

TEPKİ YÜZEYLERİNE POLİNOMAL YAKLAŞIM

Polynomial Approach to the Response Surfaces

Aziz HARMAN¹

Özet

Bu çalışmada, deneyci veya araştırmacıların kontrolündeki x vektörü ile gösterilen bir veya daha fazla değişkenden etkilenen β bilinmeyen parametreler vektörü ve deneysel hataların sıfır ortalama σ^2 varyansı ile normal dağıldığı varsayımı altında,

$E(y) = \eta = f(x, \beta)$ şeklinde yazılabilen gerçek tepki yüzeyinin uygun koşullar altında Taylor açılımından yararlanarak polinomal yaklaşımı ve her durumda bir diferansiyel denklemin genel çözümü olduğu cebirsel olarak gösterilmiştir.

Çalışılan uygulamada, KHURI, A, and John A. CORNEL (1987) alıştırma 5-6'daki verilen veriler kullanılmıştır. Verilerin durumuna göre polinomal modeller uyarlanmış, durağan noktada maksimum ürün elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Tepki, Yüzey, Tasarım, Optimizasyon

Abstract

In this Study the polynomial approximation is applied by Taylor expression to the equation of the expected res-ponse surface, the equation $E(y) = \eta = f(x, \beta)$ is effected by one or more variables is expressed by the x vector that is Controlled by the experimenters or the reserches, and β is Unknown parameters Vector, and the Standart errors are under normal distribution assumption. $\varepsilon \approx N(0, \sigma^2)$ as a result, it is shown algebraicaly that the equation is a general solution of a differantial equation in all cases. In the aplication KHURI.A. and J.A.CORNEL- 1987 (excersies 5-6) that is studied, Polynomial Models are applied with respect to data, and maximum product is attainaed at the stationary, point and Lack of fit is tested.

Key words. Response, Surface, Design, Optimization.

¹ Yrd.Doç.Dr.,D.Ü.Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi ABD, Diyarbakır, aharman@dicle.edu.tr.

GİRİŞ

Tepki yüzeyi yöntem bilimi ilk olarak Box ve Wilson (1951) de incelenmiş, bunu Box ve Hunter(1957) izledi. Vinning ve Myers (1990) da ikili (dual) tepki yaklaşımını kullandılar. Onlar, öncelikle birincil ve ikincil tepki yüzeylerine, ikinci dereceden modeller uyarladılar.

Dennis K.J.LIN ve Wanzhu Tu (1995) te Vinnig ve Myers'in optimizasyon yöntemini daha da geliştirdiler.

Tepki yüzeyi tasarımı, deneysel çalışmalarda elde edilen verileri kullanarak regresyon yardımıyla, tepki değişkeni ve etki faktörleri arasındaki ilişkinin tipini bir matematiksel model ile belirlemektedir. Ölçümler içeren bütün deneylerde deneysel hata vardır. Faktör düzeylerinin herhangi bir kısmı ve doğal olarak gözlenmiş tepki değeri η , den farklıdır. Gerçek tepkiden sapma,

$Y = \eta + \varepsilon$ Şeklinde yazılır. Burada, Y, tepkinin gözlenmiş değeri, ε deneysel hataları η ise, tepkinin beklenen değerini belirtir. X_1, X_2, \dots, X_k gibi k tane nicel faktör düzeylerine bağlı η gerçek tepkisinin değeri, verilen herhangi bir faktör düzeyi için,

$$\eta = f(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (1)$$

İfadesini sağlar. η , x_i 'lerin sürekli bir fonksiyonu kabul edilir ve gerçek tepki fonksiyonu olarak bilinir. Eğer $\mathbf{x}; X_1, X_2, \dots, X_k$ 'nın bir sütun vektörü ise, gerçek tepki fonksiyonu,

$$\eta = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

şeklinde yazılabilir.

Tepki fonksiyonlarına yaklaşım.

Bazı fiziksel çalışmalarda X_1, X_2, \dots, X_k tepkinin ilk karışımları, sıcaklıkları ve basınçları ölçen veri değişkenleri $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ aktivasyon enerjileri termal iletkenlik gibi şeyleri ölçen bazı fiziksel parametreler ve f, x' in sürekli bir fonksiyonu olmak üzere,

$$E(y) = \eta = f(x, \beta)$$

ifadesi mekanik model olarak bilinir.

Lemma. Mekanik model diferansiyel veya entegral denklemin bir çözümüdür.

İspat. Hal-1: Bir $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ vektörünü keyfi bir parametre olarak içeren $\eta = f(x, \beta)$ modeli verilsin. Bu durumda $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ gibi değişkenlerin vektörü ve $f(x, \beta)$, x 'in sürekli bir fonksiyonu olmak üzere,

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = f'(x, \beta) \text{ ve } \eta = f(x, \beta)$$

denklemleri arasında β 'nin yok edilmesiyle $f(x, \eta, \eta') = 0$ şeklinde birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklem bulunur.

Hal-2 : $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ parametrelerini ve x_1, x_2, \dots, x_k bağımsız girdi değişkenlerini içeren $\eta = f(x_1, x_2, \dots, x_k; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ mekanik modeli $i = 1, 2, \dots, k$ için x_i değişkeninin sürekli bir fonksiyonu ise modelde bağımsız değişken sayısı birden fazla olduğu için η 'nin her bir x_i 'ye göre kısmi türevleri alınır. Verilen model ile aşağıdaki sistem oluşturulabilir.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial \eta}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \\ \eta = f(x_1, x_2, \dots, x_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) \end{array} \right\} \quad (3)$$

denklem sisteminin ortak çözümü ile $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ parametreleri yok edildi. Bu durumda parametrelerden arındırılmış,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k, \frac{\partial \eta}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}) = 0$$

formunda bir kısmi diferansiyel denklem elde edilir. Sonuç olarak mekanik model her iki durumda bir diferansiyel denklemin genel çözümüdür.

Tepki yüzeyinin polinomal gösterimi.

Tek bir x_1 değişkenli f fonksiyonu için tepki fonksiyonu, $\eta = f(x_1)$ olsun. Eğer $f(x_1)$ düzgün sürekli bir fonksiyon ise herhangi bir x_{10} noktası civarında Taylor serisinin yerel yaklaşımı olarak temsil edilir.

$\eta = f(x_1)$ fonksiyonunun $x_1 = x_{10}$ noktasında Taylor serisine açarak,

$$\eta = f(x_{10}) + (x_1 - x_{10}) f'(x_{10}) + \frac{1}{2!} (x_1 - x_{10})^2 f''(x_{10}) \text{ bulunur. Burada}$$

$f'(x_{10})$, $f''(x_{10})$ sırasıyla $f(x_1)$ fonksiyonunun x_{10} noktasındaki hesaplanmış birinci ve ikinci türevleridir. Bu seri $\eta = f(x_1) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_{11} x_1^2 + \dots$ formunda bir polinoma indirgenebilir.

Burada β_0 , β_1 ve β_{11} katsayıları, $f(x_1)$ 'in x_{10} , da ki değeri ve bu noktadaki hesaplanmış türevlerinin değerlerine bağlıdır.

Yalnız birinci dereceden terimlerle $\eta = \beta_0 + \beta_1 x_1$ formunda düzgün doğrusuyla birinci dereceden model bulunur. İkinci dereceden terimlerin kullanılmasıyla $\eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_{11} x_1^2$ formunda parabol denklemi elde edilir.

x_1 ve x_2 gibi iki faktör düzeyi için polinomal denklem,

$$\eta = f(x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots \text{ şeklinde verilir.}$$

Eğer bu denklem yalnız birinci dereceden terimleri içeriyorsa

$\eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ formunda, birinci dereceden bir polinomal modele indirgenir. Polinom denklem ilk altı terimden oluşuyorsa ikinci dereceden model adını alır.

Bu denklemdeki $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_2, \dots$ parametreleri regresyon katsayıları olarak adlandırılır. x_1 ve x_2 değişkenleri deneysel yada regresyon fonksiyonunun girdi değişkenleridir.

$x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$ noktaları deneysel bir nokta ise bu noktadaki, $f(x_1, x_2)$, β_0 katsayısını verir. β_1, β_2 katsayıları, $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ve $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ kısmi türevlerinin $x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$ noktasında hesaplanmış değerler olup modelin birinci dereceden etkileridir.

$\beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{12}$ katsayıları $\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, $\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ ve $\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ kısmi türevlerinin sırasıyla $x_1 = x_2 = 0$ noktasında hesaplanmış değerleri olup modelin ikinci dereceden etkileri olarak bilinir. Benzer olarak $\beta_{111}, \beta_{222}, \dots$ vb. gibi etkiler de bulunabilir.

Birinci dereceden model.

x_1, x_2, \dots, x_k gibi girdi değişkenlerinin birinci dereceden modelinin genel formu

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \varepsilon \quad (4)$$

şeklinindedir. Burada Y, gözlenebilen tepki değişkeni, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ bilinmeyen parametreler ve ε ise rastgele bir hata terimidir. Eğer ε sıfır ortalamaya sahip ise (4) denkleminde modelin açıklayıcı kısmı, η ile gösterilen tepkinin gerçek

ortalaması $E(Y) = \eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \varepsilon$ şeklindedir. Eğer tepki fonksiyonunun bağımsız değişkenlerin lineer bir fonksiyonu tarafından modellenmiş ise yaklaşım fonksiyonu birinci dereceden bir polinomal modeldir.

Birinci dereceden tasarımları oluşturmak için, birinci dereceden modelin N gözlem üzerinde matris formu aşağıdaki gibi yazabilir.

$$Y = x\beta + \varepsilon \quad (5)$$

burada, $N \geq k + 1$ olmak üzere Y , N gözlemin bir sütun vektörü, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)'$ $(k+1) \times 1$ boyutlu bir bilinmeyen parametreler vektörü $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)'$ $N \times 1$ boyutlu hata vektörü, X' de $N \times (k+1)$ boyutlu girdi değişkenlerinin bir matrisidir. (4) modelindeki deneysel hataların sıfır ortalama ve σ^2 varyansı ile normal dağıldığı ve X matrisinin tam sütun rankına sahip olduğu varsayımı ile β 'nin en küçük kareler kestiricisi.

$$b = (X'X)^{-1}X'Y \quad (6)$$

şeklinde olup, en iyi lineer yansız kestiricisidir. Ayrıca b 'nin varyans-kovaryans matrisi ise,

$$\text{Var}(b) = \text{Var}[(X'X)^{-1}X'Y] = (X'X)^{-1} \cdot \sigma^2 \quad (7)$$

şeklinde dir. Burada x_i girdi değişkenlerini aşağıdaki gibi kodlayacağız.

$$X_{ui} = \frac{2(X_{ui} - \bar{X}_i)}{R_i}, \quad u=1,2,\dots,N, \quad i=1,2,\dots,k \quad (8)$$

burada, $\bar{X}_i = \sum_{u=1}^N \frac{X_{ui}}{N}$ ve R_i en yüksek ve en düşük konumlandırmalar

arasındaki farktır. Bu durumda M tane gözlem altında kodlanmış değerlerin değeri, $i = 1, 2, 3, \dots, k$ için,

$\bar{X}_i = \sum_{u=1}^N \frac{X_{ui}}{N}$ eşitliğini sağlar. (8) dönüşümdeki, $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k$: girdi

değişkenlerin aritmetik ortalamasını, X_1, X_2, \dots, X_k kodlanmış değişkenleri için

$(x_1, x_2, \dots, x_k) = (0, 0, \dots, 0)$ noktası tasarımın merkezi olarak alınacaktır, $i = 1, 2$

, $3, \dots, k$ için, kodlanmış değerler $\sum_{u=1}^N x_{ui} = 0$ eşitliğini sağlar.

İkinci dereceden modeller.

Araştırmacılar genellikle gerçek tepki yüzeyinin şekli hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıklarından ilk aşamada tepki değerlerine birinci dereceden bir model uyarlamakla deneysel süreci başlatırlar. Ancak, yüzeyde eğriselliğin varlığı durumunda veya uyarlanmış birinci dereceden modelde uyum eksikliği bulunması

halinde, birinci dereceden modele yüksek dereceden terimler ekleyerek deneysel süreci devam ettirirler. Bu yeni yüksek dereceli model,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \dots \quad (9)$$

formunda ikinci dereceden bir model olacaktır. Burada x_1, x_2, \dots, x_k girdi değişkenleri Y, bu değişkenlerden etkilenen tepki, $i, j = 1, 2, \dots, k$ için $\beta_0, \beta_i, \beta_{ij}$ bilinmeyen parametreler ve ε rastgele hatadır.

UYGULAMA

Birincisi standart bir N-F-K kombinasyonu ve diğeri tamamlayıcı bir besleme olan iki gübrenin verildiği parsel başına libre (454 gr.) olarak ölçülmüş yer fıstığı için gübreden etkilenen parsellere uygulanmıştır. Bir parselde uygulanmış her gübrenin miktarının düzeyi (lb/parsel) bir merkezi birleşik döndürülebilir tasarımın koordinat konumlandırmaları ile belirlenmiştir. Her deneysel kombinasyonun iki tekrarında bulunan yer fıstığı olarak elde edilmiş hasat miktarı verilerinin tablosu aşağıdaki gibidir.

Gübre1	Gübre2	Ürün(lb/par.)	Doğal x_1	Doğal x_2	Kod. x_{1i}	Kod. x_{2i}	Y
50	15	7,52-8,12	120	15	1	-1	12,37-11,84
120	15	12,37-11,84	50	25	-1	1	13,55-12,35
50	25	13,55-12,35	120	25	1	1	16,48-15,32
120	25	16,48-15,32	50	15	-1	-1	7,52-8,12

$$\begin{aligned}\bar{X}_1 &= \frac{50+120}{2} = 85, & \bar{X}_2 &= \frac{15+25}{2} = 20 \\ X_{11} &= \frac{2(50-85)}{120-50} = -1, & X_{12} &= \frac{2(50-85)}{120-50} = -1 \\ X_{12} &= \frac{2(120-85)}{120-50} = 1, & X_{22} &= \frac{2(25-20)}{25-15} = 1\end{aligned}$$

tepki yüzeyine $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$ gibi birinci dereceden model ile yaklaşalım. Burada

β_i ' ler bilinmeyen parametrelerdir.

$$Y = \begin{bmatrix} 7,52 \\ 8,12 \\ 12,37 \\ 11,84 \\ 13,55 \\ 12,35 \\ 16,48 \\ 15,32 \end{bmatrix}_{8 \times 1}, \quad X = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & x_1 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}_{8 \times 3}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}_{3 \times 1}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \end{bmatrix}_{8 \times 1}$$

$b = \hat{\beta}$ olmak üzere β ' nin en küçük kareler kestiricisi,

$$b = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{bmatrix} 12,19375 \\ -0,28625 \\ 7,11375 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

Olduğundan $\hat{Y} = 12,19375 - 0,28625X_1 + 7,11375X_2$ dir. Birinci ve ikinci gübrenin kodlanmış değerlerine karşılık gelen birinci dereceden modeldir.

$$\text{Kareler toplamı} = Y'Y - \frac{(1'Y)^2}{8} = \mathbf{11368,895} \quad 8-1=7 \text{ s.d. ile}$$

$$\text{Regresyon kareler toplamı} = b'X'Y - \frac{(1'Y)^2}{8} = \mathbf{405,449} \quad 3-1=2 \text{ s.d. ile}$$

$$\text{Kalan kareler toplamı} = Y'Y - b'X'Y = \mathbf{10963,396} \quad 8-3=5 \text{ s.d. ile}$$

Saf hata kareler toplamı=

$$\frac{1}{2}[(7,52 - 8,12)^2 + (12,37 - 11,84)^2 + (13,55 - 12,35)^2 + (16,48 - 15,32)^2] = \mathbf{1,71325} \quad 4 \text{ s.d. ile}$$

$$\text{Uyum eksikliği kareler toplamı} = \text{Kalan kareler toplamı} - \text{Saf hata kareler toplamı} \\ = 10963,396 - 1,71325 = 10961,683 \quad 5-1=4 \text{ s.d. ile}$$

Elde edilen yer fıstığı ürünü verilerine uyarlanmış birinci dereceden model için ANOVA tablosu:

Kaynak	Serbestlik der.	Kareler toplamı	Ortalama kare	F
Regresyon	2	405,449	202,7245	0,092
Hata	5	10963,396	2192,6792	
Uyum Eksikliği	1	10963,683	10963,683	
Saf hata	4	1,71325	0,4283125	

$$F = \mathbf{Hata!} = \mathbf{Hata!} = 0,092 < F_{0,01,2,5} = 13,27$$

olduğundan birinci dereceden modelde uyum eksikliği yoktur. Bu nedenle tercih edilen gözlem değerleri için yukarıdaki birinci dereceden model yeterlidir. Ancak araştırmada elde edilen veriler aşağıdaki gibi ise :

Doğal	Kodlanmış		Ürün (lb/pars.)		Tek.2
	Gübre 1	Gübre 2	x ₁	x ₂	
50	15	-1	-1	7,52	8,12
120	15	1	-1	12,37	11,84
50	25	-1	1	13,55	12,35
120	25	1	1	16,48	15,32

35,5	20	$-\sqrt{2}$	0	8,63	9,44
134,5	20	$\sqrt{2}$	0	14,22	12,59
85	12,9	0	$-\sqrt{2}$	7,90	7,33
85	271	0	$\sqrt{2}$	16,49	17,40
85	20	0	0	15,73	17,00

Kodlanmış değerler,

$$X_i = \frac{2(X_i - \bar{X}_i)}{R_i} \text{ ve}$$

$$R_1 = 120 - 50, \quad \bar{X}_1 = \frac{120 + 50}{2} = 85$$

$$R_2 = 25 - 15, \quad \bar{X}_2 = \frac{15 + 25}{2} = 20$$

şeklinde yazılır.

$$Y = \begin{bmatrix} 7,52 \\ 8,12 \\ 12,37 \\ 11,84 \\ 13,55 \\ 12,35 \\ 16,48 \\ 15,32 \\ 8,63 \\ 9,44 \\ 14,22 \\ 12,59 \\ 7,90 \\ 7,33 \\ 16,49 \\ 17,40 \\ 15,73 \\ 17,00 \end{bmatrix}_{18 \times 1}, \quad X = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & x_1 & x_2 & x_1 x_2 & x_1^2 & x_2^2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{18 \times 6} \end{array}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_{12} \\ b_{11} \\ b_{22} \end{bmatrix}_{6 \times 1} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & -0,25 & -0,25 \\ 0 & 0,0625 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,125 & 0 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0 & 0 & 0,125 & 0,109 \\ -0,25 & 0 & 0 & 0 & 0,109 & 0,125 \end{bmatrix}_{6 \times 6} * \begin{bmatrix} 22,4 \\ 22,10 \\ 44,72 \\ 2,67 \\ 187,31 \\ 195,79 \end{bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} 16,43 \\ 1,3981 \\ 2,795 \\ 0,334 \\ -2,494 \\ -1,964 \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

$$\hat{Y} = 16,43 + 1,381X_1 + 2,795X_2 - 0,34X_1X_2 - 2,494X_1^2 - 1,96X_2^2$$

(0,845) (0,297) (0,297) (0,422) (0,495) (0,495)

Şeklinde yazılır. Parantez içindeki sayılar kestirilmiş standart hatalar olup aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\bar{Y} = \frac{224,41}{18} = 12,467$$

$$KT = (SST) = \sum_{u=1}^{18} (Y_u - \bar{Y})^2 = 2215,218$$

18-1=17 s.d. ile

$$KT_{SH} = (SS_{PE}) = \sum_{\ell=1}^n \sum_{u=1}^{Y_\ell} (Y_{u\ell} - \bar{Y}_\ell)^2 = 4,74$$

9 s.d. ile

$$RKT = (SSR) = \sum_{u=1}^{18} (\hat{Y}(x_u) - 12,467)^2 = 196,618 ;$$

5-1=4 s.d.

ile

$$HKT = (SSE) = \sum_{u=1}^{12} (Y_u - \hat{Y}(x_u))^2 = SST - SSR = 18,6$$

18-5=13

s.d. ile

$$\mathbf{F} = \frac{\text{SSR} / 4}{\text{SSE} / 13} = \frac{49,1545}{16,5552} = 2,969 \left. \vphantom{\frac{\text{SSR} / 4}{\text{SSE} / 13}} \right\} \Rightarrow \mathbf{F}_{\text{Hesap}} < \mathbf{F}_{\text{Tablo}}$$

$$\mathbf{F}_{0,01,4,13} = 7,70$$

Olduğundan kestirilmiş modelde uyum eksikliği yoktur.

OKH = (MSE) = **Hata!** SSE = **Hata!** = **Hata!**) 1,430 = S²

$$b_0 = 16,43 \Rightarrow \sqrt{c_{00}S^2} = \mathbf{Hata!} = 0,845$$

$$b_1 = 1,381 \Rightarrow \sqrt{c_{11}S^2} = \mathbf{Hata!} = 0,297$$

$$b_3 = 0,334 \Rightarrow \sqrt{c_{22}S^2} = \mathbf{Hata!} = 0,422$$

$$\sqrt{c_{33}S^2} = \mathbf{Hata!} = 0,495$$

$$\sqrt{c_{44}S^2} = \mathbf{Hata!} = 0,495$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \frac{b_{12}}{2} \\ \frac{b_{12}}{2} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,494 & -0,167 \\ -0,167 & -1,964 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -0,403 & 0,034 \\ 0,034 & -0,512 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1,381 \\ 2,795 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{Hata!} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{Hata!} \begin{bmatrix} -0,403 & 0,034 \\ 0,034 & -0,512 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,381 \\ 2,795 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,23 \\ -0,69 \end{bmatrix}$$

Olduğunda kestirmiş modelde uyum eksikliği yoktur. Durağan nokta dördüncü bölgededir.

Bu noktadaki tepki $\hat{Y}_0 = b_0 + \frac{\mathbf{X}_0' \mathbf{b}}{2} = 15,199$ olup, veri tablosundan da görüleceği

gibi her iki gübrenin yaklaşık olarak en üst düzeyde kullanılması ile bu ürün elde edilir..

$$|\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -2,494 - \lambda & -0,167 \\ -0,167 & -1,964 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4,458\lambda + 4,898 - 0,0278 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \mathbf{Hata!} = \mathbf{Hata!}$$

$$\lambda_1 = -2,542, \quad \lambda_2 = -1,916$$

λ_1 ve $\lambda_2 < 0$ olduğunda durağan nokta bir maksimum tepki noktasıdır. Bu da yukarıda yorumladığımız durağan nokta ile tepki ilişkisinin doğruluğunun bir başka ölçütüdür.

$$(Z_1, Z_2) = (X_1 + 0,23, X_2 + 0,69)$$

$$\hat{Y}(Z) = \hat{Y}_0 + Z' \mathbf{BZ}, \quad \mathbf{W} = (\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)' \quad \text{olmak üzere } \mathbf{W} = \mathbf{M}'\mathbf{Z}$$

$$M'BM = \begin{bmatrix} -2,542 & 0 \\ 0 & -1,916 \end{bmatrix}, \quad Z'BZ = W'M'BMW = \lambda_1 W_1^2 + \lambda_2 W_2^2$$

$$Z'BZ = -2,542 W_1^2 - 1,916 W_2^2 \Rightarrow \hat{Y}(Z) = 15,199 - 2,542 W_1^2 - 1,916 W_2^2$$

$$\lambda_1 = -2,542 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2,494 + 2,542 & -0,167 \\ -0,167 & -1,964 + 2,542 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0,048m_{11} - 0,167m_{12} = 0 \\ -0,167m_{11} + 2,578m_{12} = 0 \end{array} \right\} m_{11}^2 + m_{12}^2 = 1 \text{ normalize etme koşulu ile ilk}$$

denklemden $m_{11}^* = 1 \Rightarrow m_{12}^* = 0,87425$,

$$m_{11} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (0,87425)^2}} = \frac{1}{1,04} = 0,961$$

$$m_{12} = \frac{0,87425}{\sqrt{1 + (0,87425)^2}} = \frac{0,87425}{1,04} = 0,839 \Rightarrow m_1 = \begin{bmatrix} 0,961 \\ 0,839 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1,916 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2,494 + 1,96 & -0,167 \\ -0,167 & -1,964 + 1,960 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{21} \\ m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} -0,534m_{21} - 0,167m_{22} = 0 \\ -0,167m_{21} - 0,004m_{22} = 0 \end{array} \right\}$$

normalize etme koşulu ile ilk denklemden

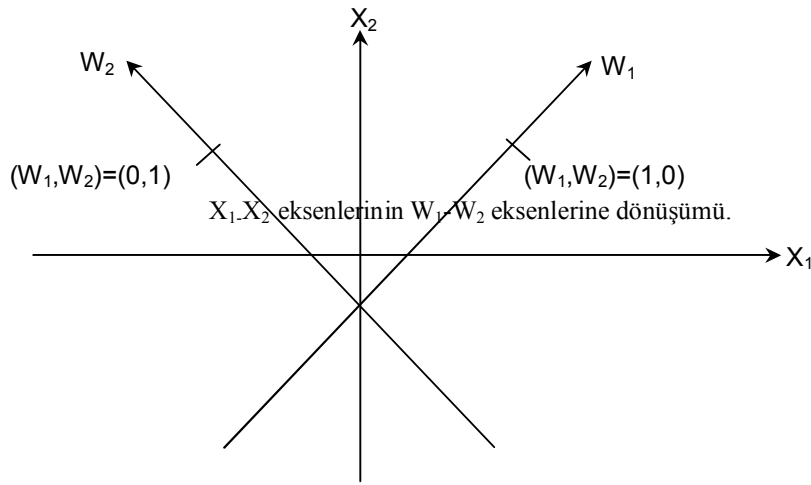
$$m_{22}^* = 1 \Rightarrow m_{21}^* = -0,3127 \Rightarrow$$

$$m_{21} = \frac{-0,3127}{\sqrt{1^2 + (0,3127)^2}} = \frac{-0,3127}{1,05} = -0,298$$

$$m_{22} = \frac{1}{\sqrt{1 + (0,3127)^2}} = 0,970 \Rightarrow m_2 = \begin{bmatrix} -0,298 \\ 0,970 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,961 & 0,276 \\ -0,795 & 0,606 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 + 0,23 \\ X_2 + 0,69 \end{bmatrix}$$

bulunur.



SONUÇ

Uygulamada merkez nokta ve merkezden eşit uzaklıktaki noktalarda elde edilen ürün ihmal edildiğinde veri değerleri birinci dereceden bir polinomal model ile tasarlanabilir. Ancak verilerin tümü tekrarlı halde kullanıldığında, ikinci dereceden bir model ile bir merkezi birleşik döndürülebilir tasarım yapılabilir ve durağan noktada maksimum ürün elde edilir. Tepki yüzeyinin geometrik yapısı ise, denklemler bulunan kanonik form ile belirlenen bir koniktir.

KAYNAKLAR

1. BOX, G.E.P.; K.G. Wilson.: "On the Experimental Attainment of Optimum Conditions" Journal of the Royal Statistical Society, (1951) B, 13, 1-45.
2. BOX, G.E.P.: "Multi-Factor Designs of First Order", Biometrika, (1952) 39, 49-57.
3. BOX, G.E.P.; J.S. Hunter.: "A Conference Region for the Solution of a Set of Simultaneous Equations with an Application to Experimental Design", Biometrika, (1954) 41, 190-199.
4. BOX, G.E.P.; N.R. Draper.: "Empirical Model Building and Response Surfaces(1987)", New York: John Wiley.
5. Dennis K.J.L.N.; Wanshu Tu.: "Dual Response Surface Optimization". Journal of Quality Technology, (1995) 27, 34-39.

6. Khuri, A.I.; J.A. Cornell.: “*Response Surfaces: Designs and Analyses*” (1987) Dekker, New York
7. J.A. Cornell, D.C. Montgomery.: “*Interaction Models as Alternatives to Low-Order Polynomials*”. Journal of Quality Technology, (1996) **28**, 163-176.
8. Vining, G.G.; Myers, R.H.: “*Combining Taguchi and Response Surface Properties A Dual Response*” Approach, J. of Quality Technology, (1990) **22**, 38-45.