D.Ü.Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi **5**,107-113 (2005)

# ÖLÇÜM HATALI LiNEER OLMAYAN MODELLER ve EN KÜÇÜK KARELER KESTİRİMİ

# The Nonlinear Models with Measurement Error and Least Squares Estimation

Aziz HARMAN [*]

***Özet :*** *Bu çalışmada,* $Y_t = y_t + e_t$, $X_t = x_t + u_z$ *ve* $t = 1,2,...,n$ *için* $(Y_t, X_t)$ *gözlemleri yapıldığında, ölçüm hatalı lineer olmayan Y=f(x;* $\beta$ *) fonksiyonel ilişkisine sahip regresiyon modelinin parametreleri* $\varepsilon_t = (e_t, u_t)'$ *hata vektörünün sıfır ortalamaya ve pozitif tanımlı singuler olmayan* $\sum$ *kovaryans hata matrisi ile normal dağılıma sahip olduğunu kabul ederek* $\sum$ *hata matrisinin bilindiği veya bilinmediği durumlarda* $y_t = f(x;\beta)$ *'nin tamamen türeve dayalı en küçük kareler kestirimi incelenmiştir.*

***Anahtar kelimeler :*** *En küçük kareler , kestirim , lineer olmama , ölçüm hastalı modeller.*

***Abstract :*** *In this study , it has been purposed to estimate parameters of nonlineer regression model Y=f(x;* $\beta$ *) with functional relationships, where* $Y_t$ *and* $X_t$ *are both subject to measurement error , when we consider observe (* $Y_t$ *,* $X_t$ *) for* $Y_t = y_t + e_t$, $X_t = x_t + u_z$ *and* $t = 1,2,...,n$ *there for it is assumed that the error vector* $\varepsilon_t = (e_t, u_t)'$ *has zero mean value and covariance error matrix* $\sum$ *with normal distibuted , that is positive defined and nonsinguler . In cases whether covariance error matrix* $\sum$ *known or unknown, we give least squares estimation about* $y_t = f(x;\beta)$ *that depend on diferantation .*

***Key words:*** *Least Squares, Estimaton, Non Linear, Measurement Error Models*

## Giriş:

Lineer olmayan modellerde parametre kestirimi son yüzyılın başlarından

[*] Öğr.gör.Dr.,Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi, Sınıf Öğretmenliği Bölümü, Diyarbakır, aharman@dicle.edu.tr

itibaren araştırmaya başlamıştır. Bu yıllarda Deming W.E.(1931)tarafından lineerizasyona bir kestirim yöntemi verilmiştir. Deming' in bu yöntemi, Dolby(1972) tarafından bazı değişikliklerle geliştirdi.Fuller W.A.ve Wolter M.K.(1982-a) tarafından ölçüm hatalı lineer olmayan modellerde kestirim sorunu incelenmiştir.Fuller W.A.(19759)'te hata matrisinin singuler olması durumunda ölçüm hatalı lineer olmayan modellerde parametre kestirimi incelenmiştir.Burada,hata matrisinin bilindiği veya bilinmediği durumlarda ölçüm hatalı lineer olmayan modellerde parametre kestirimi için en küçük kareler yöntemi incelenmiştir.

## 1 Modelin Tanımı:

**Tanım 1:** Bir $\Omega$ kümesinin alt kümelerinden oluşan bir B sınıfı

a)$\Omega \in$ B,

b)$\forall A \in$ B için $A^e \in$ B

c) B' deki bir $A_n$ dizisi için $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in B$ ise B sınıfına $\Omega$'da bir $\sigma -$ cebir denir.

**Tanım 2:** B,$\Omega$'da bir $\sigma -$ cebir olmak üzere

$P: B \to R$

$A \to P(A)$ fonksiyonu

a) $\forall A \in B$ için $P(A) \geq 0$

b)$P(\Omega) = 1$

c) B' deki ayrık bir $A_n$ dizisi için $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_n)$

özelliklerine sahip ise P' ye $\Omega$ üzerinde bir olasılık ölçüsü denir.

**Tanım 3:**

$\Omega \neq \emptyset$,B,$\Omega$'da bir $\sigma -$ cebir ve P,B üzerinde bir olasılık ölçüsü olmak üzere $(\Omega, P, B)$ üçlüsüne olasılık uzayı denir.

**Tanım 4:**

$(\Omega, B, P)$ bir olasılık uzayı, $n = 1,2,\ldots\infty$ için $a_n b_n = n$ olacak şekilde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ birer pozitif reel sayı dizisi olsunlar. $a_n = 1$ alınırsa.

$$y_t = f(x_t : \beta) \qquad (1)$$

n'ci denemedeki gözlemler $(Y_t, X_t)$ $t = 1,2\ldots n$ olmak üzere $(Y_t, X_t) = (y_t, x_t) + (e_t, u_t)$ ise (1) modeline ölçüm hatalı model denir.

$\beta : p\mathrm{x}1$ boyutlu parametre vektörü olup p boyutlu $R^p$ Euclid uzayının kompakt ve konveks alt kümesi olan $\otimes$ kümesinin bir iç noktasıdır.

$X_t$:1xq boyutlu vektörlerin bir dizisi ve $x_t$ vektörleri $R^q$ Euclid uzayın alt kümesi olan **A**' nın elemanlarıdır. $f : R^{p+q} \rightarrow R^1$ Reel değerli sürekli bir fonksiyondur. $(\Omega,\mathrm{B},\mathrm{P})$ üzerinde tanımlanmış $(e_t, u_t)$ rastgele değişkenleri ölçüm hatalarını belirtir.Fuller W.A.(1982-a)

**Tanım 5:**

Eğer (1) de tanımlı $f(x_t : \beta)$ fonksiyonu x veya $\beta$ ' ya göre lineer değil ise bu modele ölçüm hatalı lineer olmayan model denir. Bu modelde rastgele değişkenler olan x ler sabit ise model fonksiyonel ilişkiye, x' ler sabit olmayan rastgele değişkenler ise model yapısal ilişkiye sahiptir denir.

Bu çalışmada fonksiyonel ilişkili modellerle ilgileneceğiz. şimdi kestirim yöntemlerinde kullanacağımız bazı sembolleri tanıtalım.

$f(x_t : \beta)$ fonksiyonu Ax$\otimes$ kümesi üzerinde her iki değişkene göre birinci ve ikinci mertebeden türevlere sahip olsun. Gösterimler aşağıdaki gibidir.

$\dfrac{\partial f(x_t : \beta)}{\partial x} = f_x(x_t : \beta)$ fonksiyonu, x' in elemanlarına göre $f(x_t : \beta)$' nin kismi türevlerinin q boyutlu satir vektörünü,

$\dfrac{\partial f(x_t : \beta)}{\partial \beta} = f_\beta(x_t : \beta)$ fonksiyonu, $\beta$ ' nin elemanlarına göre kısmi türevlerin p boyutlu sütun vektörünü,

$\dfrac{\partial^2 f(x_t : \beta)}{\partial \beta \partial x} = f_{\beta x}(x_t : \beta)$ fonksiyonu, x ve $\beta$ ' nin elemanlarına göre ikinci kýsmi türevlerin pxq boyutlu matrisini,

$\dfrac{\partial^2 f(x_t : \beta)}{\partial x \partial x} = f_{xx}(x_t : \beta)$ fonksiyonu, x' e göre ikinci kısmi türevlerin qxq boyutlu matrisini göstersin.Seber.G.A.F.(1988)

## 2. MODEL PARAMETRELERİN KESTİRİLMESİ.

Bir parametrenin beklenen değerini bulmakla bu parametrenin kestiricisi bulunur. $\mathrm{E}(\hat{\beta}) = \beta$ ise $\hat{\beta}$ istatistiğine $\beta$ parametresinin yansız kestiricisi denir. Örneğin örneklem ortalaması kitle ortalaması için bir yansız kestiricidir. $E(\bar{x}) = \mu$ . Ölçüm hatalı lineer olmayan bir model için parametre kestirimi yapılırken, klasik lineer olmayan model kestiriminde optimizasyon olarak bilinen aşağıdaki yöntem kullanılır. Model yardımıyla bir amaç fonksiyonu bulunur, bu fonksiyon kalan kareler toplamı, rezidüler veya artıklar olarak bilinir. Amaç fonksiyonunu minimumlaştırmakla model parametreleri kestirilmiş olur. Bu modelin bulundurduğu rastgele değişkenlere ait maksimum olabilirlik fonksiyonunu veya bu fonksiyonun logaritmasını maksimumlaştırmakla da modelin maksimum olabilirlik kestiricileri bulunur. (1) modeli için amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Q(x_t:\beta)=\left[Y_t-f(x_t,\beta),X_t-x_t\right].\Sigma^{-1}\left[Y_t-f(x_t,\beta),X_t-x_t\right]'$$

**3. En Küçük Kareler Kestirimi.**

En küçük kareler yöntemi, basit lineer olmayan regresyon modelindeki parametreleri kestirmek için kullanılan türeve dayalı bir yöntemdir. Bu yöntem, Gaus-Newton yöntemi, Gradient yöntemi, Marguardt yöntemi veya en hızlı döşüm (Stepest-descent) yöntemi olarak bilinir.

Küçük kareler yöntemi, kalan kareler toplamını herbir parametreye göre minimum yapmak için kullanılan bir yöntemdir.

$$y_t=f(x_t;\beta),(Y_t,X_t)=(y_t,x_t)+(e_t,u_t)\quad t=1,2\ldots n\ \ için\ \ \varepsilon_t=(e_t,u_t)'\ \text{ve}\ \ \varepsilon_t'\approx \mathrm{N}(0,\Sigma)$$

olduğunu kabul edelim. Ayrıca $(e_t, u_t)$ ölçüm hataları 0 (sıfır) ortalama matrisli, $\sum$ kovaryans matrisi ile bağımsız olarak normal dağılıma sahip olsun.

$$\mathrm{E}(e_t) = \mathrm{E}(u_t) = 0$$

$$\Sigma = \mathrm{E}(\varepsilon_t'.\varepsilon_t) = \mathrm{E}\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} e_t \\ u_t \end{pmatrix}.(e_t, u_t) \end{bmatrix} = \mathrm{E}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{e_t} & \mathbf{e_t} \\ \mathbf{u_t} & \mathbf{e_t} \end{vmatrix} & \begin{matrix} e_t & u_t \\ u_t & u_t \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}(e_t e_t) & \mathrm{E}(e_t u_t) \\ \mathrm{E}(u_t e_t) & \mathrm{E}(u_t u_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_e^2 & \sigma_{eu} \\ \sigma_{ue} & \sigma_{uu} \end{bmatrix} \quad (3)$$

olacak şekilde kovaryans matrisini blok matrisler halinde yazabiliriz. (1) modeli için $\sum$ kovaryans matrisli amaç fonksiyonu olan

$$Q(x_t;\beta) = \sum_{t=1}^{n} q(x_t;\beta) = [Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t]\Sigma^{-1}[Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t]' \quad (4)$$

fonksiyonunu minimumlaştırmak gerekir. Bunun için bu ifadenin $\beta$ ve x'e göre kısmi türevlerini alıp sıfıra eşitlersek normal denklemler elde ederiz. $\beta$ 'ya göre türev almakla p tane, x'e göre türev almakla q tane denklem elde edilir. Bu denklemlerin ortak çözümüyle bulunacak $\hat{\beta}$ ve $\hat{x}_t$ kestiricileri $\beta$ ve $x_t$ parametrelerinin en küçük kareler kestiricileridir.

### 3.1 $\sum$ Kovaryans matrisi biliniyorsa.

$$Q(x_t;\beta) = [Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t]\Sigma^{-1}[Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t]'$$

$$\frac{\partial Q(x_t;\beta)}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\sum^{-1}\left(Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t\right)^2\right]$$

$$= -2\sum^{-1}\left[Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t\right].\left[f_\beta(x_t;\beta), 0\right]' = 0$$

ise

$$\left[Y_t - f(x_t;\beta), X_t - x_t\right]\sum^{-1}\left[f_\beta(x_t;\beta), 0\right]' = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial Q(x_t;\beta)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum^{-1}\left(Y_t-f(x_t;\beta),X_t-x_t\right)^2\right]$$

$$=-2\sum^{-1}\left[Y_t-f(x_t;\beta),X_t-x_t\right],\left[f_x'(x_t;\beta,I)\right]'=0$$

ise,

$$\left[Y_t-f(x_t;\beta),X_t-x_t\right]\sum^{-1}\left[f_x'(x_t;\beta),I\right]'=0 \qquad (6)$$

bulunur. (5) denkleminde p bilinmeyenli p tane (6) denkleminde q bilinmeyenli q tane normal denklem bulunmaktadır. Her bir denklem sisteminin ortak çözümü olan $\hat{\beta}=\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\ldots,\hat{\beta}_p),\hat{X}_t=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots\hat{x}_q)$ değerleri $\beta$ ve x' in en küçük kareler kestiricileridir.

### 3.2 $\sum$ Kovaryans matrisi bilinmiyorsa.

$\sum=\sigma^2V,V$ bilinen pozitif tanımlı karesel bir matris, $\sigma^2$ bilinmeyen ama kestirilebilen bir sabittir. Bu durumda,

$$Q(x_t;\beta)=\left[Y_t-f(x_t;\beta),X_t-x_t\right]\Sigma^{-1}\left[Y_t-f(x_t;\beta),X_t-x_t\right]'=\sigma^2\left[Y_t-f(x_t;\beta),X_t-x_t\right]V^{-1}\left[Y_t-f(x_t;\beta),X_t-x_t\right]' \qquad (7)$$

$$\mathrm{V}^{-1}=\begin{bmatrix}F & G\\ G' & H\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A & B\\ B' & C\end{bmatrix}\begin{array}{l}\}np\\ \}\ n\end{array}\ \text{olsun.} \qquad (8)$$

Burada F,H,A ve C matrisleri simetrik değildir. G ve B matrisi simetriktir.

$$\left.\begin{aligned} F &= \left(A - BC^{-1}B'\right)^{-1} \\ G &= -A^{-1}B\left(C - B'A^{-1}B\right)^{-1} \\ G' &= -C^{-1}B'\left(A - BC^{-1}B'\right)^{-1} \\ H &= \left(C - B'A^{-1}B\right)^{-1} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

bağıntıları yazılabilir. Seber.G.A.F. (1988)
Bu bağıntılar yardımıyla

$$\left.\begin{aligned} A &= F^{-1} + F^{-1}G\left(H - G'F^{-1}G\right)^{-1}G'F^{-1} \\ B &= -F^{-1}G\left(H - G'F^{-1}G\right)^{-1} \\ B' &= -\left(H - G'F^{-1}G\right)^{-1}G'F^{-1} \\ C &= \left(H - G'F^{-1}G\right)^{-1} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

ters bağıntılar bulunur.

$$
\left.
\begin{aligned}
&N = \left\{ \frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial \beta_r} \right\} \quad t = 1,2\ldots n, r = 1,2\ldots p \\
&M = diag\left( \frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial x_t} \right) \\
&Q = C + MB' + BM + MAM \\
&T = Q^{-1}(B + MA) \\
&\tau = A - (B' + AM)Q^{-1}(B + MA) = A - (B' + AM)T
\end{aligned}
\right\} \tag{11}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\varepsilon' \mathrm{V}^{-1}\varepsilon &= \left(e_t, u_t\right) \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} e_t \\ u_t \end{bmatrix} \\
&= \left(e_t A + u_t B', e_t B + u_t C\right) \begin{pmatrix} e_t \\ u_t \end{pmatrix} \\
&= \left(e_t^2 A + 2 e_t B' u_t + u_t^2 C\right)
\end{aligned}
$$

$$=\left[Y_t - f\left(x_t;\beta\right)\right]^2 A + 2\left[Y_t - f\left(x_t;\beta\right)\right]\beta'\left(X_t - x_t\right) + 2\left(X_t - x_t\right)^2 C$$

olur.

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(\varepsilon' V^{-1}\varepsilon) = -2[Y_t - f(x_t;\beta)]A.\frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial\beta} - 2\frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial\beta}B'(X_t - x_t) = 0$$

*ise*

$$[Y_t - f(x_t;\beta)]AN + NB'(X_t - x_t) = 0$$

*ve*

$$N\left\{[Y_t - f(\hat{x}_t;\hat{\beta}]A + (x_t - \hat{x}_t)B'\right\} = 0 \qquad (12)$$

olur.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon' V^{-1}\varepsilon) = -2[Y_t - f(x_t;\beta)].\frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial x}A - 2\frac{\partial f(x_t;\beta)}{\partial x}B'(X_t - x_t)$$

$$-2[Y_t - f(x_t;\beta)]B' - 2(X_t - x_t)C = 0 \qquad (13)$$

olur.

$$[Y_t - f(x_t;\beta)]MA + MB'(X_t - x_t) + [Y_t - f(x_t;\beta)]B' + (X_t - x_t)C = 0$$

$$\Rightarrow [Y_t - f(x_t;\beta)].(MA + B') + (X_t - x_t)(MB' + C) = 0 \qquad (14)$$

olur. (13) ve (14) denklem sistemlerinin çözümünü sağlayan $\hat{\beta}$ ve $\hat{x}_t$ deðerleri $\beta$ ve $x_t$'nin en küçük kareler kestiricileridir.Dolby.(1972)

**Sonuç:** Ölçüm hatalı lineer olmayan modellerde, modelin lineer olmayışı ve değişkenlerdeki ölçüm hatalarının getirdiği zorluklar nedeniyle parametre kestirimi bazı kısıtlamalar altında yapılabilmektedir.

## Kaynaklar:


1. Britt H.I. and Lucke R.H. The estimation of parameters in nonlinear implicit model. Tecnometrics, (1973)15, 233-247.
2. Donald W. Marquart.; An algorithm for least squares setimation of nonlinear parameters. J.Soc.Indust. Appl.Math. **11.** 2- (1963)
3. Dolby. G.R.; Generalized least squares and Maksimum likelihood Estimation of Nonlinear Fonctional Relationships, J.R. Stat. **25**,157-162-(1972).
4. Fuller A.Wayne.; Estimating a Nonlinear errors in variables model with singular error Covairance matrix. procedings of the business and Econometric statistics section. Amer Statist. Assoc. (1975).
5. Fuller A.W. and Wolter. M.K.;Estimation of nonlinear errors in variables models. The.
6. Ann. of statistics. **10**.2, 539-548. (1982-a)
7. Seber, G.A.F. and Wild, C.J.; Nonlinear Regression. John Wiley and Sons. Newyork. (1988).
8. DEMİNG, W.E.; The application of least squares. Philosophical magazine series 7,11, 146-158(1931