D.Ü.Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi **10**, 159-171 (2008)

HİPERBOLİK TANJANT YÖNTEMİNİN KLASİK BOUSSINESQ SİSTEMİNE UYGULANMASI

Application of Hyperbolic Tangent Method to Classical Boussinesq System

Mustafa MIZRAK [1]
Abdulkadir ERTAŞ [2]

Özet

Tanh yöntemi bir boyutlu lineer olmayan dalga ve değişimsel denklemlerinin yönlendirilmiş dalga çözümlerinde kullanılan çok güçlü bir çözüm yöntemidir. Bu yöntem çözümlerin sonlu hiperbolik tanjant kuvvet serileri şeklinde yazılabilmesi temeline dayanır. Bu çalışmada, aynı yöntem lineer olmayan Klasik Boussinesq kısmi diferansiyel denklem sistemine uygulandı.
Anahtar kelimeler: *Hiperbolik tanjant (Tanh) yöntemi, değişimsel denklemler, dalga denklemleri, yönlendirilmiş dalga çözümleri.*

Abstract

Tanh method is a powerful solution method for the computation of one-dimensional travelling wave solutions of evolution and wave equations. This method is based on the fact that solutions may be written as a finite power series of a hyperbolic tangent. In this work, we apply Hyperbolic Tangent (Tanh) method to solve Classical Boussinesq systems of partial differential equations.
Keywords: *Hyperbolic tangent (Tanh) method, evolution equations, wave equations, travelling wave solutions.*

1.GİRİŞ

Lineer olmayan denklemler uygulamalı bilimin çok çeşitli alanlarında, örneğin plazma fiziği, sıvı mekaniği, fiber optikler, katı hal fiziği, lineer olmayan optik vb. alanlarda ortaya çıkmaktadır (Abdou, 2007).Bu alanlardaki karmaşık olayların tanımlanmasında lineer olmayan değişimsel denklemler[3] kullanılır. Lineer olmayan değişimsel denklemlerin çözümleri de yönlendirilmiş dalga olarak ortaya çıkar (Tanoğlu, 2007). Matematikte lineer olmayan değişimsel denklemlerin çözümlerini bulmak için birçok analitik yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları: Ters saçılım dönüşümü

---

[1] Dicle Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı, 21280 – Diyarbakır, mmizrak@stu.dicle.edu.tr

[2] Doç. Dr.; Dicle Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı, 21280 – Diyarbakır, aertas@dicle.edu.tr

[3] Lineer olmayan değişimsel ve dalga denklemleri zamana bağlı birinci veya ikinci basamaktan türevler içeren kısmi diferansiyel denklemlerdir (Nuseir,1994).

(Ablowitz, Kaup, Newell and Segur, 1974), Darboux dönüşümü (Matveev and Salle, 1991), Hirota bilineer yöntemi (Hirota, 2004), homojen dengeleme yöntemi (Wang, 1996), benzerlik indirgeme yöntemi (Bluman and Kumei (1989;Olver, 1986), Jacobi eliptik fonksiyon yöntemi (Li and Liu, 2002), Painleve açılımları (Cariello and Tabor, 1989), Backlund dönüşümü, Cole-Hopf dönüşümü, sine-cosine yöntemi (Ablowitz and Clarkson (1991; Gu and et al,1990) ve çeşitli tanh yöntemleridir.

Bu yöntemlerden en etkili olanlarından biri tanh (hiperbolik tanjant) fonksiyonu yöntemidir. Bu yöntem Malfliet(1992),(2004);Malfliet and Hereman (1996), (2005); Chen, Li and Zhang (2002);Fan(2000);Wazwaz (2002),(2004) (2005) gibi birçok araştırmacılar tarafından çeşitli problemler üzerinde uygulanmıştır. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için genel bir yöntem yoktur. Tanh yöntemi ile lineer olmayan değişimsel ve dalga denklemlerinin tam ve yaklaşık çözümleri direkt ve sistematik bir şekilde elde edilebilir. Bu yöntemin diğer yöntemlere nazaran üstün olmasının sebebi, çözümlerin hiperbolik tanjant fonksiyonlarının seri toplamları şeklinde yazılmasıdır. Bu da tanh-fonksiyonunun türevlerinin yine tanh-fonksiyonu türünden yazılabilmesinin bir sonucudur.

$$\left(\tanh x\right)' = 1 - \tanh^2 x$$

$$\left(\tanh x\right)'' = -2\tanh x\left(\tanh x\right)' = -2\tanh x + 2\tanh^2 x \qquad \text{vb..}$$

2.HİPERBOLİK TANJANT(TANH METHOD) YÖNTEMİ

2.1.Tanh Yönteminin Ana Hatları

Tanh yöntemi, Willy Malfliet tarafından ortaya konmuştur (Malfliet,1992). Daha sonra Willy Malfliet ve Willy Hereman tarafından geliştirilmiştir (Malfliet and Hereman, 1996). Bu yöntem yönlendirilmiş dalga çözümlerinin hiperbolik tanjant fonksiyonları şeklindeki ilk kabulüne dayanır.

Bu yöntemin diğer yöntemlere göre avantajı daha az cebirsel işlem ve çaba ile tam çözümlerin kolaylıkla elde edilebilmesine dayanır

Şimdi bu yöntemin anahatlarını adım adım inceleyelim:

1-Bir boyutlu lineer olmayan değişimsel ve dalga denklemleri genellikle

$$u_t = G(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, ...) \qquad \text{veya} \qquad u_{tt} = G(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, ...) \tag{1}$$

şeklinde gösterilir. Bu denklemlerin çözümleri $u\left(x,t\right)$ şeklindedir.

2-(1) denkleminde iki farklı biçimde gösterilen denklemlerin yönlendirilmiş dalga çözümlerini (travelling wave solutions) bulmak için x ve t bağımsız değişkenleri tek bir $\xi = k(x - Vt)$ değişkeni altında birleştirilir. $\xi = k(x - Vt)$ değişken dönüşümü yapıldığında $u\left(x,t\right)$

fonksiyonu

$$u(x,t)=U(\xi) \qquad ,\xi=k(x-Vt) \tag{2}$$

ifadesine dönüşür. Buradaki k ($k>0$) dalga sayısını , V dalganın hızını göstermektedir. $u(x,t)$ bağımlı değişkeni $U(\xi)$ ile değiştirildiğinde (1) kısmi diferansiyel denklemi

$$-kV\frac{dU}{dx}=G(U,k\frac{dU}{dx},k^2\frac{d^2U}{dx^2},.......)$$

veya (3)

$$k^2V^2\frac{d^2U}{dx^2}=G(U,k\frac{dU}{dx},k^2\frac{d^2U}{dx^2},...)$$

adi diferansiyel denklemlerine dönüşürler.

3-Adi diferansiyel denklemdeki tüm türevler ξ içerdiğinden, bu denklemin integrali alınır. İntegral alınırken integral sabiti sıfır olarak alınır. Böylece daha basitleştirilmiş bir adi diferansiyel denklem elde etmiş olunur.

4- Sonra yeni bir

$$Y=\tanh(x) \tag{4}$$

bağımsız değişkeni tanımlanır ve

$$\frac{d}{dx}=(1-Y^2)\frac{d}{dY}$$

(5)

$$\frac{d^2}{dx^2}=(1-Y^2)(-2Y\frac{d}{dY}+(1-Y^2)\frac{d^2}{dY^2})$$

türev dönüşümleri yapılır.

5-Daha sonra

$$u(x,t)=U(\xi)=S(Y)=\sum_{n=0}^{N}a_nY^n \quad \text{ve} \quad Y=\tanh(\xi)=\tanh\left[k(x-Vt)\right] \tag{6}$$

şeklinde bir çözüm varsayılarak (5) ve (6) ifadeleri basitleştirilmiş (3) adi diferansiyel denklemine yerleştirilir.

6- Buradaki N değeri, (6) denkleminin adi diferansiyel denkleme yerleştirilmesiyle elde edilen en yüksek dereceli lineer terim ile lineer olmayan terimlerin eşitlenmesi ile bulunur. N değeri belirlendikten sonra, sonuç denklemindeki Y'nin tüm kuvvetleri sıfıra eşitlenir. Bu da bize $a_{k,}\,(k=0,1,...,N)$, k ve V ifadelerini içeren cebirsel denklem sistemini verir. Bu denklem çözüldüğünde kapalı formda bir analitik çözüm elde edilir.

Birçok durumda N değeri 2 olarak bulunduğundan, $N=2$ olması durumda

1. $S(Y)=F(Y)=b_0(1-Y)(1+b_1Y)=(1-Y)T(Y)$ ve $T(1)\neq 0$ $\qquad (7a)$

ve

2. $S(Y)=G(Y)=d_0(1-Y)^2$ $\qquad (7b)$

şeklinde olası iki çözüm elde edilir.

7-Uzun hesaplama işlerinden kurtulmak isteniyorsa bir ön kabul olarak

$$\xi\to\pm\infty \text{ için } \quad U(\xi)\to 0 \quad \text{ve} \quad \frac{d^nU(\xi)}{d\xi^n}\to 0 \quad (n=1,2,3,...) \tag{8}$$

sınır koşulları eklenebilir.

Eğer çözüm $\xi\to+\infty$ ($Y\to+1$) için yok oluyorsa oluyorsa (6) serisi

$$F(Y)=(1-Y)^m\sum_{n=0}^{N-m}a_nY^n \qquad , \quad m=1,...,N \tag{9}$$

şeklindedir.

Eğer çözüm $\xi\to-\infty$ ($Y\to+1$)için yok oluyorsa (6) serisi

$$F(Y)=(1+Y)^m\sum_{n=0}^{N-m}a_nY^n \qquad , \quad m=1,...,N \tag{10}$$

şeklindedir. Her iki durumda da şok dalgası biçiminde bir çözüm bulunur.

Eğer çözüm her iki taraftan da yok oluyorsa; yani $\xi\to\pm\infty$ ($Y\to\pm1$) yok oluyorsa (6) serisi

$$F(Y)=(1-Y)^p(1+Y)^q\sum_{n=0}^{N-p-q}a_nY^n \qquad , \quad p(\neq 0)+q(\neq 0)=2,...,N \tag{11}$$

şeklindedir. Bu durumda ise tek dalga profili oluşur.

Bununla beraber her bir durum için her zaman tam sonuç elde etmeyebiliriz.

Ayrıca, $S(Y)$ ifadesinin bazı kısıtlamalarla gösterilmesi bize yönlendirilmiş dalganın hızını belirlememizi sağlar. Bu hızın elde edilmesinin pertürbasyon tekniğinde önemli bir yeri vardır (Malfliet and Hereman (1996).

Şimdi Tanh yöntemini çok iyi bilinen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde gösterelim.

2.2. Burgers Denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{12}$$

şeklinde ifade edilen Burgers denklemi en önemli lineer olmayan yayılım denklemlerinden biridir.

Bu denklem akışkanlar dinamiğindeki yayılan dalgalar için en basit lineer olmayan denklem modelidir. İlk olarak Burger tarafından bir boyutlu türbülansı tanımlamak için kullanılmıştır (Debnath, 1997) .

Öncelikle $u(x,t)=U(\xi)=U[k(x-Vt)]$ değişken değiştirmesi yapılarak kısmi diferansiyel denklem

$$-V\frac{dU(\xi)}{d\xi}+U(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi}-ak\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}=0 \tag{13}$$

adi diferansiyel denklemine dönüştürülür. Bu denklemin bir kez integrali alınırsa,

$$-VU(\xi)+\frac{1}{2}U(\xi)^2-ak\frac{dU(\xi)}{d\xi}=C \tag{14}$$

elde edilir. Bu denklemde integral sabiti $C=0$ alınarak $Y=\tanh(\xi)=\tanh[k(x-Vt)]$ olmak üzere $U(\xi)=S(Y)=\sum_{n=0}^{N}a_nY^n$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$-VS(Y)+\frac{1}{2}S(Y)^2-ak(1-Y^2)\frac{dS(Y)}{dY}=0 \tag{15}$$

elde edilir. Bu denklemde (6) açılımı yerleştirildiğinde

$$-V\sum_{n=0}^{N}a_nY^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}a_n^2Y^{2n}-ak\sum_{n=0}^{N}na_nY^{n-1}+ak\sum_{n=0}^{N}na_nY^{n+1}=0 \tag{16}$$

ifadesine ulaşılır.

Bu yerleştirmeden sonra, (16) denkleminde ikinci terimde Y^{2N} ve son terimde Y^{N+1} ifadeleri oluşur. $2N=N+1$ eşitliğinden $N=1$ bulunur. Buradan, $S(Y)=b_0(1-Y)$ şeklinde bir tek çözüm elde edilir. Bu çözüm (15) denkleminde yerine konursa

$$-V\left[b_0(1-Y)\right]+\frac{1}{2}b_0^2(1-Y)^2-ak(1-Y^2)(-b_0)=0 \tag{17}$$

elde edilir. Bu ise

$$-V\left[b_0(1-Y)\right]+\frac{1}{2}b_0^2(1-Y)^2-ak(1-Y^2)(-b_0)=0 \tag{18}$$

biçiminde yazılır. Bu denklemde $(1-Y)$çarpanını sadeleştirdiğimizde

$$-Vb_0+\frac{1}{2}b_0^2(1-Y)+akb_0(1+Y)=0 \tag{19}$$

bulunur. Burada $Y\rightarrow 1$ limit değeri alınırsa

$$-Vb_0 + akb_0(1+1) = 0 \qquad (20a)$$

$$V = 2ak \qquad (20b)$$

hız değeri elde edilir. (19) denklemi açık bir şekilde yazılırsa

$$ak - V + \frac{1}{2}b_0 + \left(ak - \frac{1}{2}b_0\right)Y = 0 \qquad (21)$$

olur. Buradaki tüm katsayılar;

Y^0 terimli katsayılar: $ak - V + \frac{1}{2}b_0 = 0$ $\qquad (22a)$

Y^1 terimli katsayılar: $ak - \frac{1}{2}b_0 = 0$ $\qquad (22b)$

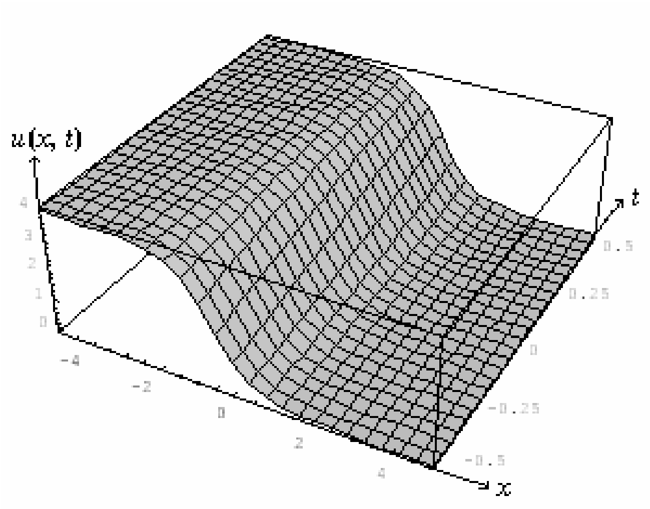
sıfırı eşitlenip çözüldüğünde

$$b_0 = V = 2ak \qquad (23)$$

bulunur. Buradan, şok dalgasının bir çözümü

$$F(Y) = 2ak(1-Y) = 2ak[1 - \tanh(k(x - Vt))] \qquad (24)$$

biçimindedir.



Şekil 1.

(24) denkleminin $x = [-5,5]$, $t = [-0.5, 0.5]$ ve $a = k = V = 1$ için grafiği.

2.3. Korteweg-de Vries (KdV) Denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \qquad (25)$$

şeklinde yazılır. Buradaki b sabittir. Bu denklem sıvı dinamiğinde dikdörtgen şeklindeki bir kanaldaki sığ su dalgalarını tanımlamak için kullanılır. İlk olarak iki Hollandalı bilim adamı D.J.Korteweg ve G. de Vries tarafından birleşik yönlü sığ su dalgalarının yayılımını göstermek için kullanılmıştır. Bu denklemin tam çözümüne *soliton*[1] denir (Debnath, 1997).

Bu denklemi Tanh yöntemiyle çözelim. Öncelikle $u(x,t)=U(\xi)=U[k(x-Vt)]$ değişken değiştirmesi yapılır.

$$-V\frac{dU(\xi)}{d\xi}+U(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi}+bk^2\frac{d^3U(\xi)}{d\xi^3}=0 \qquad (26)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin bir defa integralini alınırsa (26) denklemi

$$-VU(\xi)+\frac{1}{2}U(\xi)^2+bk^2\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}=C \qquad (27)$$

denklemine dönüşür. Buradaki integral sabitini $C=0$ alıp, $Y=\tanh(\xi)=\tanh\left[k(x-Vt)\right]$ olmak üzere $U(\xi)=S(Y)=\sum_{n=0}^{N}a_nY^n$ değişken değiştirmesini yapılırsa

$$-VS(Y)+\frac{1}{2}S(Y)^2+bk^2\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)\frac{dS(Y)}{dY}\right]=0 \qquad (28)$$

denklemi elde edilir. Daha sonra bu denklem tanh fonksiyonuna bağlı kuvvet serileri şeklinde yazıldığında $2N=N+2$ eşitliğinden; $N=2$ bulunur. $N=2$ değeri için (6) denklemi yazılırsa, uygun çözümlerden biri bulunabilir.

---

[1] 1965 yılında Zabusky ve Kruskal tek dalgaların (Solitary waves) birbiriyle olan etkileşimlerini ve başlangıç durumlarını korumalarını araştırdılar. Zabusky ve Kruskal KdV denklemi üzerindeki nümerik araştırmaları sırasında; çarpıştıktan sonra hızlarını ve şekillerini koruyan partikül benzeri bir davranış gösteren dalgalar buldular. Bu dalgalara soliton adını verdiler.

Soliton kavramı Wadati tarafından şöyle tanımlanmıştır:

1-Özelliklerini (şeklini, hızını vb.) kaybetmeden ilerleyen yöresel bir dalgadır.

2-Çarpışmalarda özeliklerini koruyan yöresel dalgalardır. Bunun anlamı soliton partikül benzeri bir özelliğe sahiptir.

Fizikte –on son eki partikül benzeri davranış gösteren kavramlarda (örneğin foton, peakon, compacton vb.) görülmektedir. Solitonlar klasik olarak analitik çözümlerdir (Kakutani and Kawahara, 1970).

$S(Y)=F(Y)=b_0(1-Y)(1+b_1Y)$ çözümünü ele alalım. Bu ifade (28) denklemine yerleştirildiğinde

$$-Vb_0(1-Y)(1+b_1Y)+\frac{1}{2}b_0^2(1-Y)^2(1+b_1Y)^2+$$

$$bk^2(1-Y^2)\frac{d}{dY}\left[(1-Y^2)(b_0b_1-b_0-2b_0b_1)\right]=0 \qquad (29)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin $Y\to 1$ limit değeri alınırsa

$$V=4bk^2 \qquad (30)$$

hızı elde edilir. (29) denklemindeki tüm katsayılar sıfıra eşitlendiğinde,

$$b_0=12bk^2 \quad \text{ve} \quad b_1=1 \qquad (31)$$

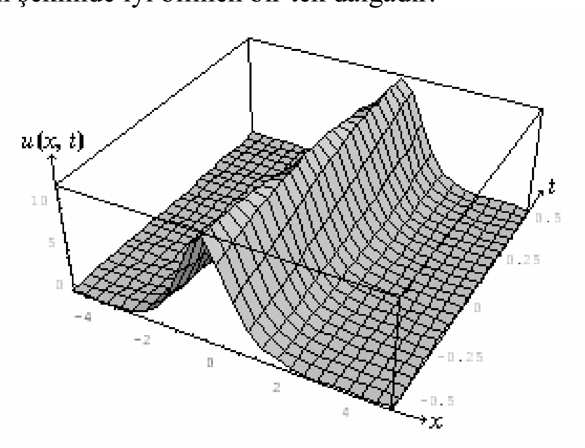
bulunur. Buradan

$$F(Y)=12bk^2(1-Y)(1+Y) \quad \text{ve} \quad V=4bk^2 \qquad (32a)$$

çözümü bulunur. Ayrıca $(1-Y^2)=\sec h^2$ olduğundan

$$u(x,t)=12bk^2\sec h^2k(x-Vt) \qquad (32b)$$

fonksiyonu çan şeklinde iyi bilinen bir tek dalgadır.



Şekil 2.
$(32b)$denkleminin $x=[-5,5]$, $t=[-0.5,0.5]$ ve $b=k=V=1$ için grafiği.

KdV denkleminin diğer çözümünü bulmak için (28) denklemine $S(Y)=G(Y)=d_0(1-Y)^2$ ifadesini yerleştirilirse KdV denkleminin ikinci çözümü olmadığı görülür.

3. Tanh Yönteminin Klasik Boussinesq (CB) Denklemine Uygulanması

Tanh yöntemi basit bir dönüşüm ile lineer olmayan reaksiyon-yayılma denklem sistemlerinin yönlendirilmiş dalga çözümlerinin elde edilmesinde de kullanılabilir.

Tanh yöntemini denklem sistemlerine uygularken farklı bir işlem uygulamayacağız. Sadece bu denklemlerde tek bağımlı değişken yerine u ve z şeklinde iki bağımlı değişken ele alacağız.

Şimdi bu yöntemi Klasik Boussinesq (CB)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1+\zeta\right)u\right]=-\frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \zeta}{\partial x}=0 \tag{33}$$

denklemleri üzerinde uygulayalım (Li, Ma and Zhang , 2000). Burada iki farklı fonksiyon olduğundan, bu fonksiyonların her biri için $\xi = k\left(x-Vt\right)$ olmak üzere,

$$\zeta\left(x,t\right)=\zeta\left(\xi\right)$$

$$u\left(x,t\right)=U\left(\xi\right) \tag{34}$$

değişken değiştirmesi yapıldığında,

$$-V\frac{d\zeta(\xi)}{d\xi}+\frac{dU(\xi)}{d\xi}+U(\xi)\frac{d\zeta(\xi)}{d\xi}+\zeta(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi}+\frac{1}{4}k^2\frac{d^3U(\xi)}{d\xi^3}=0 \tag{35}$$

$$-V\frac{dU(\xi)}{d\xi}+U(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi}+\frac{d\zeta(\xi)}{d\xi}=0 \tag{36}$$

denklemleri elde edilir. (35) ve (36) denklemlerinin bir kez integralleri alınıp, integral sabiti $C=0$ alınırsa,

$$-V\zeta(\xi)+U(\xi)+U(\xi).\zeta(\xi)+\frac{1}{4}k^2\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}=0 \tag{37}$$

$$\zeta(\xi)=VU(\xi)-\frac{1}{2}U(\xi)^2 \tag{38}$$

denklemleri elde edilir. Daha sonra (38) denklemi (37) denklemine yerleştirildiğinde

$$4\left(1-V^2\right)U(\xi)+6U(\xi)^2-2U(\xi)^3+\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}=0 \tag{39}$$

adi diferansiyel denklemi bulunur. Daha sonra $Y = \tanh(\xi)$ dönüşümü yapılırsa,

$$4\left(1-V^2\right)S(Y)+6S(Y)^2-2S(Y)^3+\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)\frac{dS(Y)}{dY}\right]=0 \tag{40}$$

yazılır. Bu denklemde $Y = \tanh(\xi) = \tanh\left[k\left(x-Vt\right)\right]$ olmak üzere $U(\xi) = S(Y) = \sum_{n=0}^{N} a_n Y^n$ açılımı yerleştirilerek, yüksek dereceli Y terimlerinin eşitliğinden, $3N = N+2$ Ş $N=1$ bulunur. Daha öncede belirtildiği üzere $S(Y) = d_0(1-Y)$ şeklinde çözüm olabilir. Öncelikle bu ifade (40) denkleminde yazılırsa,

$$4\left(1-V^2\right)d_0(1-Y)+6\left(d_0(1-Y)\right)^2-2\left(d_0(1-Y)\right)^3+$$

$$\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}\left[\left(1-Y^2\right)\left(-d_0\right)\right]=0 \tag{41}$$

ifadesi bulunur. Uygun sadeleştirmeler yapıldığında

$$d_0 = V^2 - 1 \tag{42}$$

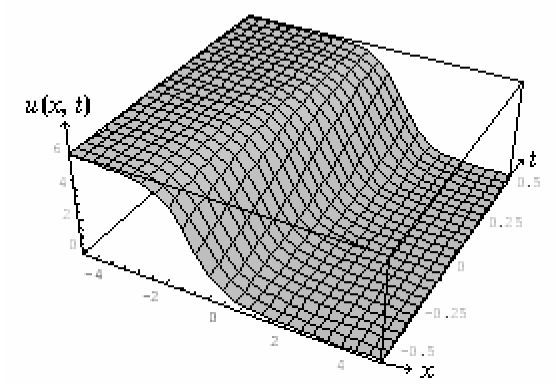
bulunur. Böylece

$$U(\xi) = S(Y) = \left(V^2-1\right)\left(1-Y\right) \tag{43}$$

çözümü elde edilir. Bu eşitlik (38) denklemine yerleştirilirse

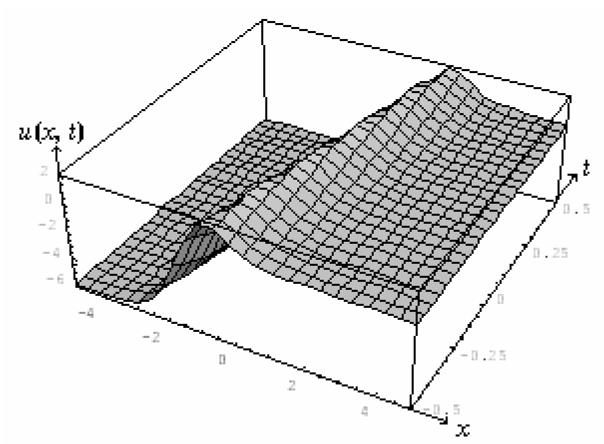
$$\zeta(\xi) = V\left(V^2-1\right)\left(1-Y\right)-\frac{1}{2}\left(\left(V^2-1\right)\left(1-Y\right)\right)^2 \tag{44}$$

$\zeta(\xi)$ fonksiyonu elde edilir.



Şekil 3

(43) denkleminin $x = [-5,5]$, $t = [-0.5, 0.5]$ ve $V = 2$ için grafiği.



Şekil 4
(44) denkleminin $x = [-5,5]$, $t = [-0.5, 0.5]$ ve $V = 2$ için grafiği.

SONUÇ

Bu çalışmada, özellikle yayılımları içeren lineer olmayan dalga denklemlerinin çözümünde Tanh yöntemi kullanıldı. Bu yöntemin temeli yönlendirilmiş dalga çözümlerinin hiperbolik tanjant fonksiyonu (Tanh) biçiminde gösterilmesine dayanır. Bu yöntemle uzun cebirsel işlemlerden kurtulmuş oluruz. Ayrıca, sınır koşullarının uygulanmasıyla hız daha kolay bir şekilde elde edilir.

Son bölümde, Tanh yöntemi Klasik Boussinesq denklemine uygulanarak çözülebileceği gösterildi.

Bu yönteme dayanılarak, günümüzde birçok lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümünü araştıran çok güçlü sembolik bilgisayar yazılımları geliştirilmiştir. Bu programlar yardımıyla otomatik olarak tanh, sech, cn veya sn fonksiyonları şeklindeki polinomların yönlendirilmiş dalga çözümleri hesaplanabilir (Malfliet and Hereman, 2005).

Kaynaklar

Abdou, M.A. (2007). The extended tanh method and its applications for solving nonlinear physical models, *Applied Mathematics and Computation 190*, 988–996.

Ablowitz, M.J., Clarkson, P.A. (1991). *Soliton, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*,Cambridge University Press, New York.

Ablowitz, M., Kaup, D., Newell, A. , Segur, H. (1974). The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems, *Stud. Appl. Math.53*, 249–315.

Bluman, G.W., Kumei, S.(1989). *Symmetries and Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.

Cariello, F., Tabor, M (1989). *Physica D 39*, 77.

Chen, Y., Li, B., Zhang, H.Q.(2002). *Commun. Theor. Phys. 38*, 261.
Chen, Y., Li, B., Zhang, H.Q.(2002). *J Phys A: Math. Gen. 35*, 8253.
Chen, Y., Zheng, Y.(2003). Generalized extended tanh-function method to construct new explicit exact solutions for the approximate equations for long water waves*, Int. J. Mod. Phys. C 14* (4) .
Debnath, L. (1997). *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientist and Engineers*, Birkhäuser, Boston .
Elwakil, S.A., El-labany, S.K., Zahran, M.A. and Sabry, R.(2002*). Phys. Lett.299*, 179.
Fan, E.(2000). Extented tanh-function method and its applications to nonlinear equations. *Phys. Lett. A*.277,212.
Fan, E. (2002). *Comput. Math. Appl. 43* , 671.
Fan, E., Zhang, J., Benny, Y.C.(2001). *Hon Phys. Lett. A 291*, 376.
Gao, Y.T., Tian, B. (2001). *Comput. Phys. Commun. 133*, 158.
Gu, C.H and et al, (1990). *Soliton Theory and its Application*, Zhejiang Science and Technology Press,Zhejiang.
Hirota, R. (2004). *The Direct Method in Soliton Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.
Kakutani, T. and Kawahara, T.(1970). *J. Phys. Soc. Japan 29*, 1068
Khater, A.H., Malfiet, W., Callebaut, D.K., and Kamel, E.S.(2002). *Chaos Soliton. Fract. 14*, 513.
Li, Y., Ma, W. and Zhang Jin, E.(2000).Darboux transformation of classical Boussinesq system and its new solutions, *Phys. Lett. A, 275*, 60-66.
Li Z.B, Liu Y.P. (2002). *Comput Phys Commun ,148*,56.
Li Z.B, Liu Y.P.(1993). *J. Phys. A: Math. Gen. 26* , 6027.
Lou, S., Huang, G., Ruan, H.(1991).*J. Phys. A: Math. Gen. 24* , L584
Malfliet, W. (1992). Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, *Am. J. Phys. 60*, 650-654.
Malfliet, W. and Hereman, W.(1996). The tanh method: I. Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations, *Physica Scripta 54*, 563-568
Malfliet, W. and Hereman, W.(1996). The tanh method: II. Perturbation technique for conservative systems, *Physica Scripta 54*, 569-575 .
Malfliet, W.(2004). The tanh method: a tool for solving certain classes of nonlinear evolution and wave equations, *J. Comp. Appl. Math 164-165*, 529-541 .
Malfliet, W. and Hereman W. (2005).The Tanh Method: A Tool to Solve Nonlinear Partial Differential Equations with Symbolic Software, 9th World Multiconference on Systemics,Cybernetics and Informatics (WMSCI2005) , Orlando , Florida,July 10-13, pp.165-168.
Matveev, V.B., Salle, M.A. (1991). *Darboux Transformation and Soliton*, Springer,Berlin.
Nuseir, A. (1994). Symbolic Computation of Exact Solitions of Nonlinear Partial Differential Equations Using Direct Methods ", thesis of Doctor of Philosophy.
Olver, P.J. (1986). *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.
Parkes, E.J., Duffy, B.R.(1996). *Phys. Lett. A 214*, 271.
Parkes, E.J., Duffy, B.R. (1997). Travelling solitary wave solutions to a compound KdV-Burgers equation, *Phys. Lett. A 229*, 217.

Tanoğlu, G. (2007). Solitary wave solution of nonlinear multi-dimensional wave equation by bilinear transformation method, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 12*, 1195–1201.

Tian, B., Gao, Y.T. (2002). *Z. Naturforsch. A 57*, 39.

Wang, M.L. (1996). Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics, *Phys.Lett. A216*,67.

Wazwaz, A.M.(2002). *Partial Differential Equations: Methods and Applications*, Balkema, The Netherlands.

Wazwaz, A.M. (2004). The tanh method for travelling wave solutions of nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation. 154(3*), 713-723.

Wazwaz, A.M. (2005). The tanh and the sine–cosine methods for compact and noncompact solutions of the nonlinear Klein–Gordon equation, *Applied Mathematics and Computation 167*, 1179–1195

Yan, Z.Y.(2001). New explicit travelling wave solutions for two new integrable coupled nonlinear evolution equations, *Phys. Lett. A 292*, 100.