

**ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN
KESİRLERLE ÇIKARMA İŞLEMİNE YÖNELİK PROBLEM
KURMA BECERİLERİNİN İNCELENMESİ**

**Investigating Middle School Mathematics Teachers' Problem
Posing Ability in the Context of Subtraction Operation with
Fractions**

Tuğrul KAR¹

Ahmet IŞIK²

Öz

Bu araştırmada, ortaokul matematik öğretmenlerinin kesirlerle çıkarma işlemine yönelik kurdukları problemlerdeki hataların ve bu hatalara yönelik görüşlerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Araştırma, Erzurum merkezde görev yapan yedi ortaokul matematik öğretmeniyle yürütülmüştür. Kesirlerle çıkarma işlemine yönelik hazırlanan Problem Kurma Testi ve öğretmenlerle yürütülen odak-grup görüşme sürecinin video kayıtları, veri toplama araçlarını oluşturmuştur. Öğretmenlerin kurdukları problemlerde sekiz hata türü tespit edilmiştir. Kurulan problemlerde, kesir sayılarının farklı bütünler üzerinden ifade edilmesi, mantıksal hata ve birim kargaşası şeklindeki hatalar ön plana çıkarılmıştır. Bunun yanında öğretmenlerin hatalara yönelik yaptıkları açıklamalarda farklı hatalar sergiledikleri de tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ortaokul matematik öğretmenleri, kesirlerle çıkarma işlemi, problem kurma.

DOI: 10.14582/DUZGEF.496

¹ Dr.; Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Erzurum, tugrulkar@atauni.edu.tr

² Prof. Dr.; Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Erzurum, isik@atauni.edu.tr

Abstract

In this study, it was aimed to determine the errors in the problems posed by middle school mathematics teachers for the subtraction operation with fractions and their opinions about these errors. The study was conducted with seven middle school mathematics teachers working in the city center of Erzurum province. The Problem Posing Test prepared for subtraction operations with fractions and the video records of the focus group interviews used as data collection tools. Eight types of errors were determined in the problems posed. The most frequent error types made by middle school mathematics teachers are as follows: expressing the fractions over the different wholes, logical errors and confusion about units. Additionally middle school mathematics teachers made different errors in explaining the errors.

Key words: *Middle school mathematics teachers, subtraction operation with fractions, problem posing.*

Giriş

Matematik eğitimi araştırmalarında problem kurma son yıllarda giderek artan bir ilgiyle karşı karşıya kalmıştır. Problem kurmanın kavramsal anlama becerisini geliştirmesi (Cankoy & Darbaz, 2010; Toluk-Uçar, 2009), problem çözme ve yaratıcılık becerileriyle ilişkili olması (Cai & Hwang, 2002; Silver, 1994) bu ilginin nedenleri arasında yer almaktadır. Problem kurmaya duyulan ilgi, öğretim programlarında veya öğretim programlarına rehberlik eden dokümanlarda da görülmektedir. Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000), öğrencilere kendi problemlerini kurmaları için fırsatların verilmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Bunun yanında, problem kurmanın Polya'nın problem çözme basamaklarının beşinci adımı olarak tanımlanması (Gonzalez, 1998), Ortaokul Matematik dersi 5-8. Sınıflar Öğretim Programı'nda (MEB, 2013) da benimsenmiştir.

Problem kurma, öğrencilerin verilen bir duruma yönelik beceri, tutum ve kavramsal öğrenmeleri hakkında öğretmenlere fikir vermektedir (Lavy & Shriki, 2007). Stoyanova (1998), öğrencilerin kurdukları problemlerin matematiksel yetenekleri hakkında önemli ipuçları sunduğuna yönelik araştırmacılar arasında fikir birliği olduğunu vurgulamıştır. Ticha ve Hospesova (2009) ise, problem kurmanın kavram yanılgıları veya hataların nedenlerini keşfetmek için değerlendirme aracı olarak kullanılabilceğini belirtmiştir. Problem kurma sadece öğrencilerin değil, öğretmen adayları veya öğretmenlerin matematiksel bilgi ve becerilerinin belirlenmesi amacıyla da kullanılmaktadır (Işık & Kar, 2012a; Kılıç, 2013; McAllister & Beaver, 2012).

Problem kurma veya oluşturma, verilen bir durum hakkında incelenecek veya keşfedilecek soruları ve yeni problemler üretmeyi içerir (Akay, 2006). NCTM'ye (2000) göre ise, verilen bir durum ya da deneyimden yeni bir problem oluşturmaktır. Genel olarak problem kurma, yeni problemler üretme veya mevcut bir problemi yeniden biçimlendirmek şeklinde ifade edilebilir. Literatürde problem kurma etkinliklerine yönelik değişik çerçeveler sunulmuştur (Christou, Mousoulides, Pittalis, Pantazi-Pitta & Sriraman, 2005; Contreras, 2007; Stoyanova & Ellerton, 1996). Bununla birlikte Stoyanova ve Ellerton (1996) tarafından önerilen, yapılandırılmış, yarı-yapılandırılmış ve serbest şeklindeki sınıflandırma çalışmalarda en yaygın olarak kullanılanıdır. Yapılandırılmış problem kurmada öğretmenler, özel problem çözme stratejileri geliştirir ve öğrencilerinden, bu stratejileri çözümünde kullanmayı gerektirecek problemler kurmalarını isterler. Yarı-yapılandırılmış problem kurmada öğrencilere açık-uçlu bir durum

verilir. Öğrencilerden bilgi, beceri ve deneyimlerini kullanarak açık uçlu durumu problem olacak şekilde tamamlamaları istenir. Bir resim, denklem veya açık-uçlu sözel hikayelere yönelik problem kurma etkinlikleri bu kategoride yer almaktadır (Örn., $\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = ?$ işlemiyle çözülebilecek bir problem kurunuz gibi). Serbest problem kurmada ise, öğrencilere problem verilmez. Öğrencilerden, sınırlandırma olmaksızın verilen doğal duruma uygun problemler kurmaları istenir (Örn., para problemi kurunuz gibi).

Son on yılda yapılan çalışmalar, öğrenciler, öğretmenler veya öğretmen adaylarının kesirlerle toplama veya çıkarma işlemlerine yönelik problem kurmada birçok hata sergilediklerini göstermektedir. Bu tür çalışmalar iki bölüme ayrılabilir; i) öğretmen veya öğretmen adaylarının, öğrencilerin kurdukları problemlerdeki hataları belirleyebilme ve nedenlerini açıklayabilme becerilerinin incelenmesi (Örn., Işık, Öcal & Kar, 2013; Işık, Kar, Işık & Güler, 2012; Ward & Thomas, 2007), ii) öğrenci veya öğretmen adaylarının kurdukları problemlerdeki hataların tespit edilmesi (Örn., Işık & Kar, 2012b, 2012c; McAllister & Beaver, 2012; Osana & Royea, 2011; Toluk-Uçar, 2009).

Birinci bölüme yönelik yapılan çalışmalarda, öğretmen veya öğretmen adaylarına öğrencilerin kurdukları hatalı problemler sunulmaktadır. Katılımcılardan problemlerdeki hataları tespit etmeleri ve hataların nedenlerini açıklamaları istenmektedir. Işık ve arkadaşları (2013) sınıf öğretmeni adaylarına, beşinci sınıf öğrencilerinin kesirlerle toplama işlemine yönelik kurdukları hatalı problemleri sunmuşlardır. Araştırmacılar, öğretmen adaylarının kesir sayılarını uygun birimlerle ifade edememe ve parça-bütün ilişkisini kuramama hatalarını tespit

etmede daha fazla güçlük yaşadıklarını belirtmişlerdir. Benzer bir araştırma Işık ve arkadaşları (2012) tarafından ilköğretim matematik öğretmen adaylarıyla yürütülmüştür. Öğretmen adaylarından, tamsayılı kesir ile bir basit kesrin toplamına yönelik kurulan problemlerdeki hataları belirlemeleri istenmiştir. Araştırmacılar, öğretmen adaylarının kesir sayılarını uygun birimle ifade edememe ve parça-bütün ilişkisini kuramama hatalarını tespit etmede daha fazla güçlük yaşadıklarını belirtmişlerdir. Bunun yanında adayların hatalara yönelik açıklamalarında farklı hatalar sergiledikleri de tespit edilmiştir. Ward ve Thomas (2007) ise, ilköğretim matematik öğretmenlerinden $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{5}{8}$ işlemi için yapılan *oyunun ilk yarısında beş atışın üçünü gole çevirdim, ikinci yarı da ise üç atışın ikisini gole çevirdim. Toplamda atışların sekizde beşini gole çevirdim* şeklindeki açıklamayı değerlendirmeleri istenmiştir. Araştırmacılar, öğretmenlerin %66'sının yapılan açıklamanın yanlış olduğunu belirleyebildiğini, buna karşın sadece %9'unun, hatanın nedenine yönelik kavramsal açıklama yapabildiğini tespit etmişlerdir.

İkinci bölüme yönelik yapılan çalışmalarda ise, öğrenci veya öğretmen adaylarının kurdukları problemlerdeki hatalar tespit edilmektedir. Işık ve Kar (2012b), ilköğretim yedinci sınıf öğrencilerinin kesirlerle toplama işlemine yönelik kurdukları problemlerdeki hataları analiz etmişlerdir. Öğrencilerin kurdukları problemlerde tespit edilen hata türleri şunlardır; i) *toplanan ikinci kesri bütünün kalanı üzerinden ifade etme*, ii) *parça-bütün ilişkisini kuramama*, iii) *işlem sonucuna doğal sayı anlamı yükleme*, iv) *birim kargaşası*, v) *toplanan kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme*, vi) *işlemi soru köküne yansıtamama* ve vii) *tamsayılı kesirlerin tam*

kısımlarına anlam yükleyememe. Araştırmacılar iki, üç ve dördüncü hataların sıklıkla yapılan hata türleri olduğunu belirtmişlerdir. Kar ve Işık (2014a) ise ortaokul yedinci sınıf öğrencilerinin kesirlerle çıkarma işlemine yönelik kurdukları problemlerdeki hataları analiz etmişlerdir. Kesirlerle toplama işlemine yönelik tespit edilen hata türleri yanında öğrencilerin kurdukları problemlerde beş farklı hata türü daha belirlemişlerdir. Bu hata türleri şunlardır: i) işlem sonucunda oluşan tamsayı kesrin kaçta kaç ifadesi ile açıklanması, ii) bütüne değer atama, iii) çıkan kesri, eksilen kesrin belli bir miktarı anlamıyla ele alma, iv) mantık hatası ve v) kesir sayılarını farklı bütünler üzerinden ifade etme.

Toluk-Uçar (2009), sınıf öğretmeni adaylarının kesirlerle toplama yerine doğal sayılarla toplama işlemine yönelik problemler kurduklarını ve kesirleri miktar yerine parça sayısı şeklinde düşündüklerini tespit etmiştir. Osana ve Royea (2011) ise sınıf öğretmeni adaylarının, problem kurulması istenen işlem yerine farklı işlemlere yönelik problemler kurduklarını, çözüme yönelik yeterli bilgiye yer veremediklerini ve yanıtları soru kökü içerecek şekilde tamamlamadıklarını tespit etmişlerdir. McAllister ve Beaver (2012) ise, sınıf öğretmeni adaylarının kesirlerle işlemlere yönelik kurdukları problemlerdeki hataları analiz etmişlerdir. Araştırmacılar, günlük yaşam durumlarıyla ilişkili problemler yazamama, kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme, mantıksal olarak geçersiz problemler yazma hatalarının daha fazla ön plana çıkarıldığını belirtmişlerdir. Ayrıca araştırmacılar, bu tür hataların bütün işlemlerde ortak olarak görüldüğünü de vurgulamışlardır.

Yukarıda belirtilen literatür dikkate alındığında, kesirlerle toplama işlemine yönelik kurulan problemlerdeki hata analizlerine daha fazla yer verildiği anlaşılmaktadır. Bunun yanında çalışmaların katılımcılarını ise ağırlıklı olarak öğrenci veya öğretmen adaylarının oluşturduğu görülmektedir. Buna karşın matematik öğretmenlerinin, kesirlerle çıkarma işlemine yönelik problem kurma becerilerini araştıran bir çalışma ile karşılaşmamıştır. Öğretmenlerin sınıf ortamına getirdikleri problem durumları, öğrenciler için açık ya da kapalı bir dizi öğrenme fırsatı içermektedir (Crespo & Sinclair, 2008). Gonzales (1998) ise problem kurmanın sınıf ortamına aktarılmasının, öğrencilere doğru problem kurmada ve keşfetmede yapılacak olan rehberliğe bağlı olduğunu belirtmiştir. Derslerde öğrenciler için problemler kurulacağı ve öğrencilerin kuracakları problemlere dönütler verileceği de dikkate alındığında, öğretmenlerin kurulan problemlerdeki hatalara yönelik görüşlerinin tespit edilmesi önemlidir. Bu bağlamda, araştırmada ortaokul matematik öğretmenlerinin kesirlerle çıkarma işlemine yönelik kurdukları problemlerdeki hataların ve bu hatalara yönelik görüşlerinin belirlenmesi amaçlanmıştır.

Yöntem

Araştırmada, nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması modeli esas alınmıştır. Creswell (2007) durum çalışmasını, araştırmacının zaman içerisinde sınırlandırılmış bir veya birkaç durumu çoklu kaynakları içeren veri toplama araçları ile derinlemesine incelediği araştırma yaklaşımı olarak tanımlamıştır. Bu araştırmada ortaokul matematik öğretmenlerinin problem kurma becerilerinin incelenmesi, kesirlerle çıkarma işlemiyle sınırlandırılmıştır. Bunun yanında araştırmada video kaydı ve açık-uçlu testlerin uygulanması gibi

farklı veri toplama araçları yardımıyla öğretmenlerin problem kurma becerilerinin derinlemesine analiz edilmesi amaçlandığından, durum çalışması modeli esas alınmıştır.

Çalışma Grubu

Araştırmaya katılacak olan öğretmenlerin belirlenmesinde, amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme modeli esas alınmıştır. Ortaokul ikinci sınıfta* öğretim yapmış olmak ve problem kurma etkinliklerini kullanmış olmak, katılımcıların belirlenmesinde ölçüt olarak alınmıştır. Erzurum merkezde görev yapan ve bu şartları sağlayan yedi öğretmen araştırmaya katılmayı kabul etmişlerdir. Araştırmada öğretmenlere verilen takma adlar şunlardır; Kamil, Hasan, Hilal, Gürsel, Ercan, Kevser ve Büşra. Araştırmacıya ise A şeklinde kod atanmıştır. Kamil, Hilal ve Hasan sırasıyla beş, altı ve dokuz yıldır, Gürsel, Ercan, Kevser ve Büşra ise bir yıldır öğretmenlik yapmaktadırlar. Hilal ve Hasan yüksek lisans eğitimini tamamlamışlardır. Kevser ve Büşra ise, matematik eğitime yönelik yüksek lisans öğrenimlerine devam etmektedirler.

Verilerin Toplanması ve Analizi

Araştırmada veri çeşitlemesi yoluna gidilmiştir. Nitel araştırmalarda veri çeşitlemesi, geçerliği artıran önemli bir faktördür (Yin, 2011). Araştırmada kullanılan veri toplama araçları şunlardır; i) kesirlerle çıkarma işlemine yönelik hazırlanan PKT ve ii) odak-grup görüşme sürecinin video kayıtları.

Kesirlerle çıkarma işlemine yönelik hazırlanan PKT, Kar ve Işık (2014a) tarafından yapılan çalışmadan alınmıştır. PKT'de tamsayı

* Ortaokul Matematik Dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı'nda (MEB, 2013) altıncı sınıf olarak belirtilen düzey, bu araştırmada *ortaokul ikinci sınıf* şeklinde ifade edilmiştir.

kesirden basit kesrin çıkarılmasına yönelik iki maddeye yer verilmiştir. Bu maddelerden birincisinde fark basit kesir, ikincisinde ise tam sayılı kesirdir. Bunun yanında PKT’de, bir basit kesirden bir basit kesrin ve bir tam sayılı kesirden bir tam sayılı kesrin çıkarılmasına yönelik birer maddeye de yer verilmiştir. Testte yer alan kesir işlemleri ve özellikleri Tablo 1’de sunulmuştur.

Tablo 1. PKT’de çıkarma işlemine yönelik yer alan maddeler ve özellikleri

Maddeler	Özellikleri
$\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = ?$	Basit kesirden bir basit kesrin çıkarılması
$1\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = ?$	Farkın basit kesir olduğu, tam sayılı kesirden basit kesrin çıkarılması
$2\frac{7}{8} - \frac{2}{5} = ?$	Farkın tam sayılı kesir olduğu, tam sayılı kesirden basit kesrin çıkarılması
$2\frac{3}{4} - 1\frac{5}{8} = ?$	İki tam sayılı kesrin çıkarılması

Literatürde araştırmacıların kesirlerle işlemlere yönelik problem kurma sürecinde bu tür işlemlerden yararlandıkları da tespit edilmiştir (Örn., McAllister & Beaver, 2012; Osana & Royea, 2011; Toluk-Uçar, 2009). Ayrıca bu tür işlemlere yönelik problem kurma ve çözme etkinlikleri, Ortaokul Matematik dersi 5-8. Sınıflar Öğretim Programı’nda (MEB, 2013) da vurgulanmaktadır. PKT bir ders saatinde öğretmenlere uygulanmıştır. Öğretmenlerden verilen her bir işleme yönelik günlük yaşam durumlarıyla ilişkili, çözümüne sadece verilen işlemlerle ulaşılabilecek, iki sözel problem kurmaları istenmiştir.

Kesirlerle çıkarma işlemine yönelik yürütülen odak-grup görüşme sürecinin video kaydı yapılmıştır. Yapılan odak-grup görüşme süreci yaklaşık bir saat 30 dakika sürmüştür. Daha sonra video kaydı

yazıya dökülmüştür. Öğretmenlerin kurdukları problemler ve odak-grup görüşmesi süreci, iki araştırmacı tarafından analiz edilmiş ve daha sonra yapılan analizler karşılaştırılmıştır. Böylece tespit edilen hata türlerinin sınıflandırılması üzerinde fikir birliği sağlanmıştır. Öğretmenlerin PKT'ye verdikleri yanıtlarda sekiz hata türü belirlenmiştir. Bu hata türleri şunlardır; i) çıkan kesir sayısını, bütünün kalanı üzerinden ifade etme [Hata 1(H_1)], ii) eksilen kesir sayısına anlam yükleyememe (H_2), iii) kesir sayılarını farklı bütünlere üzerinden ifade etme (H_3), iv) çıkan kesri, eksilen kesrin belli bir miktarı anlamıyla ele alma (H_4), v) $\frac{3}{4}$ kesir sayısının “çeyrek” şeklinde ifade edilmesi (H_5), vi) mantıksal hata (H_6), vii) birim kargaşası (H_7) ve viii) eksik veri içerme (H_8). Öğretmenlerin kurdukları problemlerde birden fazla hata türü aynı anda bulunabilmektedir. Bu hata türlerine ait açıklamalar bulgular kısmında sunulmuştur.

Kurulan problemlerde belirlenen hata türleri, literatürde farklı çalışmalarda farklı isimler altında belirtilmiştir (Işık & Kar, 2012b, Işık ve diğ., 2013; Kar, 2014; Kar & Işık, 2014a, 2014b; Luo, 2009; McAllister & Beaver, 2012; Ticha & Hospesova, 2009; Toluk-Uçar, 2009; Zembat, 2007). Dolayısıyla problemlerdeki hatalar, literatürde belirlenen hata kategorileri dikkate alınarak betimsel analiz yöntemiyle çözümlenmiştir. Örneğin, McAllister ve Beaver (2012) sınıf öğretmeni adaylarının $a - b$ işlemi yerine axb işlemini gerektiren problemler kurduklarını tespit etmişlerdir. Bu hata türü, bu araştırmadaki H_4 hatasına karşılık gelmektedir. Bir başka çalışmada Ticha ve Hospesova (2009) öğretmen adaylarının kesir sayıları için “... Gabriel $\frac{1}{4}$ içmiştir...” şeklinde ifadelerle yer verdiklerini belirlemiştir. Yazılan ifadede $\frac{1}{4}$ kesir sayısı birim kullanılmadan ifade edildiğinden, neyi temsil ettiği belli

değildir. Bu hata türü, bu araştırmadaki H_7 hatasına karşılık gelmektedir. Odak-grup görüşmelerinin video kayıtları, betimsel analiz yöntemiyle çözümlenmiştir. Bu süreçte yapılan tartışmalara yönelik doğrudan alıntılara sıklıkla yer verilmiştir.

Kesirlerle Çıkarma İşlemine Yönelik Yürütülen Odak-Grup Görüşme süreci

Problem Kurma Testi (PKT) öğretmenlere uygulanmış ve kurulan problemler iki araştırmacı tarafından analiz edilmiştir. Hatalı problemler, odak-grup görüşmesi sürecinde tartışmaya açılmıştır. Odak-grup görüşmesi sürecine başlamadan önce öğretmenlerle tanışma toplantısı yapılmıştır. Bu toplantıda, süreçten elde edilecek verimi arttırmak ve samimi bir ortam oluşturabilmek için neler yapılabileceğine yönelik öğretmenlerin görüşleri alınmıştır. Bu görüşler doğrultusunda her bir üyenin kurduğu problemi ve problemlere yönelik görüşlerini özgürce paylaşabilmeleri gerektiği ile problemlerde hatalar olabileceği ve bu durumun sürecin normal bir parçası olduğu üzerinde fikir birliğine varılmıştır. Ayrıca öğretmenlere araştırma raporunda, her bir üyenin isimlerinin kesinlikle gizli tutulacağı vurgulanmıştır. Öğretmenlerle yapılan tanışma toplantısının ardından odak-grup görüşmelerine geçilmiştir.

Nitel araştırmalarda araştırmanın amacı ve kapsamına bağlı olarak farklı görüşme türleri kullanılmaktadır. Creswell (2007) bire bir görüşmelerden yeterince bilginin çıkmayacağına yönelik tereddütler varsa ve katılımcılar arasındaki etkileşimin en iyi bilgiyi sunacağı düşünüüyorsa, odak-grup görüşmelerinin kullanılmasının uygun olduğunu vurgulamıştır. Bu araştırmada odak-grup görüşmelerinin tercih edilmesinin birden çok nedeni vardır. Birincisi, odak-grup

görüşmesi yardımıyla bir öğretmenin kurduğu problemlere diğer öğretmenlerin ne tür dönütler verdiklerinin de tespit edilebileceği düşünülmüştür. Böylece, öğretmenlerin kurulan problemlere yönelik açıklamalarının kavramsal boyutu daha iyi şekilde analiz edilebilecektir. İkincisi, bu araştırmayı yapan araştırmacılardan birisi doktora tez çalışmasında kesirlerle toplama işlemi üzerinden benzer bir süreci takip etmiştir. Bu süreçte bazı öğretmenlerin kurdukları problemlerde hata yapmadıkları, buna karşın odak-grup görüşmeleri sürecinde diğer öğretmenlerin açıklamalarından hareketle farklı hatalar sergiledikleri tespit edilmiştir. Bu deneyimlerin rehberliğinde odak-grup görüşmesinin kullanılmasının uygun bir yaklaşım olduğuna karar verilmiştir.

Odak-grup görüşme sürecinde öğretmenlerden problemleri kurarken nasıl düşündüklerini açıklamaları istenmiştir (Örn., Problem hakkında ne düşünüyorsunuz?). Daha sonra diğer öğretmenlerin kurulan problem ve yapılan açıklamalara yönelik görüşleri alınmıştır (Örn., Ercan'ın kurduğu problem ve yaptığı açıklamalar hakkında ne düşünüyorsunuz?). Bu süreçte öğretmenlerin açıklamalarında görülen hatalar, eğer grup tarafından belirtilmemiş ise, odak-grup görüşme sürecini yürüten araştırmacı tarafından tartışmaya açılmıştır. Araştırmacı, odak-grup görüşme sürecinin tamamında sürece rehberlik etme gayreti içerisinde olmuştur. Araştırmacının pozisyonu, mümkün olduğu kadar alternatif sorularla süreci yönlendirmek ve öğretmenlerin görüşlerini almaktır.

Bulgular

Öğretmenlerin PKT'ye verdikleri yanıtlarda tespit edilen sekiz hatanın dağılımına ait bulgular Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2. PKT'ye verilen yanıtlarda görülen hata türlerine ait dağılım

Maddeler	Hasan	Hilal	Kamil	Ercan	Gürsel	Büşra	Kevser	Toplam
Madde 1			H ₃	H ₁				2
		H ₂		H ₂			H ₃	3
Madde 2		H ₅		H ₄			H ₄	3
				H ₃				1
Madde 3		H ₇		H ₄	H ₆	H ₆		4
		H ₇ , H ₈		H ₃		H ₆	H ₃	5
Madde 4	H ₆	H ₇		H ₃				3
							H ₇	1
Toplam Hata sayısı	1	6	1	7	1	2	4	22

Tablo 2'ye göre, PKT'ye verilen 56 yanıtta toplam 22 hata tespit edilmiştir. Problem başına düşen hata ortalaması 0.39'dur. Hata türlerinin dağılımları dikkate alındığında, H₃, H₆ ve H₇ hatalarının diğer hata türlerine göre daha fazla görüldüğü de anlaşılmaktadır. Bunun yanında en fazla hata Ercan ve Hilal'in kurdukları problemlerde, en az hata ise Hasan, Kamil ve Gürsel'in kurdukları problemlerde görülmüştür.

Tablo 2'ye göre H₁ hatası, sadece Ercan'ın kurduğu problemde görülmüştür. Bu hata türünde eksilen kesir sayısı bir bütün üzerinden ifade edilmiştir. Çıkan kesir sayısı ise bütünü kalanı üzerinden ifade edilmiştir. Ercan'ın PKT'nin birinci maddesine kurduğu problem şu şekildedir; *Murat bilyelerinin yarısını oyun oynarken kaybetmiştir. Kalan bilyelerin $\frac{3}{8}$ 'ini arkadaşına verirse, başlangıçtaki duruma göre ne kadar bilyesi kalır?* Problemden, bilyelerin yarısının oyun oynarken kaybedildiği belirtilmiştir. Bu durumda geriye bilyelerin yarısı

kalacaktır. Problemin devamında, kalan bilyelerin $\frac{3}{8}$ 'inin de arkadaşına verildiği belirtilmiştir. Bu durumda problemin cevabı, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$ işlemiyle hesaplanacaktır. Problemden çıkan kesir sayısı, bütünü kalan kısmı üzerinden ifade edilerek hata yapılmıştır. Ercan'ın problemi nasıl kurduğuna yönelik açıklamaları şu şekildedir;

Murat bilyelerin yarısını oyun oynarken kaybetmiş. Yani bilyelerin $\frac{1}{2}$ 'si gitmiş. Geriye bilyelerin yarısı kaldı. “Kalan bilyelerin” ifadesiyle $\frac{1}{2}$ kesrini oluşturduğum. Problemden, “Murat kalan bilyelerin $\frac{3}{8}$ 'ini de arkadaşına verdi” ifadesiyle de $\frac{3}{8}$ kesrini oluşturduğum.

Ercan'ın açıklamaları dikkate alındığında, problemi kurarken öncelikle $\frac{1}{2}$ kesrini oluşturmaya çalışmıştır. $\frac{1}{2}$ kesir sayısını kaybedildikten sonra kalan bilye miktarı ifadesiyle temsil edilmiştir. Ercan $\frac{3}{8}$ kesir sayısını ise, *kalan bilyelerin $\frac{3}{8}$ 'i* ifadesiyle temsil etmiştir. Bu ifade ise $\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$ işlemini gerektirmektedir. Grup tartışması sürecinde Büşra, problemdeki bu hatanın, *kaybetmeden önceki bilyelerin $\frac{3}{8}$ 'i* şeklinde düzeltilebileceğini belirtmiştir. Bu ifadeyle, çözümde yer alan $\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$ işlemi düzeltilmiş olacaktır. Buna karşın, problemin giriş kısmında bilyelerin yarısının kaybedildiği belirtilmektedir. Bu ifadeden dolayı problemin çözümünde, $1 - \frac{1}{2}$ işlemi yapılacaktır. Dolayısıyla, Büşra tarafından yapılan düzeltme yeterli değildir. Hasan açıklamalarında bu durumu belirtmiştir. Hasan'ın görüşleri şu şekildedir; *problem hala verilen işleme uygun değil. Çünkü problemin giriş kısmındaki*

ifadelerden dolayı, çözümünde $1 - \frac{1}{2}$ işlemi yapılmalıdır. Bu işlemin ardından, $\frac{1}{2} - \frac{3}{8}$ işlemi yapılacaktır. Büşra sadece ikinci kısımdaki hatayı düzeltmiş. Bu görüş diğer öğretmenler tarafından da kabul edilmiştir.

Bu probleme yönelik yapılan tartışmalarda Gürsel, *ne kadar bilyesi kalır?* soru köküne verilecek yanıtın doğal sayı olacağını belirtmiştir. Buna karşın diğer öğretmenler, bu görüşe karşı çıkmışlardır. Grup içerisinde yapılan tartışmalar şu şekildedir;

Gürsel: *Ne kadar bilyesi kalır?* ifadesine kesir sayılarıyla cevap verilmez. Doğal sayılarla cevap verilir. Hata var burada.

Kevser: *Başlangıçtaki duruma göre ne kadar bilyesi kalır? demiş.*
Kalan bilye sayısının bütün ile olan ilişkisi sorulmuş. Bence soru kökü kesir sayısı ile cevaplanabilir.

Gürsel: Ne kadar bilyesi kalır? $\frac{5}{16}$ bilyesi kalır diyebilir miyiz?

Kevser: Burada bilye sayısı sorulmamış. Kalan bilye sayısının bütünün ne kadarı olduğu sorulmuş. Onun için diyebiliriz.

Tablo 2'ye göre H₂ hatası, Ercan ve Hilal'in kurduğu problemlerde görülmüştür. Bu hata türü, a ve b sırasıyla eksilen ve çıkan kesir sayılarını temsil etmek üzere, $a - b$ yerine $1 - b$ şeklinde yazılan problemleri kapsamaktadır. Hilal'in PKT'nin birinci maddesine yönelik kurduğu problem şu şekildedir; *bir karpuz yarıya bölünmüş ve $\frac{3}{8}$ 'i yenilmiştir. Geriye ne kadar karpuz kalmıştır?* Problemde geriye kalan karpuz miktarı, $1 - \frac{3}{8}$ işlemiyle hesaplanacaktır. Hilal'in probleme yönelik açıklamaları şu şekildedir; *bu problemde çok düşündüm. Karpuz yarıya bölünmüştür. Yarıya bölündükten sonra bir parçasından,*

bütün karpuzun $\frac{3}{8}$ 'i yeniliyor şeklinde söylemek istedim. Hilal, bütün karpuzun $\frac{3}{8}$ 'i yeniliyor ifadesiyle problemdeki hatanın düzeltilebileceğini belirtmiştir. Buna karşın, Hasan bu haliyle problemdeki hatanın giderilemeyeceğini belirtmiştir. Hasan'ın açıklamaları şu şekildedir; verilen işleme uygun olmaz. Çünkü bir karpuzun yarısından başlangıçtaki miktarın $\frac{3}{8}$ 'i yenirse, geriye kalan miktar $\frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - \frac{3}{8}) = \frac{5}{8}$ işlemiyle hesaplanır.

Tablo 2'ye göre H₃ hatası, Kamil, Kevser ve Ercan'ın kurduğu problemlerde görülmüştür. Bu hata türünde, eksilen ve çıkan kesir sayılarının ifade edildiği bütünlerin birbirine eşit olduğu ifade edilmemektedir. Kevser'in PKT'nin birinci maddesine yönelik kurduğu problem şu şekildedir; *Ali ödevinin $\frac{1}{2}$ 'sini, Zeynep ise ödevinin $\frac{3}{8}$ 'ini yapmıştır. Ali, Zeynep'ten ne kadar fazla ödev yapmıştır?* Tartışma sürecinde diğer öğretmenler bu hata türüne vurgu yapmışlardır. Grup içerisinde yapılan tartışmalar şu şekildedir;

A: Problem hakkında ne düşünüyorsunuz?

Kamil: Ödevler aynı mı?

Kevser Aynı.

:

Kamil: Ama problemde bu duruma yönelik açıklamalar yok.

Kevser İki ödev de aynı öğretmene ait.

:

Gürsel: Aynı öğretmene ait olduğu belirtilmemiş.

Kamil: Bizler ödevlerin eşit olduğunu düşünebiliriz. Ama öğrenci öyle anlamayabilir. Problem, çocuk için açık ve anlaşılır olmalı. Belirtilmesi gerekiyordu.

Hasan: Öğrenciler kurdukları problemlerde kesir sayılarını farklı bütünler üzerinden oluşturabiliyorlar. Dolayısıyla belirtilmesi gerektiğini düşünüyorum. Aksi takdirde hata yapmalarına neden olabiliriz.

Öğretmenler, bu tür ifadelerin öğrencilerin hata yapmalarına neden olabileceğini, dolayısıyla bu tür durumlara dikkat edilmesi gerektiği üzerinde fikir birliği sağlamışlardır. H₃ hatası, Ercan'ın PKT'nin son maddesine kurduğu problemde de görülmüştür. Kurulan problem şu şekildedir; *bir anaokulunda üç sınıf bulunmaktadır. Bu okuldaki iki sınıfın tamamı bir sınıfta $\frac{3}{4}$ 'ü doludur. Bu anaokulundan bir sınıf tamamen ve diğer bir sınıfın $\frac{5}{8}$ 'i ayrılırsa, sınıfların ne kadarı dolu kalır?* şeklindedir. Problemde sınıf mevcudu sayılarının eşit olduğuna yönelik açıklamalara yer verilmemiştir. Bu duruma yönelik Ercan'ın açıklamaları, *üç tane sınıf var. Problemden belirtmedim ama sınıflarda eşit sayıda öğrenci var* şeklindedir. Diğer öğretmenler sınıf mevcudlarının eşit olmasının kolay görülebilecek bir durum olmadığını, dolayısıyla problemlerde vurgulanması gerektiğini belirtmişlerdir. Bu duruma yönelik yapılan grup tartışması şu şekildedir;

Hilal: Sınıf mevcudlarının eşit olduğuna yönelik açıklama yapılmadı.

Kevser: Ben de ödevlerin aynı olduğunu belirtmedim. Bazı hikâyelerde açık bir şekilde belirtilmesi gerekebilir.

Hasan: Seçilen hikâyeye bağlı olarak değişebilir. Mesela Ercan'ın ikinci problemde kesir sayıları bir depo üzerinden belirtilmiş (*Bir ayda 2 depo ve bir deponun $\frac{3}{4}$ 'ü kadar*

benzin alan Selim şeklinde başlayan problem kastedilmiştir). Dolayısıyla belirtilmesine gerek yok. Ama bu problemde bence belirtilmeli.

Kamil: Sınıf mevcutlarının eşit olması kolay görünen bir şey değil.

Büşra: Ben de katılıyorum.

Benzer hata, Ercan'ın PKT'nin üçüncü maddesine kurduğu problemde de görülmüştür. Kurulan problem şu şekildedir; *Ali eşit büyüklükteki üç çay tarlasını biçip fabrikaya satmak istemektedir. Ali, iki tarlanın tümünü, bir tarlanın da $\frac{7}{8}$ 'ini biçiyor. Biçtiği çayların $\frac{2}{5}$ 'ini kendine alırsa, fabrikaya ne kadar çay satmış olur?* Problemde eksilen kesir sayısı için çay tarlası, çıkan kesir sayısı için ise bu tarlalardan elde edilen çay miktarı bütün olarak kabul edilmiştir. Bu yönüyle problemde H₃ hatası bulunmaktadır. Bu duruma yönelik grup içerisinde yapılan tartışma şu şekildedir;

A: Problem hakkında ne düşünüyorsunuz?

Kevser: Burada bütünler farklı alınmış. Birinde tarla, diğerinde biçilen çay miktarı.

Ercan: “Biçilen tarlanın $\frac{2}{5}$ 'i” deseydim problem düzelirdi.

A: “Biçilen tarlanın $\frac{2}{5}$ 'i” denilseydi, problem düzelir miydi?

Hasan: Bence düzelmezdi. Çünkü iki tarlanın tamamını ve bir tarlanın da $\frac{7}{8}$ 'ini biçmiş. Biçtiği tarlanın $\frac{2}{5}$ 'i denirse çarpma işlemi olur. Yani $2\frac{7}{8} \times \frac{2}{5}$ işlemi yapılmış olur.
“Bir tarlanın $\frac{2}{5}$ 'i” denirse düzelir.

Yapılan tartışmalar dikkate alındığında Ercan, *biçilen tarlanın $\frac{2}{5}$ 'i* ifadesiyle problemdeki hatanın giderilebileceğini düşünmüştür. Ercan, hatayı gidermek isterken farklı bir hata sergilemiştir. Hasan ise, bu ifadenin eksilen kesir sayısı ile çıkan kesir sayısının çarpımını gerektirdiğini, dolayısıyla problemin verilen işleme uygun olmadığını belirtmiştir.

Tablo 2'ye göre H₄, Ercan ve Kevser'in kurduğu problemlerde görülmüştür. Bu hata türü, a ve b ekilsen ve çıkan kesir sayıları temsil etmek üzere, $a - b$ yerine axb şeklinde yazılan problemleri kapsamaktadır. Ercan'ın PKT'nin ikinci maddesine kurduğu problem şu şekildedir; *Ayşe dolapta bulunan bir kutu tam ve yarım kutu sütünün $\frac{3}{4}$ 'ünü içerse, geriye ne kadar süt kalır?* Probleme, *bir kutu tam ve yarım kutu sütünün $\frac{3}{4}$ 'ü* ifadesi, $1\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ işlemi ile temsil edilecektir. Ercan, problemi nasıl kurduğuna yönelik açıklamalarında, $\frac{3}{4}$ kesir sayısını, bir kutu sütünün $\frac{3}{4}$ 'ü şeklinde ifade etmek istediğini belirtmiştir. Ercan'ın açıklamaları şu şekildedir; *burada $1\frac{1}{2}$ tamsayılı kesri bir bütünden büyük olduğu için, "bir kutu ve diğer kutunun yarısı" şeklinde ifade ettim. Ama $\frac{3}{4}$ 'ü oluştururken hata yaptım. Aslında bir kutu sütünün $\frac{3}{4}$ 'ü demek istemiştım. Nasıl ifade edebilirim diye çok düşündüm fakat ifade edemedim.* Ercan açıklamalarında, düşündüğünü ifade etmede güçlük yaşadığını belirtmiştir. Bu hata türü, grup içerisinde yapılan tartışmalarda diğer öğretmenler tarafından da belirtilmiştir.

Tablo 2'ye göre H₅ hata türü sadece Hilal'in kurduğu problemlerde görülmüştür. Hilal, $\frac{3}{4}$ kesir sayısını çeyrek kavramıyla ifade etmiştir. Hilal'in PKT'nin ikinci maddesine kurduğu problem şu şekildedir; *annem akşam yemeği için masaya bir tam birde yarım ekmek getirdi. Sadece çeyrek ekmek yenildi. Geriye ne kadar ekmek kaldı?* Hilal problemi nasıl kurduğuna yönelik açıklamalarında, bu hataya vurgu yapmıştır. Hilal'in açıklamaları, *burada $\frac{3}{4}$ 'ü çeyrek ekmek şeklinde belirtmişim. O anda paydada dördü görünce çeyreği çağrıştırdı. Çeyrek diye gördüm* şeklindedir.

Tablo 2'ye göre H₆ hata türü, Hasan, Büşra ve Gürsel'in kurduğu problemlerde görülmüştür. Bu hata türü, verilen işlemdeki kesir sayılarının tam sayılı kesir olduğu dikkate alınmadan kurulan problemleri kapsamaktadır. Büşra'nın PKT'nin üçüncü maddesine kurduğu problem şu şekildedir; *bir öğretmen elindeki fıncığın $2\frac{7}{8}$ katını Ali'ye, $\frac{2}{5}$ katını ise Ayşe'ye vermiştir. Ali'ye, Ayşe'den kaç kat fazla fıncık vermiştir?* Problemden, öğretmenin elindeki fıncıkların $2\frac{7}{8}$ katını öğrencilerinden birine verdiği belirtilmektedir. $2\frac{7}{8}$ kesir sayısının bir bütünden daha büyük olması nedeniyle problemde, mevcut fıncık miktarından daha fazlasının verilmesi söz konusudur. Bu durum ise mantıksal açıdan anlamlı değildir. Büşra'nın problemi nasıl kurduğuna yönelik açıklamaları şu şekildedir;

Sayıları hikâyeye uydurmaya çalıştım. Kesirlerle çalışırken ilk baktığım şey kesrin bütünle olan ilişkisi. Şu an soruyu okurken fark ettim. Sanki elindeki fıncık miktarından daha fazlasını Ali'ye

veriyor. Fakat ben soruyu yazarken şöyle düşünmüştüm; bir torbada fındık var. Öğretmen elindeki fındığın $2\frac{7}{8}$ katını, bu torbadan alıp öğrenciye vermiş. Elinde bir kilo fındık varsa, bunun $2\frac{7}{8}$ katını başka bir yerden alıp çocuklara vermiş gibi. Bir bütünü aşmamış yani.

Büşra'nın açıklamaları dikkate alındığında mevcut fındık miktarından daha fazlasının öğrenciye verilmesi söz konusu değildir. Buna karşın problemde bu tür açıklamaların yer almamasının, öğrencilerin benzer hatalar yapmalarına neden olabileceği söylenebilir. Grup içerisinde yapılan tartışmada, öğretmenler problemin bu haliyle hatalı olduğunu belirtmişlerdir. Kamil'in bu duruma yönelik açıklamaları şu şekildedir; *Büşra'nın problemi nasıl kurduğuna dikkat etmeden sadece soruya bakarsak, mevcut fındık miktarından daha fazlasının verildiği anlaşılıyor. Büşra'nın düşündüğü farklı. Fakat öğrenci problemde bunu anlayamaz.*

Bu tartışmaların ardından öğretmenlere probleme yönelik ifade etmek istedikleri başka bir durum olup olmadığı sorulmuştur. Kevser, problemin kendisine kesir problemi değilmiş gibi hissettirdiğini belirtmiştir. Kevser bu durumun nedeni olarak kesir sayıları için *kat* kelimesinin kullanılmasını göstermiştir. Kevser açıklamalarında, kesirlerin parça-bütün ilişkisini vurguladığını, buna karşın bu problemde bu tür bir algının oluşmadığını vurgulamıştır. Grup tartışması sürecinde öğretmenler, kesirlerin işlemci anlamından dolayı bu ifadenin uygun olabileceğine yönelik açıklamalar yapamamışlardır. Grup içerisinde yapılan tartışma şu şekildedir;

A: Probleme yönelik belirtmek istediğiniz farklı bir durum var mı?

Kevser: Kesir sorusu değilmiş gibi geliyor bana. $2\frac{7}{8}$ katı ve $\frac{2}{5}$ katı. Bu ifadeler kesir sorusuymuş gibi hissettirmiyor bana.

A: Kavramsal olarak soru doğru mu Kevser?

Kevser: Doğru. Problem kurulması istenen işlemi de karşılıyor. Öğrenciye böyle bir soru versem bu şekilde çözer. Fakat $2\frac{7}{8}$ *katı* kesir sorusu hissi vermiyor. Benim derslerde çözeceğim soru şekli değil. Kesir daha farklı oluyor. Bir bütünün belli bir miktarı gibi.

Hasan: Çarpma işlemi mi hatırlatıyor?

Kevser: Hayır. Sadece hissettiğim bu. Sadece orda ifadeler kesir gibi görünüyor. Bütünün belli bir miktarı anlamını görmüyorum.

Probleme yönelik yapılan tartışmalarda, soru kökü de tartışmaya açılmıştır. Hilal, *kaç kat* ifadesinin doğal sayıları çağrıştırdığını belirtmiştir. Buna karşın grup içerisinde genel olarak öğretmenler bu görüşe karşı çıkmışlardır. Bu duruma yönelik grup içerisinde yapılan tartışma şu şekildedir;

A: Soru kökü hakkında ne düşünüyorsunuz?

Hilal: Kaç kat doğal sayılara yönelik olmamış mı? $\frac{1}{2}$ kat, $\frac{3}{2}$ kat gibi diyemeyiz.

Kevser: $\frac{3}{2}$ katı diyebiliriz. $2\frac{7}{8}$ *katı* diyebiliyorsak, soru kökünde de diyebiliriz. Bence doğru.

Büşra: Soruyu okurken zaten $\frac{2}{5}$ *katı* diyor. Bundan dolayı soru

kökünün doğal sayı gibi cevaplanması gerekeceğine katılmıyorum. Bu problemin giriş kısmındaki ifadelerden dolayı o şekilde anlaşılacağını düşünmüyorum.

Kamil: Bende öyle bir çağrışım yapacağını düşünmüyorum. Sorunun giriş kısmında kesirler için kat sözcüğünü kullanmış. Sorunun kökünde de onu sorabilir.

Tablo 2'ye göre H₇ hatası, Kevser ve Hilal'in kurduğu problemlerde görülmüştür. Bu hata türü kesir sayılarının uygun birimle ifade edilemediği ve kesir sayıları için yazılan birimlerin birbiri ile tutarlı olmadığı problemleri içermektedir. Hilal'in PKT'nin üçüncü maddesine yönelik kurduğu problemler şu şekildedir;

2 $\frac{7}{8}$ hektarlık bir bahçenin $\frac{2}{5}$ hektarlık alanı kullanılmıştır. Kullanılmayan alan, bahçenin ne kadarıdır?

Bidonda bulunan 2 $\frac{7}{8}$ litre suyun $\frac{2}{5}$ litresi kullanılmıştır. Geriye kalan su miktarı bidonun ne kadarıdır?

Yazılan birinci problemde bahçenin kullanılmayan alanı $2\frac{7}{8} - \frac{2}{5} = 2\frac{19}{40}$ hektardır. Soru kökünde ise, kullanılmayan alanın bahçenin ne kadarı olduğu sorulmaktadır. Bu soru için yapılacak olan işlem, $2\frac{19}{40} \div 2\frac{7}{8}$ şeklindedir. Problemin çözümünde $2\frac{7}{8} - \frac{2}{5} = ?$ işleminin yapılabilmesi için ise, soru kökünde kullanılmayan alanın hektar cinsinden sorulması gerekir. Buna karşın soru kökünde, kullanılmayan alanın bütünle olan ilişkisi sorulmuştur. Bu yönüyle problemde birimden kaynaklı H₇ hatası

bulunmaktadır. Benzer durum, kurulan ikinci problemde de görülmektedir. Yapılan tartışmalarda bu durum öğretmenler tarafından da belirtilmiştir. Hilal'in kurduğu birinci probleme yönelik yapılan tartışma şu şekildedir;

- A: Problem hakkında ne düşünüyorsunuz?
- Gürsel: Problemde eksilen ve çıkan kesir sayıları için hektar kullanılmış. Fakat soru kökünde kullanılmayan alanın bahçenin ne kadarı olduğu sorulmuş. Neden geriye kalan alan kaç hektardır diye sormadınız?
- Hilal: Bu problemi kurarken biraz zorlandım. Kesirler, parça-bütün ilişkisini belirtiyor. O hissi vermek için böyle kullandım.
- Kevser: O zaman da amacından sapmış oluyor. Probleme nasıl başladığınız çok önemli. Eksilen ve çıkan kesir sayıları parça-bütün şeklinde ifade edilmemiş. Dolayısıyla sonunda, *bahçenin ne kadarıdır?* dersiniz, problem kurulması istenen işlemi değiştirmiş olursunuz.

Bu tartışmaların devamında Gürsel, Hilal'in kurduğu ikinci problemde bidonun hacminin, $2\frac{7}{8}$ litre gibi düşünüldüğünü ancak problemde, bidonun hacminin $2\frac{7}{8}$ litre olduğuna yönelik herhangi bir açıklamanın olmadığını vurgulamıştır. Benzer şekilde diğer öğretmenler de bu görüşü desteklemişlerdir. Bu haliyle, *geriye kalan su miktarı bidonun ne kadarıdır?* sorusuna cevap verilemeyeceği üzerinde fikir

birliği sağlanmıştır. Bu yönüyle problemde *eksi veri içerme* şeklindeki H_8 hatası bulunmaktadır. Bu hata türü sadece bu problemde görülmüştür.

Kevser'in PKT'nin son maddesine yönelik kurduğu problem şu şekildedir; *Ali ve Ahmet bir pizzacıya gitmişlerdir. Her ikisi de aynı pizzalardan sipariş vermişlerdir. Ali $2\frac{3}{4}$ miktarında, Ahmet ise $1\frac{5}{8}$ miktarında pizza yediğine göre, Ali, Ahmet'ten ne kadar fazla pizza yemiştir?* Grup tartışması sürecinde diğer öğretmenler, $2\frac{3}{4}$ miktarında ve $1\frac{5}{8}$ miktarında ifadeleriyle anlatılmak istenenin açık olmadığını belirtmişlerdir. Grup içerisinde yapılan tartışma şu şekildedir;

A: Problemi nasıl kurduğunu açıklar mısın?

Kevser: İşlemdeki kesir sayıları bir bütünden büyük. Dolayısıyla birbirine eşit birden fazla bütün almamız gerekiyordu. Onun için "aynı pizzalardan sipariş vermişlerdir" dedim. İki kişinin yediği pizzaları karşılaştırmak istedim. Biri 2 tam pizza ve bir pizzanın $\frac{3}{4}$ 'ünü yiyor, diğeri de 1 tam pizza ve diğer pizzanın $\frac{5}{8}$ 'ini yiyor. Çıkarma işlemi olması için ise bunları karşılaştırdım.

Kamil: $1\frac{5}{8}$ miktar şeklindeki kullanım doğru değil. Burada birim olarak neyi aldınız. Belli değil.

Gürsel: Bende katılıyorum. Hani açıklamalarından anlatmak istediğini anlayabiliyoruz. Fakat sadece probleme bakınca, birim olarak neyi kullandığın net bir şekilde belli değildir.

Büşra: Öğrenci için de sıkıntı olabilir. Öğrenciler bu tür ifadeleri

“bir pastanın $1\frac{5}{8}$ 'i” şeklinde düşünebilirler. Bu durumda da öğrenci parça-bütün ilişkisini kuramama hatasına düşer. Çünkü kesir sayıları ile ne kastedildiği belli değil. Onun için birimi daha açık şekilde belirtmemiz lazım.

Kevser: Evet. Eksiklik olmuş.

Grup içerisinde yapılan tartışmalarda, Kevser'in $2\frac{3}{4}$ kesir sayısını *2 tam pizza ve bir pizzanın $\frac{3}{4}$ 'ü* şeklinde düşündüğü anlaşılmaktadır. Buna karşın diğer öğretmenler, $2\frac{3}{4}$ miktarında ifadesiyle anlatılmak istenenin açık olmadığını belirtmişlerdir. Örneğin Büşra bu tür bir ifadeyi öğrencilerin “bir pastanın $1\frac{5}{8}$ 'i” şeklinde düşünebileceklerini ve bunun da öğrencilerin hata yapmalarına neden olabileceğini belirtmiştir.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Problem kurma, kavramsal anlama becerisinin belirlenmesinde, kavram yanılgıları veya hataların tespit edilmesinde alternatif değerlendirme aracı olarak görülmektedir (Örn., Kılıç, 2013; Ticha & Hospesova, 2009). Bu araştırmada, problem kurmanın değerlendirme aracı olduğu bakış açısından hareketle, ortaokul matematik öğretmenlerinin kesirlerle çıkarma işlemine yönelik kavramsal bilgilerinin sorgulanması hedeflenmiştir. Öğretmenlerin kesirlerle çıkarma işlemine yönelik kurdukları problemlerde sekiz hata türü bulunmaktadır. Bu hata türleri ve yapılan açıklamalar dikkate alındığında, yapılan hataların odağında üç durumun yer aldığı düşünülebilir. Bu durumlar şunlardır; i) dil boyutunda yaşanan

güçlükler, ii) kavramsal boyutta yaşanan güçlükler ve iii) öğretmenlerin öğretim sürecindeki alışkanlıklarından kaynaklı güçlükler.

Matematiksel dilin doğru kullanılması ve anlaşılması öğretmenler ve öğrenciler için kilit öneme sahiptir (Tobias, 2013). Bu çalışmada öğretmenlerin kurdukları problemlerdeki hataların önemli nedenlerinden birisi dil boyutunda yaşanan güçlüklerdir. Benzer şekilde öğretmenlerde odak-grup görüşmesi sürecinde bu durumu sıklıkla ifade etmişlerdir (Örn., Hilal'in H₂ ve Kevser'in H₇ hatasına yönelik kurdukları problemler ve yaptıkları açıklamalar). Öğretmenler, problem kurarken düşündüklerini ifade etmede güçlükler yaşadıklarını belirtmişlerdir. Eksilen veya çıkan kesir sayılarından en az birinin tam sayılı kesir olduğu maddelerde ise dil boyutunda yaşanan güçlüklerin daha fazla olduğu görülmüştür. Tobias (2013) 3-2 işleminin; üç obje ile başlanması ve bunların iki tanesinin alınması şeklinde vurgulanabileceğini belirtmiştir. Araştırmacı işlemin kesir içerdiği durumlarda (örn., $3 - \frac{1}{2}$) ise, bu şekilde yorumlamanın doğru olmadığını ve dil yönünden yaşanan güçlüklerle işaret ettiğini belirtmiştir. Benzer şekilde bu çalışmada öğretmenlerin $a - b$ yerine axb şeklinde problemler kurmaları dil yönünden yaşadıkları güçlüklerle işaret etmektedir (Örn., Ercan'ın H₄ hatasına yönelik kurduğu, *Ayşe dolapta bulunan bir kutu tam ve yarım kutu sütün $\frac{3}{4}$ 'ünü içerse, geriye ne kadar süt kalır?* şeklindeki problem).

Matematiksel ifadelerin sözel ifadelere dönüştürülmesi güçlü bir dil becerisini gerektirmesi, bu hata türlerinin nedeni olarak görülebilir. Araştırma sonuçları (Capraro & Joffrion, 2006; MacGregor & Stacey, 1993) öğrencilerin, sözel probleme karşılık gelen matematiksel ifadeleri

yazarken matematiksel notasyonları doğru şekilde kullanamadıklarını ve sözel problemdeki ifadelerin bu notasyonların kullanımını nasıl etkilediğini bilmediklerini göstermektedir. Bu araştırmanın sonuçları ise öğretmenlerin, matematiksel ifadeleri sözel ifadelere dönüştürürken de güçlükler yaşadıklarını ortaya koymaktadır. Dil yönünden güçlükler yaşanmasının önemli nedenlerinden birisi, kesir sayılarının bütünün belli bir miktarı anlamıyla ifade edilmeye çalışılmış olmasıdır. Tespit edilen hataların önemli bir kısmı, kesir sayılarının bütünün belli bir miktarı anlamıyla temsil edildiği problemlerde bulunmaktadır. Öğretmenler bu tür problemlerde düşündüklerini ifade edemediklerini daha fazla vurgulamışlardır (Örn., Ercan'ın H_4 hatasına yönelik yapmış olduğu, *aslında bir kutu sütün $\frac{3}{4}$ 'ü demek istemiştim. Nasıl ifade edebilirim diye çok düşündüm* şeklindeki açıklama). Çünkü tam sayılı kesirler söz konusu olduğunda, özdeş olan birden fazla bütünün ifade edilmesi ve çıkarma işleminin anlamının (karşılaştırma veya ayırma) vurgulanması söz konusudur. Kesir sayılarının birim kullanılmadan ifade edilmesi daha kompleks bir düşünme sürecini gerektirmektedir.

Kesirlere yönelik kavramsal bilgideki eksiklikler yapılan hataların önemli diğer bir nedenidir. Hatalara yönelik yapılan açıklamalar dikkate alındığında, öğretmenlerin kesir sayıları ile doğal sayılar arasındaki ilişki ve kesirlerin farklı anlamlarına yönelik kavramsal bilgilerinin sınırlı olduğu tespit edilmiştir (Örn., Kevser'in, $2\frac{7}{8}$ katı ve $\frac{2}{5}$ katı. *Bu ifadeler kesir sorusuymuş gibi hissettirmiyor* şeklindeki açıklaması). Kesirler konusunda yapılan hatalardan birisi de *ne kadar* yerine *kaç tane* ifadesinin kullanılmasıdır (Lamon, 2005). Benzer şekilde Ni ve Zhou (2005), öğrencilerin doğal sayılara yönelik anlayışlarını kesir sayılarına yanlış uyguladıklarını belirtmiştir. Odak-

grup görüşmeleri sürecinde yapılan açıklamalar dikkate alındığında, bazı öğretmenlerin soru kökünü oluşturma noktasında benzer güçlükler yaşadıkları da tespit edilmiştir. Dolayısıyla bu araştırmanın sonuçları öğrencilerde görülen hataların, öğretmenlerde de görüldüğüne işaret etmektedir.

Charalambous, Delaney, Mhuire, Hsu ve Mesa (2010) kesir işlemlerine yönelik güçlüklerin, kesir öğrenimindeki güçlüklerden ayrı değerlendirilemeyeceğini ve köklerinin kesir kavramlarına dayandığını belirtmiştir. Bu çalışmada öğretmenlerin kurdukları problemlerde, *birim hatası* ve *mantıksal hata* şeklinde hatalar bulunması, yaşanan güçlüklerin temelinde kesir kavramına yönelik yaşanan güçlüklerin olduğu sonucunu desteklemektedir. Bunun yanında bu hata türleri, öğrencilerin veya öğretmen adaylarının problem kurma becerilerinin araştırıldığı çalışmalarda da ön plana çıkarılan hata türleridir (Işık & Kar, 2012a; McAllister & Beaver, 2012; Işık ve diğ., 2013; Osana & Royea, 2011; Toluk-Uçar, 2009). Bu sonuçlar, öğrencilerde görülen bu hata türlerinin önemli bir nedeninin öğretmenlerde görülen hatalar olabileceğine işaret etmektedir. Ayrıca yapılan çalışmaların örneklemi dikkate alındığında, bu tür hataların uluslararası düzeyde de benzerlikler gösterdiği söylenebilir.

Öğretmenlerin öğretim sürecindeki alışkanlıkları, kurulan problemlerdeki hataların önemli diğer bir nedenidir. Öğretmenler, bütünlerin özdeş olması gerektiğini bilmelerine karşın, kurdukları problemlerde bu duruma yönelik ifadeler yer vermemişlerdir. Öğretmenlerin kurdukları problemler, öğrencilere öğrenme fırsatları sunacağı gibi kavram yanlışlarına düşmelerine de neden olabilecektir (Işık & Kar, 2012b). Dolayısıyla öğretmenlerdeki bu tür eksiklikler,

öğrencilerde kesirlere yönelik görülen kavramsal düzeydeki hataların önemli bir nedeni olarak görülebilir. Örneğin, öğretmenlerin bütünlerin özdeş olması gerektiğine yeterince vurgu yapmaması, öğrencilerin eş olmayan bütünler üzerinden ifade edilen kesir sayılarıyla işlemler yapmalarına neden olabilecektir.

Kurulan problemlerde sekiz hata türü görülmesi ve hatalara yönelik yapılan açıklamalarda farklı hatalar sergilenmesi, öğretmenlerin kesirlerle çıkarma işlemine yönelik problem kurmada önemli eksikliklerinin olduğuna işaret etmektedir. Odak-grup görüşmelerinden elde edilen sonuçlar, farklı araştırmacılar (Crespo & Sinclair, 2008; Işık & Kar, 2012c; McAllister & Beaver, 2012; Işık, ve diğ., 2013) tarafından belirtilen, öğretmen veya öğretmen adaylarının kurdukları problemlerin tahmin edilebilir, basit, iyi yapılandırılmamış ve çözülemez şeklinde olduğu sonuçlarını da desteklemektedir. Bunun yanında, öğretmenlerin alan bilgisi, matematik öğretiminin niteliğini etkileyen önemli bir etkidir (Ball, Thames & Phelps, 2008; Ball, Lubienski & Mewborn, 2001). Bu bağlamda kesirlerle çıkarma işlemine yönelik öğretmenlerde görülen kavramsal eksikliklerin, öğretim sürecindeki faaliyetlerinin niteliğini de olumsuz yönde etkileyebileceği söylenebilir.

Araştırmada analizler, kesirlerle çıkarma işlemine yönelik hazırlanan dört madde üzerinden yapılmıştır. Bu durum çalışmanın bir sınırlılığı görülebilir. Farklı kesir işlemleri üzerinden de benzer araştırmalar yürütülebilir. Yapılabilecek bu tür araştırma sonuçları, bu araştırmada ulaşılan sonuçların genellenmesine de katkıda bulunabilecektir. Araştırmanın yedi öğretmenle yürütülmesi, çalışmanın diğer bir sınırlılığı olarak görülebilir. Daha geniş örneklemeler üzerinden

benzer araştırmaların yürütülmesi, bu araştırmadan elde edilen sonuçların genellenmesine katkı sunabilecektir. Bu araştırmada veriler odak-grup görüşmeleri üzerinden toplanmıştır. Bunun yanında ilerideki çalışmalarda öğretmenlerin derslerde problem kurarken ne tür hatalar sergiledikleri ve bu tür hataların öğrenci başarısını nasıl etkilediği de araştırılabilir.

Kaynaklar

- Akay, H. (2006). *Problem kurma yaklaşımı ile yapılan matematik öğretiminin öğrencilerin akademik başarısı, problem çözme becerisi ve yaratıcılığı üzerindeki etkisinin incelenmesi* (Yayınlanmamış doktora tezi). Gazi Üniversitesi, Ankara.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. *Handbook of research on teaching*, 4, 433-456.
- Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 401-421.
- Cankoy, O., & Darbaz, S. (2010). Effect of a problem posing based problem solving instruction on understanding problem. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 38, 11-24.
- Capraro, M. M., & Joffrion, H. (2006). Algebraic equations: Can middle-school students meaningfully translate from words to mathematical symbols? *Reading Psychology*, 27, 147-164.
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12, 117-151.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM*, 37(3), 149 - 158.

- Contreras, J. (2007). Unraveling the mystery of the origin of mathematical problems: Using a problem-Posing framework with prospective mathematics teachers. *The mathematics Educator*, 17(2), 15-23.
- Crespo, S., & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal Mathematics Teacher Education*, 11, 395-415.
- Creswell, W. J. (2007). *Qualitative inquiry and research design choosing among five traditions*. California: Sage Publications.
- Gonzales, N. A. (1998). A blueprint for problem posing. *School Science and Mathematics*, 94(2), 78- 85.
- Işık, C., & Kar, T. (2012a). Matematik Dersinde Problem Kurmaya Yönelik Öğretmen Görüşleri Üzerine Nitel Bir Çalışma. *Milli Eğitim Dergisi*, 194, 199-215.
- Işık, C., & Kar, T. (2012b). 7. sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama işlemine kurdukları problemlerin analizi. *İlköğretim Online*, 11(4), 1021-1035. [Online] <http://ilkogretim-online.org.tr/>, retrieved on 30/05/2012.
- Işık, C., & Kar, T. (2012c). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kesirlerde bölmeye yönelik kurdukları problemlerde hata analizi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri (KUYEB)*, 12(3), 2289-2309.
- Işık, C., Kar, T., Işık, A., & Güler, G. (2012). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kesirlerde toplama işlemine yönelik kurulan problemlerdeki hataları belirleyebilme becerileri. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 3(3), 161-182.
- Işık, C., Öcal, T., & Kar, T. (2013). Analysis of pre-service elementary teachers' pedagogical content knowledge in the context of problem posing. *Paper presented at the meeting of Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8), Antalya, Turkey*.
- Kar, T. (2014). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin öğretim için matematiksel bilgisinin problem kurma bağlamında incelenmesi: kesirlerle toplama işlemi örneği* (Yayınlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum, Türkiye.
- Kar, T., & Işık, C. (2014a). Ortaokul yedinci sınıf öğrencilerinin kesirlerle çıkarma işlemine kurdukları problemlerin analizi.

- İlköğretim Online*, 13(4), 1223-1239. [Online] <http://dergipark.ulakbim.gov.tr/ilkonline/article/view/5000075271>
- Kar, T., & Işık, C. (2014b). Analysis of problems posed by pre-service primary teachers about adding fractions in terms of semantic structures. *Mathematics Education*, 9(2), 135-146.
- Kılıç, Ç. (2013). Pre-service primary teachers' free problem-posing performances in the context of fractions: An example from Turkey. *The Asia-Pacific Education Researcher*, 1-10.
- Lamon, S. J. (2005). Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lavy, I., & Shriki, A. (2007). Problem posing as a means for developing mathematical knowledge of prospective teachers. *Paper presented at the meeting of 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Seoul*.
- Luo, F. (2009). Evaluating the effectiveness and insights of pre-service elementary teachers' abilities to construct word problems for fraction multiplication. *Journal of Mathematics Education*, 2(1), 83-98.
- MacGregor, M., & Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24 (3), 217- 232.
- McAllister, C. J., & Beaver, C. (2012). Identification of error types in preservice teachers' attempts to create fraction story problems for specified operations. *School Science and Mathematics* 112(2), 88-98.
- Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], (2013). *Ortaokul Matematik Dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı*. Ankara: MEB Basımevi.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standard for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychology*, 40(1), 27-52.
- Osana, H. P., & Royea, D. A. (2011). Obstacles and challenges in preservice teachers' explorations with fractions: A view from a small-scale intervention study. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30, 333-352.

- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.
- Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. In A. McIntosh, & N. Ellerton (Eds.), *Research in mathematics education: A contemporary perspective* (pp.164-185). Perth: MASTEC Publication.
- Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in Mathematics Education* (pp.518–525). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Ticha, M., & Hospesova, A. (2009). Problem posing and development of pedagogical content knowledge in pre-service teacher training. *Paper presented at the meeting of CERME 6*, Lyon.
- Tobias, J. M. (2013). Prospective elementary teachers' development of fraction language for defining the whole. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(2), 85-103.
- Toluk-Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education*, 25(1), 166-175.
- Ward, J. & Thomas, G. (2007). What do teachers know about fractions? In *Findings from the New Zealand Numeracy Development Projects* (pp. 128-138). Wellington: Learning Media.
- Yin, R. K. (2011). *Qualitative research from start to finish*. The Guilford Press, New York: USA.
- Zembat, İ.Ö. (2007). Sorun Aynı–Kavramlar; Kitle Aynı–Öğretmen Adayları. *İlköğretim Online*, 6(2), 305-312, [Online]: <http://ilkogretim-online.org.tr> adresinden 12 Aralık 2011 tarihinde indirilmiştir.