Araştırma Makalesi / *Research Article*
Matematik / Mathematics

Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 9(3): 1622-1632, 2019
***Journal of the Institute of Science and Technology*, 9(3): 1622-1632, 2019**

DOI: 10.21597/jist.559561 **ISSN: 2146-0574, eISSN: 2536-4618**

İteratif Yaklaşım Altında Bir Fonksiyonel-İntegral Denklem Sınıfının Çözümünün İncelenmesi

Yunus ATALAN[1*]

ÖZET: Bu çalışmada üç adımlı bir sabit nokta iterasyon algoritması kullanılarak fonksiyonel-integral denklem sınıfının çözümüne ulaşılabildiği gösterilmiştir. Ayrıca bu integral denklem için veri bağlılığı sonucu elde edilmiş olup, bu sonucu destekleyen bir örnek verilmiştir

Anahtar Kelimeler: İterasyon algoritması, fonksiyonel-integral denklem, yakınsaklık, veri bağlılığı

Examination of the Solution of A Class of Functional-Integral Equation Under Iterative Approach

ABSTRACT: In this study, it has been shown that the solution of a class of functional-integral equation can be reached by using a three-step fixed point iterative algorithm. In addition, the data dependence result for this integral equation has been obtained and in order to support this result an example has been given.

Keywords: Iterative algorithm, functional-integral equation, convergence, data dependence

[1] Yunus ATALAN (**Orcid ID:** 0000-0002-5912-7087), Aksaray Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Aksaray, Türkiye

*Sorumlu Yazar: Yunus ATALAN, e-mail: yunusatalan@aksaray.edu.tr

Geliş tarihi / *Received*:30.04.2019
Kabul tarihi / *Accepted*:29.05.2019

GİRİŞ

Fonksiyonel-integral denklemler teorisi, lineer olmayan analizin aktif çalışma alanlarından biri olup söz konusu denklemlerin çözümlerinin varlığını veya tekliğini göstermede sabit nokta teorisi kullanışlı bir metot olarak karşımıza çıkmaktadır (Pascal ve Zabreiko, 2004; Appel ve Kalitvin, 2006; Atalan ve Karakaya, 2017; Şahin ve ark., 2017).

Çözülmesi istenen integral veya diferansiyel denklem için sabit nokta teorideki temel düşünce, denklemi belirli şartlar altında bir operatör sınıfına dahil ederek adına iterasyon denilen algoritmalar inşa etmek ve bu iterasyondan elde edilen dizinin operatörün sabit noktasına başka bir deyişle, denklemin çözümüne yakınsaması için uygun şartları belirlemektir. Bu nedenle, sabit nokta iterasyon algoritmaları birçok araştırmacı tarafından integral veya diferansiyel denklemleri çözmek için çalışılmıştır (Dobritoiu, 2008; Berinde, 2010; Lauran, 2011; Khuri ve Sayfy, 2015).

Belirli bir dönüşümle inşa edilen bir iterasyon algoritması için, adına yaklaşım operatörü denilen başka bir dönüşüm kullanılabilir. Bu yaklaşım operatörünün sabit noktası farklı olduğundan, esas dönüşümün sabit noktası ile yaklaşım operatörünün sabit noktası arasında ne kadar fark olduğu ve bu farkın nasıl hesaplanabileceği soruları karşımıza veri bağlılığı kavramını çıkarmaktadır. Bu kavram Banach uzaylarından metrik uzaylara kadar birçok yazar tarafından çalışılmış ve bu anlamda geniş bir literatür oluşturulmuştur (Şoltuz ve Grosan, 2008; Şahin ve Başarır, 2016; Karakaya ve ark., 2017; Atalan, 2018).

Bu çalışmada, bir fonksiyonel-integral denklem çeşidi uygun şartlar altında belirli bir operatör sınıfına dahil edilerek üç adımlı bir iterasyon algoritması inşa edilmiş ve bu algoritmadan elde edilen dizinin söz konusu denklemin çözümüne yakınsak olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu çözümün veri bağlı olduğu ispatlanarak elde edilen sonucu destekleyen bir örnek verilmiştir.

MATERYAL VE YÖNTEM

Bu çalışmada aşağıda verilen integral denklem göz önüne alınmıştır (Petruşel ve Rus, 2018):

$$u(v) = \int_a^b H\left(v, p, u(p), u\big(f(p)\big)\right) dp + c(v) \qquad v \in [\alpha, \beta] \tag{2.1}$$

burada X bir Banach uzayı ve $\alpha \leq a < b \leq \beta$, $H \in (C[\alpha,\beta]^2 \times X^2, X)$,$c \in C([\alpha,\beta], X)$ ve $f \in C([\alpha,\beta],[\alpha,\beta])$ şeklinde tanımlıdır.

$A: C([\alpha,\beta], X) \rightarrow C([\alpha,\beta], X)$ olmak üzere;

$$A\big(u(v)\big) = \int_a^b H\left(v, p, u(p), u\big(f(p)\big)\right) dp + c(v) \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (2.2) ile verilen integral operatörün çözümünü bulmak, A operatörünün $x_* = Ax_*$ şeklinde tanımlı sabit noktasını bulmaya eşdeğer olacaktır. Petruşel ve Rus, (Petruşel ve Rus, 2018) aşağıda verilen şartlar altında (2.2) ile verilen integral denklemin çözümünün varlığını ve tekliğini göstermişlerdir:

Teorem 2.1:(Petruşel ve Rus, 2018).

Her $v, p \in [\alpha, \beta]$ ve her $x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$ için

1. $\|H(v,p,x_1,y_1) - H(v,p,x_2,y_2)\| \leq L_1\|x_1 - x_2\| + L_2\|y_1 - y_2\|$

olacak şekilde $L_1, L_2 > 0$ sayıları mevcut olsun.

2. $(L_1 + L_2)(b - a) < 1$

sağlansın. Bu durumda (2.2) ile verilen integral denklem $x_* \in C([\alpha,\beta],X)$ şeklinde bir tek çözüme sahiptir ve

$$x_{n+1} = Ax_n \quad n = 0,1,2 \dots$$

şeklinde tanımlanan Picard iterasyonundan elde edilen dizi $x_0 \in C([\alpha,\beta],X)$ başlangıç noktası için x_* çözümüne yakınsar.

Bu durumda aşağıdaki soru doğal olarak karşımıza çıkmaktadır:

(2.2) ile verilen integral denklemin çözümüne daha hızlı yakınsayacak başka bir iterasyon algoritması seçmek mümkün müdür?

2017 yılında Karakaya vd. (Karakaya ve ark., 2017) tarafından tanımlanan aşağıdaki üç adımlı iterasyon algoritmasının Picard (Picard, 1890), Mann (Mann, 1953), Ishikawa (Ishikawa, 1974), Noor (Noor, 2000), SP (Phuengrattana ve Suantai, 2011), CR (Chugh ve ark., 2012), Sahu-S (Sahu, 2011), ve Picard-S (Gürsoy, 2016) gibi birçok iterasyon algoritmasından daha hızlı olduğu gösterilmiştir:

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = Ay_n \\ y_n = (1-\alpha_n)z_n + \alpha_n A z_n \\ z_n = Ax_n \end{cases} \tag{2.3}$$

burada X bir Banach uzayı, $A: X \to X$ bir dönüşüm ve $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1]$ belirli şartları sağlayan bir kontrol dizisidir. Bu nedenle yukarıda verilen soruya olumlu cevap verebilmek için (2.3) ile verilen iterasyonu kullanmak yeterli olacaktır. Şimdi temel sonuçların elde edilebilmesi için ihtiyaç duyulan bazı tanım ve lemmalar verilecektir:

Lemma 2.2:(Weng, 1991). $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ negatif olmayan iki dizi olmak üzere,

$$a_{n+1} \leq (1-\mu_n)a_n + b_n$$

eşitsizliğini sağlasın. Eğer her $n \geq n_0$ için $\mu_n \in (0,1)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \infty$ ve $n \to \infty$ için $\frac{b_n}{\mu_n} \to 0$ sağlanırsa $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olur.

Lemma 2.3:(Şoltuz ve Grosan, 2008). $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ negatif olmayan bir dizi, her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mu_n \in (0,1)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \infty$ ve $\gamma_n \geq 0$ olsun. Her $n \geq n_0$ için

$$a_{n+1} \leq (1-\mu_n)a_n + \mu_n\gamma_n$$

eşitsizliğinin sağlanacağı şekilde bir n_0 sayısı mevcut olsun. Bu durumda

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} \gamma_n$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.4:(Şoltuz ve Grosan, 2008). $A_1, A_2: C \to C$ iki operatör olsun. Her $x \in C$ ve sabit bir $\varepsilon > 0$ için $\|A_1 x - A_2 x\| \le \varepsilon$ ise A_2'ye A_1'in yaklaşım operatörü adı verilir.

BULGULAR VE TARTIŞMA

Teorem 3.1. Teorem 2.1'de verilen koşullar ile birlikte $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1]$ dizisi için $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartının sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda (2.2) ile verilen integral denklem $x_* \in C([\alpha,\beta], X)$ şeklinde bir tek çözüme sahiptir ve (2.3) ile verilen iterasyon algoritmasından elde edilen dizi bu çözüme yakınsar.

İspat. (2.2) ile verilen $A: C([\alpha,\beta], X) \to C([\alpha,\beta], X)$ operatörü altında inşa edilen (2.3) iterasyon algoritmasından elde edilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini göz önüne alalım. $n \to \infty$ için $x_n \to x_*$ olduğu gösterilecektir.(2.2), (2.3) ve Teorem 2.1'deki koşullar kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}(v) - x_*(v)\| &= \|A(y_n(v)) - A(x_*(v))\| \\
&= \left\| \left[\int_a^b H\left(v, p, y_n(p), y_n(f(p))\right) dp + c(v) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\int_a^b H(v, p, x_*(p), x_*(f(p)))\, dp + c(v) \right] \right\| \qquad (3.1) \\
&\le \int_a^b \left\| H\left(v, p, y_n(p), y_n(f(p))\right) - H(v, p, x_*(p), x_*(f(p))) \right\| dp \\
&\le \int_a^b [L_1 \|y_n - x_*\| + L_2 \|y_n - x_*\|]\, dp \\
&= (L_1 + L_2)(b - a)\|y_n - x_*\|
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|y_n - x_*\| &\le (1 - \alpha_n)\|z_n - x_*\| + \alpha_n \|A z_n - A x_*\| \\
&\le (1 - \alpha_n)\|z_n - x_*\| \\
&\quad + \alpha_n \left\| \left[\int_a^b H\left(v, p, z_n(p), z_n(f(p))\right) dp + c(v) \right] \right. \qquad (3.2) \\
&\quad \left. - \left[\int_a^b H(v, p, x_*(p), x_*(f(p)))\, dp + c(v) \right] \right\| \\
&\le (1 - \alpha_n)\|z_n - x_*\| \\
&\quad + \alpha_n \int_a^b \left\| H\left(v, p, z_n(p), z_n(f(p))\right) - H(v, p, x_*(p), x_*(f(p))) \right\| dp \\
&\le (1 - \alpha_n)\|z_n - x_*\| + \alpha_n \int_a^b [L_1 \|z_n - x_*\| + L_2 \|z_n - x_*\|]\, dp \\
&= (1 - \alpha_n)\|z_n - x_*\| + \alpha_n (L_1 + L_2)(b - a)\|z_n - x_*\| \\
&= [1 - \alpha_n(1 - (L_1 + L_2)(b - a))]\|z_n - x_*\|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\|z_n - x_*\| &= \|Ax_n - Ax_*\| \\ &= \left\| \left[\int_a^b H\left(v,p,x_n(p),x_n\big(f(p)\big)\right)dp + c(v)\right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\int_a^b H(v,p,x_*(p),x_*(f(p)))\,dp + c(v)\right] \right\| \qquad (3.3) \\ &\le \int_a^b \left\| H\left(v,p,x_n(p),x_n\big(f(p)\big)\right) - H(v,p,x_*(p),x_*(f(p))) \right\| dp \\ &\le \int_a^b [L_1\|x_n - x_*\| + L_2\|x_n - x_*\|]\,dp \\ &= (L_1 + L_2)(b-a)\|x_n - x_*\|\end{aligned}$$

şeklinde olup, sırasıyla (3.3) eşitsizliği (3.2)'de ve (3.2) eşitsizliği de (3.1)'de yerine yazılırsa

$$\|x_{n+1} - x_*\| \le [(L_1+L_2)(b-a)]^2[1 - \alpha_n(1 - (L_1+L_2)(b-a))]\|x_n - x_*\|$$

elde edilir. Bu süreç n-kez devam ettirildiğinde ise,

$$\|x_n - x_*\| \le [(L_1+L_2)(b-a)]^2\big[1 - \alpha_{n-1}\big(1 - (L_1+L_2)(b-a)\big)\big]\|x_{n-1} - x_*\|$$

$$\|x_{n-1} - x_*\| \le [(L_1+L_2)(b-a)]^2\big[1 - \alpha_{n-2}\big(1 - (L_1+L_2)(b-a)\big)\big]\|x_{n-2} - x_*\|$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\|x_1 - x_*\| \le [(L_1+L_2)(b-a)]^2[1 - \alpha_0(1 - (L_1+L_2)(b-a))]\|x_0 - x_*\|$$

eşitsizlikleri elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikler kullanılarak

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_*\| &\le [(L_1+L_2)(b-a)]^{2(n+1)} \\ &\quad \times \prod_{i=0}^{n}[1 - \alpha_i(1 - (L_1+L_2)(b-a))]\,\|x_0 - x_*\| \qquad (3.4)\end{aligned}$$

yazılabilir. Ortalama Değer Teoreminden her $x \in [0,1]$ için $1 - x \le e^{-x}$ olduğu açıktır. Bu nedenle (3.4) eşitsizliğinden

$$\|x_{n+1} - x_*\| \le [(L_1+L_2)(b-a)]^{2(n+1)}\|x_0 - x_*\|e^{-[1-(L_1+L_2)(b-a)]\sum_{i=0}^{n}\alpha_i}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_*\| = 0$$

elde edilir ve bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi (2.3) ile verilen iterasyon algoritması kullanılarak (2.2) ile verilen integral denkleminin çözümünün veri bağlılığı incelenecektir. $H_1 \in (C[\alpha,\beta]^2 \times X^2, X)$

ve $c_1 \in C([\alpha,\beta],X)$ olmak üzere, aşağıda verilen integral denklemi göz önüne alalım:

$$S(z(v)) = \int_a^b H_1\left(v,p,z(p),z\big(f(p)\big)\right)dp + c_1(v) \qquad v \in [\alpha,\beta] \tag{3.5}$$

(2.3) ile verilen iterasyon algoritması sırasıyla A(2.2) ve S (3.5) operatörleri ile yeniden inşa edilirse

$$\begin{cases} x_{n+1} = \int_a^b H\left(v,p,y_n(p),y_n\big(f(p)\big)\right)dp + c(v) \\ y_n = (1-\alpha_n)z_n + \alpha_n\left[\int_a^b H\left(v,p,z_n(p),z_n\big(f(p)\big)\right)dp + c(v)\right] \\ z_n = \int_a^b H\left(v,p,x_n(p),x_n\big(f(p)\big)\right)dp + c(v) \end{cases} \tag{3.6}$$

ve

$$\begin{cases} u_{n+1} = \int_a^b H_1\left(v,p,v_n(p),v_n\big(f(p)\big)\right)dp + c_1(v) \\ v_n = (1-\alpha_n)w_n + \alpha_n\left[\int_a^b H_1\left(v,p,w_n(p),w_n\big(f(p)\big)\right)dp + c_1(v)\right] \\ w_n = \int_a^b H_1\left(v,p,u_n(p),u_n\big(f(p)\big)\right)dp + c_1(v) \end{cases} \tag{3.7}$$

şeklinde olur.

Teorem 3.2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1]$ dizisi $\frac{1}{2} \leq \alpha_n$ şartını sağlasın. (3.6)'dan elde edilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini ve (3.7)'den elde edilen $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini göz önüne alalım. Kabul edelim ki

i. Teorem 3.1'in bütün koşulları sağlanmakla birlikte (2.2) ve (3.5) ile verilen integral denklemlerin çözümleri sırasıyla x_* ve u_* olsun.

ii. Her $v,p \in [\alpha,\beta]$ için $\|H(v,p,x,y) - H_1(v,p,x,y)\| \leq \varepsilon_1$ ve $\|c(v) - c_1(v)\| \leq \varepsilon_2$ olacak şekilde ε_1 ve ε_2 sabitleri mevcut olsun.

Eğer $n \to \infty$ için $u_n \to u_*$ ise, bu durumda

$$\|x_* - u_*\| \leq \frac{5[\varepsilon_1(b-a)+\varepsilon_2]}{1-(L_1+L_2)(b-a)} \tag{3.8}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat.(2.2), (2.3), (3.5), (3.6), (3.7) ve i-ii kabulleri göz önüne alındığında

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\|$$

$$= \left\|\left[\int_a^b H\left(v,p,y_n(p),y_n\big(f(p)\big)\right)dp + c(v)\right] - \left[\int_a^b H_1\left(v,p,v_n(p),v_n\big(f(p)\big)\right)dp + c_1(v)\right]\right\|$$

$$\leq \left\|\left[\int_a^b H\left(v,p,y_n(p),y_n\big(f(p)\big)\right)dp + c(v)\right] - \left[\int_a^b H\left(v,p,v_n(p),v_n\big(f(p)\big)\right)dp + c(v)\right]\right\| \tag{3.9}$$

$$+\left\|\left[\int_a^b H\left(v,p,v_n(p),v_n\big(f(p)\big)\right)dp+c(v)\right]\right.$$

$$\left.-\left[\int_a^b H_1\left(v,p,v_n(p),v_n\big(f(p)\big)\right)dp+c_1(v)\right]\right\|$$

$$\leq \int_a^b \left\|H\left(v,p,y_n(p),y_n\big(f(p)\big)\right)-H(v,p,v_n(p),v_n(f(p)))\right\|dp$$

$$+\int_a^b \left\|H\left(v,p,v_n(p),v_n\big(f(p)\big)\right)-H_1(v,p,v_n(p),v_n(f(p)))\right\|dp$$

$$+\|c(v)-c_1(v)\|$$

$$\leq \int_a^b [L_1\|y_n-v_n\|+L_2\|y_n-v_n\|]\,dp+\int_a^b \varepsilon_1 dp+\varepsilon_2$$

$$=(L_1+L_2)(b-a)\|y_n-v_n\|+\varepsilon_1(b-a)+\varepsilon_2$$

ve

$$\|y_n-v_n\|\leq(1-\alpha_n)\|z_n-w_n\|+\alpha_n\|Az_n-Sw_n\|$$

$$\leq(1-\alpha_n)\|z_n-w_n\|$$

$$+\alpha_n\left\|\left[\int_a^b H\left(v,p,z_n(p),z_n\big(f(p)\big)\right)dp+c(v)\right]\right.$$

$$\left.-\left[\int_a^b H\left(v,p,w_n(p),w_n\big(f(p)\big)\right)dp+c(v)\right]\right\|$$

$$+\alpha_n\left\|\left[\int_a^b H\left(v,p,w_n(p),w_n\big(f(p)\big)\right)dp+c(v)\right]\right. \tag{3.10}$$

$$\left.-\left[\int_a^b H_1\left(v,p,w_n(p),w_n\big(f(p)\big)\right)dp+c_1(v)\right]\right\|$$

$$\leq(1-\alpha_n)\|z_n-w_n\|$$

$$+\alpha_n\int_a^b \left\|H\left(v,p,z_n(p),z_n\big(f(p)\big)\right)-H\left(v,p,w_n(p),w_n\big(f(p)\big)\right)\right\|dp$$

$$+\alpha_n\int_a^b \left\|H\left(v,p,w_n(p),w_n\big(f(p)\big)\right)-H_1\left(v,p,w_n(p),w_n\big(f(p)\big)\right)\right\|dp$$

$$+\alpha_n\|c(v)-c_1(v)\|$$

$$\leq(1-\alpha_n)\|z_n-w_n\|$$

$$+\alpha_n \int_a^b [L_1\|z_n - w_n\| + L_2\|z_n - w_n\|]\, dp + \alpha_n \int_a^b \varepsilon_1 dp + \alpha_n \varepsilon_2$$

$$= [1 - \alpha_n(1 - (L_1 + L_2)(b-a))]\|z_n - w_n\| + \alpha_n \varepsilon_1 (b-a) + \alpha_n \varepsilon_2$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\|z_n - w_n\| &= \left\| \left[\int_a^b H\left(v,p,x_n(p),x_n\big(f(p)\big)\right) dp + c(v)\right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\int_a^b H_1\left(v,p,u_n(p),u_n\big(f(p)\big)\right) dp + c_1(v)\right] \right\| \\
&\le \left\| \left[\int_a^b H\left(v,p,x_n(p),x_n\big(f(p)\big)\right) dp + c(v)\right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\int_a^b H\left(v,p,u_n(p),u_n\big(f(p)\big)\right) dp + c(v)\right] \right\| \qquad (3.11) \\
&\quad + \left\| \left[\int_a^b H\left(v,p,u_n(p),u_n\big(f(p)\big)\right) dp + c(v)\right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\int_a^b H_1\left(v,p,u_n(p),u_n\big(f(p)\big)\right) dp + c_1(v)\right] \right\| \\
&\le \int_a^b \left\| H\left(v,p,x_n(p),x_n\big(f(p)\big)\right) - H(v,p,u_n(p),u_n(f(p))) \right\| dp \\
&\quad + \int_a^b \left\| H\left(v,p,u_n(p),u_n\big(f(p)\big)\right) - H_1(v,p,u_n(p),u_n(f(p))) \right\| dp \\
&\quad + \|c(v) - c_1(v)\| \\
&\le \int_a^b [L_1\|x_n - u_n\| + L_2\|x_n - u_n\|]\, dp + \int_a^b \varepsilon_1 dp + \varepsilon_2 \\
&= (L_1 + L_2)(b-a)\|x_n - u_n\| + \varepsilon_1(b-a) + \varepsilon_2
\end{aligned}$$

şeklinde olup, sırasıyla (3.11) eşitsizliği (3.10)'da ve (3.10) eşitsizliği de (3.9)'da yerine yazılıp $\delta = (L_1 + L_2)(b-a) < 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\le \delta^2[1 - \alpha_n(1-\delta)]\|x_n - u_n\| + \delta[1 - \alpha_n(1-\delta)]\varepsilon_1(b-a) \\
&\quad + \delta[1 - \alpha_n(1-\delta)]\varepsilon_2 + \delta\alpha_n\varepsilon_1(b-a) + \delta\alpha_n\varepsilon_2 + \varepsilon_1(b-a) + \varepsilon_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{2} \le \alpha_n$ ve $\delta = (L_1 + L_2)(b-a) < 1$ kabulleri son eşitsizliğe uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\le [1 - \alpha_n(1 - (L_1 + L_2)(b-a))]\|x_n - u_n\| \\
&\quad + 5\alpha_n\varepsilon_1(b-a) + 5\alpha_n\varepsilon_2 \qquad (3.12) \\
&= [1 - \alpha_n(1 - (L_1 + L_2)(b-a))]\|x_n - u_n\| \\
&\quad + \alpha_n(1 - (L_1 + L_2)(b-a)) \frac{5[\varepsilon_1(b-a) + \varepsilon_2]}{1 - (L_1 + L_2)(b-a)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\beta_n = \|x_n - u_n\|$$

$$\mu_n = \alpha_n(1-(L_1+L_2)(b-a)) \in (0,1)$$

$$\gamma_n = \frac{5[\varepsilon_1(b-a)+\varepsilon_2]}{1-(L_1+L_2)(b-a)} \geq 0$$

şeklinde seçelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{2} \leq \alpha_n$ olması $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla (3.12) ile verilen eşitsizlik Lemma 2.3'ün koşullarını sağlar. Bu nedenle

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n - u_n\| \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{5[\varepsilon_1(b-a)+\varepsilon_2]}{1-(L_1+L_2)(b-a)}$$

elde edilir. $n \to \infty$ için $x_n \to x_*$ ve $u_n \to u_*$ olduğundan

$$\|x_* - u_*\| \leq \frac{5[\varepsilon_1(b-a)+\varepsilon_2]}{1-(L_1+L_2)(b-a)}$$

eşitsizliği elde edilir.

Örnek 3.3 $[0,1]$ aralığında tanımlı tüm sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı $C[0,1]$

olmak üzere, bu küme üzerinde $\|x-y\| = max_{v\in[0,1]}|x(v)-y(v)|$ Chebyshev normu tanımlı olsun. $(C[0,1], \|.\|)$ bir Banach uzayıdır. Aşağıda verilen integral denklemi göz önüne alalım:

$$u(v) = \int_0^1 [\frac{5p-4v}{3} + \frac{\sin u(p)+u(p)}{8}]\, dp + \frac{2\cos v+1}{100}, v \in [0,1]$$

burada

- $H \in C([0,1]^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ve $H(v,p,x,y) = \frac{5p-4v}{3} + \frac{sinx+y}{8}$ şeklinde tanımlıdır.
- $f \in C([0,1],[0,1])$ ve $f(p) = p$ şeklinde tanımlıdır.
- $c \in C([0,1],\mathbb{R})$ ve $c(v) = \frac{2\cos v+1}{100}$ şeklinde tanımlıdır.

$A: C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ olmak üzere

$$A\big(u(v)\big) = \int_0^1 [\frac{5p-4v}{3} + \frac{\sin u(p)+u(p)}{8}]\, dp + \frac{2\cos v+1}{100} \qquad (3.13)$$

operatörünü göz önüne alalım.

$$\big|A\big(u(v)\big) - A\big(y(v)\big)\big| = \left|\int_0^1 \frac{\sin u(p) - siny(p) + u(p) - y(p)}{8} dp\right|$$

$$\leq \int_0^1 \frac{1}{8}|sinu(p) - siny(p)|\, dp + \int_0^1 \frac{1}{8}|u(p)-y(p)|\, dp$$

$$\leq \int_0^1 \frac{1}{8}|u(p)-y(p)|\,dp + \int_0^1 \frac{1}{8}|u(p)-y(p)|\,dp$$

şeklinde olup yukarıdaki eşitsizlik için Chebyshev normu uygulanırsa

$$\|A(u)-A(y)\| \leq \int_0^1 \frac{1}{8}\|u-y\|\,dp + \int_0^1 \frac{1}{8}\|u-y\|\,dp$$

$$= \frac{1}{4}\|u-y\|$$

elde edilir. Yani A bir $\frac{1}{4}$-büzülme dönüşümdür. Son eşitsizlikten $L_1 = L_2 = \frac{1}{8}$ olduğu açıktır. Şimdi aşağıda verilen integral denklemi göz önüne alalım:

$$z(v) = \int_0^1 \left[\frac{5p-4v}{3} + \frac{\sin u(p) + u(p)}{8} - p + \frac{1}{2}\right] dp + \frac{\cos v + 1}{100}, v \in [0,1]$$

$S: C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ olmak üzere

$$S(z(v)) = \int_0^1 \left[\frac{5p-4v}{3} + \frac{\sin u(p)+u(p)}{8} - p + \frac{1}{2}\right] dp + \frac{\cos v+1}{100} \qquad (3.14)$$

şeklinde tanımlanırsa S operatörünün de bir $\frac{1}{4}$-büzülme dönüşümü olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu denklemde

- $H_1 \in C([0,1]^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ve $H_1(v,p,x,y) = \frac{5p-4v}{3} + \frac{\sin x + y}{8} - p + \frac{1}{2}$ şeklinde tanımlıdır.
- $f \in C([0,1],[0,1])$ ve $f(p) = p$ şeklinde tanımlıdır.
- $c_1 \in C([0,1],\mathbb{R})$ ve $c_1(v) = \frac{\cos v+1}{100}$ şeklinde tanımlıdır.

(3.13) ve (3.14) ile verilen dönüşümler Teorem 3.1'in koşullarını sağladığından (2.3) ile verilen iterasyon algoritması bu dönüşümlerle yeniden inşa edildiğinde elde edilecek olan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri teklikle belirli olan x_* ve u_* çözümlerine sırasıyla yakınsayacaktır. Bu nedenle aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$|H(v,p,x,y) - H_1(v,p,x,y)| = \left|p - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2} = \varepsilon_1 \text{ ve}$$

$$|c(v) - c_1(v)| = \left|\frac{2\cos v + 1}{100} - \frac{\cos v + 1}{100}\right| \leq \frac{1}{100}|\cos(v)| \leq \frac{1}{100} = \varepsilon_2$$

Dolayısıyla Teorem 3.2'nin tüm koşulları sağlanmış olur. O halde (3.8) eşitsizliğinden

$$\|x_* - u_*\| \leq \frac{5\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{100}\right]}{1-\frac{1}{4}} = 3.4$$

elde edilir.

SONUÇ

Bu çalışmada herhangi bir Banach uzayında uygun şartlar altında bir fonksiyonel integral denklem sınıfının teklikle belirli olan çözümüne üç adımlı bir sabit nokta iterasyon algoritmasıyla daha hızlı ulaşılabileceği ispatlanmıştır. Bunun yanında bu çözümün veri bağlı olduğu gösterilerek bir örnekle bu sonuç desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

Atalan Y, Karakaya V, 2017. Iterative Solution of Functional Volterra-Fredholm Integral Equation with Deviating Argument. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 18(4): 675-684.

Atalan Y, 2018. Yeni Bir İterasyon Yöntemi İçin Hemen-Hemen Büzülme Dönüşümleri Altında Bazı Sabit Nokta Teoremleri. Marmara Fen Bilimleri Dergisi, 30(3): 276-285.

Appell J, Kalitvin A.S, 2006. Existence results for integral equations: Spectral methods vs. Fixed point theory. Fixed Point Theory, 7(2): 219-234.

Berinde V, 2010. Existence and Approximation of Solutions of Some First Order İterative Differential Equations. Miskolc Math. Notes, 11(1): 13-26.

Chugh R, Kumar V, Kumar S, 2012. Strong Convergence of a New Three Step Iterative Scheme in Banach Spaces, Amer. J. Comput. Math., 2 (04): 345-357.

Dobritoiu M, 2008. System of Integral Equations with Modified Argument. Carpathian J. Math, 24(2): 26-36.

Gürsoy F, 2016. A Picard-S Iterative Method for Approximating Fixed Point of Weak-Contraction Mappings, Filomat, 30(10): 2829-2845.

Ishikawa S, 1974. Fixed Points by a New Iteration Method, Proc. Amer. Math. Soc., 44(1): 147-150.

Karakaya V, Atalan Y, Dogan K, Bouzara NEH, 2017. Some Fixed Point Results for a New Three Steps Iteration Process in Banach Spaces, Fixed Point Theory, 18(2): 625-640.

Khuri S.A, Sayfy,A, 2015. A Novel Fixed Point Scheme: Proper Setting Of Variational İteration Method for BVPs. Appl. Math. Lett, 48: 75-84.

Lauran M, 2011. Existence Results for Some Differential Equations with Deviating Argument. Filomat, 25(2): 21-31.

Mann W.R, 1953. Mean Value Methods in Iteration. Proc. Amer. Math. Soc., 4(3): 506-510.

Noor M.A, 2000. New Approximation Schemes for General Variational Inequalities, J. Math. Anal. Appl., 251: 217-229.

Pascale E De, Zabreiko P.P, 2004. Fixed Point Theorems for Operators in Spaces of Continuous Functions. Fixed Point Theory, 5(1): 117-129.

Petrusel A, Rus I, 2018. A Class of Functional-Integral Equations via Picard Operator Technique. Annals of the Academy of Romanian Scientists: Series on Mathematics and its Applications, 10(1): 15-24.

Phuengrattana W, Suantai S, 2011. On the Rate of Convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP Iterations for Continuous Functions on an Arbitrary Interval, J. Comput. Appl. Math, 235(9): 3006-3014.

Picard E, 1890. Mémoire Sur la Théorie des Equations aux Dérivées Partielles et la Méthode des Approximations Successives, J. Math. Pure. Appl., 6: 145-210.

Sahu D.R, 2011. Applications of S iteration Process to Constrained Minimization Problems and Split Feasibility Problems, Fixed Point Theory, 12(1): 187-204.

Şahin A, Başarır M, 2016. Convergence and Data Dependence Results of An Iteration Process in A Hyperbolic Spaces, Filomat, 30(3): 569-582.

Şahin A, Kalkan Z, Arısoy H, 2017. On The Solution of A Nonlinear Volterra Integral Equation with Delay. Sakarya University Journal of Science, 21(6): 1367-1376.

Şoltuz S.M, Grosan T, 2008. Data Dependence for Ishikawa Iteration when Dealing with Contractive Like Operators. Fixed Point Theory and Applications, 2008(1): 1-7.

Weng X, 1991. Fixed Point Iteration for Local Strictly Pseudo-Contractive Mapping. Proceedings of the American Mathematical Society, 113(3): 727-731.