merkezi serisinin k-yıncı terimi olsun. O zaman $L_{m,k} = {F_m}/{\gamma_k(F_m)}$ k −yıncı sınıftan $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_m}\}$ kümesi tarafından üretilen serbest nilpotent Lie cebiridir, $\overline{x_j} = x_j + \gamma_k(F_m)$, $j = 1, \ldots, m$ olmak üzere burada, $\overline{x_j}$ yazılışı yerine kolaylık olması açısından x_j yazılışını tercih edeceğiz. $L_{m,k}$ nin tüm otomorfizmlerinin grubunu $Aut(L_{m,k})$ ile gösterelim. Her $v \in L_{m,k}$ için $adv: L_{m,k} \to L_{m,k}$ lineer dönüşümü $L_{m,k}$ nın bir türevi olup nilpotenttir. Yani $\gamma_k(F_m) = 0$ olduğundan $ad^{k-1}v = 0$ dır. Bu durumda,

$$e^{adv} = 1 + \frac{adv}{1!} + \frac{ad^2v}{2!} + \cdots + \frac{ad^{k-2}v}{(k-2)!}$$

lineer dönüşümü iyi tanımlı olup $L_{m,k}$ nın bir otomorfizmidir. Bu formdaki otomorfizmlere iç otomorfizm denir. $L_{m,k}$ nın tüm iç otomorfizmlerinin kümesi $Aut(L_{m,k})$ nın bir normal altgrubunu oluşturur ve bu grup $Inn(L_{m,k})$ ile gösterilir. $L'_{m,k}$, $L_{m,k}$ nın türetilmiş altcebiri olmak üzere eğer $\alpha \in Aut(L_{m,k})$ ve $u \in L_{m,k}$ için $\alpha(u) - u \in L'_{m,k}$ ise α ya $L_{m,k}$ nın IA −otomorfizmi denir. Tüm IA −otomorfizmlerin kümesi $Aut(L_{m,k})$ grubunun bir

*[1]Sorumlu yazar: Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Gaziantep Üniversitesi, Türkiye, ozgeoztekin@gantep.edu.tr

Doi: 10.21541/apjes.552208

altgrubudur ve bu altgrup $IA(L_{m,k})$ ile gösterilir. $Z(L_{m,k})$, $L_{m,k}$ nın merkezi olmak üzere eğer $\beta \in Aut(L_{m,k})$ ve $u \in L_{m,k}$ için $\beta(u) - u \in Z(L_{m,k})$ ise β ya $L_{m,k}$ nın $merkezi$ −otomorfizmi denir.
Tüm $merkezi$ −otomorfizmlerin kümesi $Aut(L_{m,k})$ grubunun bir normal altgrubudur ve bu altgrup $Aut_C(L_{m,k})$ ile gösterilir.
Lie cebirlerinin farklı tiplerdeki otomorfizmlerini, bu otomorfizmlerin yapısını ve özelliklerini incelemek, özellikle son zamanlarda üzerinde çalışılan oldukça önemli bir konu haline gelmiştir. Örneğin, serbest Lie cebirler kategorisinin otomorfizmleri [8], serbest nilpotent Lie cebirlerinin otomorfizmleri [5], bir serbest metabelyen Lie cebirinin otomorfizm grubu [10], bir serbest metabelyen Lie cebirinin normal otomorfizmleri [7] çalışılmıştır. Özel bir otomorfizm grubu olan merkezi otomorfizmler grubu ile ilgili çalışmalar da bulunmaktadır. Bir serbest nilpotent Lie cebirinin merkezi otomorfizmleri [9] ve bir serbest center-by-metabelyen Lie cebirinin merkezi otomorfizmleri [6] incelenmiştir. Merkezi otomorfizmlerle ilgili benzer çalışmalar grup teorisinde de [1-4] bulunmaktadır. Çalışmamızın temel amacı, $IA(L_{m,k}) = Aut_C(L_{m,k})$ olması için gerek ve yeter koşulun $m \geq 2$ ve $k = 3$ olduğunu ve $Inn(L_{m,k}) = Aut_C(L_{m,k})$ olması için gerek ve yeter koşulun $m = 2$ ve $k = 3$ olduğunu ispatlamaktır.

2. TEMEL SONUÇLAR

$L_{m,k} = {F_m}/{\gamma_k(F_m)}$, k −yıncı sınıftan serbest nilpotent Lie cebiri olsun. $u, v \in L_{m,k}$ için $[u, v]$ komütatörü ile Lie çarpımını göstereceğiz. $Z(L_{m,k})$, $L_{m,k}$ nın merkezi olmak üzere $Z(L_{m,k}) = \gamma_{k-1}(L_{m,k}) \cong {\gamma_{k-1}(F_m)}/{\gamma_k(F_m)}$ dir.
Böylece $L_{m,k}$ nın herhangi bir β $merkezi$ −otomorfizmi

$$\beta(x_i) = x_i + v_i, \quad v_i \in \gamma_{k-1}(L_{m,k}), \quad i = 1, \dots, m$$

formundadır.

Önerme 2.1. $L_{m,k}$ serbest nilpotent Lie cebiri olsun. $m \geq 2$ ve $k \geq 1$ için $L_{m,k}$ nın tüm merkezi otomorfizmleri IA dır.

İspat. $\beta \in Aut_C(L_{m,k})$ alalım. Bu durumda β, $\beta(x_i) = x_i + v_i$, $v_i \in \gamma_{k-1}(L_{m,k})$ formundadır. $m \geq 2$ ve $k \geq 1$ için $\gamma_{k-1}(L_{m,k}) \subseteq L'_{m,k}$ olduğundan β, $L_{m,k}$ nın bir IA-otomorfizmi olur.

Önerme 2.2. $L_{m,k}$ serbest nilpotent Lie cebiri olsun. $m \geq 2$ ve $k = 3$ için $L_{m,k}$ nın tüm IA −otomorfimleri merkezidir.

İspat. $\beta \in IA(L_{m,3})$ alalım. Bu durumda β,

$$\beta(x_i) = x_i + \alpha[x_j, x_k], \quad \alpha \in K, \qquad j, k \in \{1, \dots, m\}$$

formundadır. $L_{m,3}$ serbest nilpotent Lie cebirinin merkezi $Z(L_{m,3}) = \gamma_2(L_{m,3})$ olduğundan β, $L_{m,3}$ nın bir $merkezi$-otomorfizmidir.

Teorem 2.1. $L_{m,k}$, serbest nilpotent Lie cebiri olsun. $IA(L_{m,k}) = Aut_C(L_{m,k})$ olması için gerek ve yeter koşul $m \geq 2$ ve $k = 3$ olmasıdır.

İspat. Önerme 2.1 ve Önerme 2.2. den elde edilir

Şimdi $Inn(L_{m,k}) = Aut_C(L_{m,k})$ olması için gerek ve yeter koşulun $m = 2$ ve $k = 3$ olduğunu ispatlamak için gereken önerme ve teoremleri verelim.

Önerme 2.3. $L_{m,k}$ serbest nilpotent Lie cebiri olsun. Eğer β, $L_{m,k}$ nın $\gamma_{k-2}(L_{m,k})$ tarafından belirlenen bir iç otomorfizmi ise β $merkezi$ −otomorfizmdir.

İspat. β, $\gamma_{k-2}(L_{m,k})$ tarafından belirlenen bir iç otomorfizm olsun. Bu durumda β, $v_i \in \gamma_{k-2}(L_{m,k})$ olmak üzere $\beta(x_i) = e^{adv_i}(x_i) = x_i + [x_i, v_i]$ formundadır.
$\beta(x_i) - x_i \in \gamma_{k-1}(L_{m,k}) = Z(L_{m,k})$ olduğundan β, $L_{m,k}$ nın bir $merkezi$- otomorfizmi olur.

Teorem 2.2.

$$Aut_C(L_{m,k}) \cong Hom\left({L_{m,k}}/{Z(L_{m,k})}, Z(L_{m,k}) \right) \text{ dır.}$$

İspat. $\sigma: Aut_C(L_{m,k}) \to Hom\left({L_{m,k}}/{Z(L_{m,k})}, Z(L_{m,k}) \right)$ homomorfizmini, her bir $\beta \in Aut_C(L_{m,k})$ ve $u \in L_{m,k}$ için $\sigma_\beta: {L_{m,k}}/{Z(L_{m,k})} \to Z(L_{m,k})$,
$\sigma_\beta\left(u + Z(L_{m,k})\right) = \beta(u) - u$ olmak üzere $\sigma(\beta) = \sigma_\beta$ olarak tanımlayalım.
Önce σ_β nın iyi tanımlı olduğunu gösterelim.
$u_1, u_2 \in L_{m,k}$ alalım.
$u_1 + Z(L_{m,k}), u_2 + Z(L_{m,k}) \in {L_{m,k}}/{Z(L_{m,k})}$ için
$u_1 + Z(L_{m,k}) = u_2 + Z(L_{m,k})$ olsun. O zaman $u_1 - u_2 \in Z(L_{m,k})$ olup β merkezi otomorfizmi merkezdeki tüm elemanları sabit bıraktığından $\beta(u_1 - u_2) = u_1 - u_2$ dır. Buradan $\beta(u_1) - u_1 = \beta(u_2) - u_2$ ve $\sigma_\beta\left(u_1 + Z(L_{m,k})\right) = \sigma_\beta\left(u_2 + Z(L_{m,k})\right)$ elde edilir. Yani σ_β iyi tanımlıdır.
Şimdi σ nın iyi tanımlı olduğunu gösterelim.
$\theta, \beta \in Aut_C(L_{m,k})$ için $\sigma(\beta) \neq \sigma(\theta)$ olsun. O zaman her $u \in L_{m,k}$ için $\sigma(\beta)\left(u + Z(L_{m,k})\right) = \beta(u) - u \neq \theta(u) - -u = \sigma(\theta)(u + Z(L_{m,k}))$ olup $\beta \neq \theta$ dır. Böylece σ nın iyi tanımlı olduğu elde edilmiş olur.
$\beta \in ker\sigma$ ise $\sigma(\beta) = 0$ dır. Buradan, her $u \in L_{m,k}$ için $\sigma(\beta)\left(u + Z(L_{m,k})\right) = \beta(u) - u = 0$ elde edilir, bu ise $\beta(u) = u$ yani β nın birim otomorfizm olması demektir. O halde, Id, birim otomorfizmi göstermek üzere $ker\sigma = \{Id\}$ olup σ birebirdir.

Her bir $h \in Hom\left({L_{m,k}}/{Z(L_{m,k})}, Z(L_{m,k})\right)$ için $\beta(u) = u + h\left(u + Z(L_{m,k})\right)$ olarak tanımlayalım. Burada $\beta \in Aut_C(L_{m,k})$ olduğu açıktır.

$h\left(u + Z(L_{m,k})\right) = \beta(u) - u = \sigma(\beta)\left(u + Z(L_{m,k})\right)$

eşitliklerinden $h = \sigma(\beta)$ elde edilir. O halde σ örtendir. Öyleyse σ bir izomorfizmadır.

Teorem 2.3. $L_{m,k}$, serbest nilpotent Lie cebiri olsun. $Inn(L_{m,k}) = Aut_C(L_{m,k})$ gerek ve yeter koşul $m = 2$ ve $k = 3$ olmasıdır.

İspat. $Inn(L_{m,k}) = Aut_C(L_{m,k})$ olduğunu kabul edelim. Her bir iç otomorfizmi merkezi ise Önerme 2.3 ten $k = 3$ olduğu elde edilir.

$\left|{L_{m,k}}/{Z(L_{m,k})}\right|$, $|Inn(L_{m,k})|$, $|Aut_C(L_{m,k})|$ ve $|Z(L_{m,k})|$ sırayla ${L_{m,k}}/{Z(L_{m,k})}$, $Inn(L_{m,k})$, $Aut_C(L_{m,k})$ ve $Z(L_{m,k})$ nın rankını göstersin.

${L_{m,k}}/{Z(L_{m,k})}$ ve $Z(L_{m,k})$ sonlu ranklı olduğundan,

$$\left|{L_{m,k}}/{Z(L_{m,k})}\right| = |Inn(L_{m,k})| = |Aut_C(L_{m,k})|$$

dir. Teorem 2.2 den

$$\left|{L_{m,k}}/{Z(L_{m,k})}\right| = Hom\left({L_{m,k}}/{Z(L_{m,k})}, Z(L_{m,k})\right)$$

$$\left|{L_{m,k}}/{Z(L_{m,k})}\right| \geq \left|{L_{m,k}}/{Z(L_{m,k})}\right| . |Z(L_{m,k})|$$

dir. Buradan $|Z(L_{m,k})| = 1$ elde edilir. Öyleyse $k = 3$ olduğundan $Z(L_{m,3}) = \{[x_1, x_2]\}$dir ve böylece $m = 2$ elde edilmiş olur.

Şimdi $m = 2$ ve $k = 3$ olsun.

$\beta \in Inn(L_{2,3})$ ise

$$\beta = e^{adu}(x_i) = x_i + [x_i, u]$$

formunda olup $u \in \gamma_1(L_{2,3})$ dir. Önerme 2.3 ten $\beta \in Aut_C(L_{2,3})$ dir.

$\beta \in Aut_C(L_{2,3})$ alalım.

$$\beta(x_i) = x_i + [x_j, x_k], \qquad j, k, i \in \{1,2\}$$

şeklindedir. j, k ve i nin alabileceği tüm değerler için β iç otomorfizmdir. Böylece

$$Aut_C(L_{2,3}) = Inn(L_{2,3})$$

elde edilmiş olur.

KAYNAKÇA

[1] J. E. Adney, T. Yen, "Automorphisms of p-groups", Illinois J. Math. 9, pp. 137-143, 1965.

[2] M. S. Attar, "On central automorphisms that fix the centre elementwise", Arch. Math., vol. 89, pp. 296-297, 2007.

[3] M. J. Curran, "Finite groups with central automorphism group of minimal order", Math. Proc. R. Ir. Acad., vol. 104, no. A2, pp. 223-229, 2004.

[4] M. J. Curran, D. J. McCaughnan, "Central automorphisms that are almost inner", Communications in Algebra, vol. 29, no. 5, pp. 2081-2087, 2001.

[5] M. Drensky, "Automorphisms of free nilpotent Lie algebras Can. J. Math., vol. 13, no. 2, pp. 259-279, 1990.

[6] Z. Esmerligil, "On central automorphisms of free center-by-metabelian Lie algebras", IARJSET, vol. 3, no. 7, 2016.

[7] Ş. Fındık, "Normal and normally outer automorphisms of free metabelian nilpotent Lie algebras", Serdica Math. J, 36, pp. 170-210, 2010.

[8] G. Mashevitzky, B. Plotkin, E. Plotkin, "Automorphisms of the category of free Lie algebras", Journal of Algebra, vol. 283, no. 2, pp. 490-512, 2004.

[9] Ö. Öztekin, N. Ekici, "Central automorphisms of free nilpotent Lie algebras", Journal of Algebra and its Applications, Doi. 1750205., 2016.

[10] V. Romankov, "On the automorphism group of a free metabelian Lie algebra", International Journal of Algebra and Computation, vol. 18, no. 1, pp. 1–18, 2008.