

GIDA SANAYİNDE MATEMATİKSEL MODELLEMENİN ÖNEMİ VE UYGULAMA ALANLARI

IMPORTANCE AND APPLICATION AREAS OF MATHEMATICAL MODELLING IN FOOD INDUSTRY

Y.Onur DEVRES¹, Mehmet PALA^{1,2}

1 TÜBİTAK, Gıda ve Soğutma Teknolojileri Bölümü Marmara Araştırma Merkezi, Gebze-Kocaeli
2 Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya Mühendisliği Bölümü, İSTANBUL

ÖZET: Deneysel çalışmaların sınırlı ya da imkansız olduğu, pratik ve ekonomik olarak çok sayıda deneyin yapılamadığı koşullarda matematiksel modellemeden büyük ölçüde yararlanılmaktadır. Ülkemizde gıda işleme ile ilgili araştırmalarda ve gıda sanayiinde matematiksel modelleme büyük bir uygulama potansiyeline sahiptir. Yöntemin uygulanabilir hale geçirilmesi ile, tasarım ve üretim aşamasında önemli ekonomik kazançlar ortaya çıkabilecektir. Bu çalışmada matematiksel modelleme ve model geliştirme yöntemi tanıtılmış, gıda sanayiinde modellemenin önemine dikkat çekilerek, uygulama alanlarına örnekler verilmiştir.

SUMMARY: Mathematical modelling is widely used in areas where experimental studies are limited or not feasible and where a large number of experiments for workable results cannot be carried out due to practical and economic reasons. Mathematical modelling has a great potential for application in the research related on food processing and in the food industry in Türkiye. The implementation of this technique can avail substantial economic returns at the stages of design and production. In this work, a technique for mathematical modelling and model developing is described and the importance of mathematical modelling in food industry is discussed with reference to some examples for its fields of application.

GİRİŞ

Gıda Sanayi'nde üretim ve kalite kontrolü, sanayiinin en önemli iki ekonomik parametresi olmaktadır. Bu parametrelerin sıkı kontrolü ile yapılan yatırım karlı hale gelebilmekte ve ekonomik kazançlar doğabilmektedir. 1970'li yılların sonlarına kadar sürdürülen klasik analiz yöntemleri ile, sanayide belli bir üretim ve kalite kontrolü sağlanmıştır. Ancak özellikle 1980'li yıllarda, tüketicilerin yaşam tarzı ve yemek alışkanlıkları değişmiş, bunun sonucunda yeni ürün ve işleme tekniklerine ihtiyaç duyulmuştur.

Aynı iş kolunda çalışan firmalar arasındaki yoğun rekabet sonucu ortaya çıkan "daha çok ve daha kaliteli" ürün isteği ile birlikte, yeni bir ürünü ilk olarak pazara getirebilme, başarı ile başarısızlık arasındaki ince çizgiyi belirleyen faktörler olmuşlardır. Bunun gereği olarak, özellikle bilgisayar teknolojisinin getirdiği kolaylıklarla, üretim ve kalite kontrolü önemli oranda otomatikleşmiş ve bu sırada matematiksel modellemeden büyük ölçüde yararlanılmıştır. Fiziksel bir işlemin matematiksel olarak modellenmesi ve işlemlerle ilgili değerlendirmelerin, bu modelden elde edilen sonuçlar üzerine geliştirilmesi son yıllarda sık olarak başvurulan analiz yöntemlerinden biri olmuştur. Bu duruma genel olarak teknolojinin gelişmesi sonucu bilgisayar işlem hızlarının artması, birim fiyatlarının düşmesi ile kullanımının yaygınlaşması büyük ölçüde yardımcı olmuştur.

Matematiksel modelleme yönteminden yararlanan kuruluşlarda sistem veya işlem matematiksel olarak tanımlanmakta, önceden hazırlanan çeşitli üretim veya analiz senaryoları arasındaki geçişlerle, yatırım planlaması, üretim akışı ve kontrolü oldukça hassas sınırlarda sağlanmaktadır (SWIENTEK, 1990).

Deneysel çalışmaların sınırlı ya da imkansız olduğu, pratik ve ekonomik olarak çok sayıda deneyin yapılamadığı koşullarda matematiksel modellemeden büyük ölçüde yararlanılmaktadır. Örnek olarak, nükleer reaktörlerin herhangi bir kaza sırasındaki davranışları hakkındaki bilgilerin çoğu modellerden elde edilmiştir. Gerçek reaktörlerde veya küçük ölçeklilerinde bu deneylerin yapılmasının tehlikesini tartışmak anlamsızdır. Ancak yine de geliştirilen matematiksel modelin geçerliliğinden söz edilebilmesi için, modeli tanımlayan eşitliklerin çözümü ile elde edilen sonuçların güvenilir deneysel çalışmalarla karşılaştırılması gerekmektedir (ROBERTS ve ark., 1983).

Bu çalışmada, matematiksel modelleme ve model geliştirme yönteminin tanıtılması ve Gıda Sanayi'nde modellemenin önemine dikkat çekilerek, uygulama alanlarının açıklanması amaçlanmıştır.

MATEMATİKSEL MODELLEMENİN TANIMI

Genel olarak modelleme ekonomiden mühendisliğe çok değişik alanlarda kullanılmaktadır. Mühendislik uygulamalarında modelleme bir kavramın, cismin, sistemin ya da işlemin pratikte karşılaşılan şekilde davranması ile ilgili :

- matematiksel veya teorik (deney sonuçları ile fizik, kimya, matematik, statik, dinamik, ısı transferi, termodinamik vb. temel teorik bilgiler)
- fiziksel (mimari, aerodinamik, hidrodinamik modeller)

bilgileri temel alarak tanımlanması olarak kısaca açıklanabilir. Tanımından da anlaşılacağı gibi, geliştirilen modeller sembolik ve fiziksel olmak üzere iki başlık altında toplanabilmektedir. Sembolik modellerde sistem bir dizi matematiksel eşitlik ve denklemlerle tanımlanırken, fiziksel modeller sistemin küçük boyutlarda temsili ile yaratılmaktadır.

Fiziksel modelleri istenen hassasiyette yapmak pahalı ve bir yerden bir diğer yere taşınmaları zor olduğu için, son yıllarda hemen hemen her konuda matematiksel modeller tercih edilmeye başlanmıştır. Matematiksel modelde, sistem içindeki ilişkiyi temsil etmek için matematiksel sembol veya eşitlikler kullanılmaktadır. Bu modellerin kararsız haldeki gerçek sistemi ortaya koyabilmesi için ise, model eşitliklerinin belli bir zaman aralığı ile defalarca çözülmesi gerekmektedir. Eğer bu işlemler elle yapılacak olursa, modelleme son derece pahalı olmakta ve uzun zaman almaktadır. Bununla birlikte, örnek olarak 16. yüzyılda insanlar, denizcilik tablolarının oluşturulması sırasında sayısal hesaplamalara yılların harcamışlardır. Fakat denizciliğin ticaret ve askeri deniz gücünü büyük ölçüde etkilemesi, harcanan çabayı değerli kılmıştır (ROBERTS ve ark., 1983).

Gıda Teknolojisi üzerine geliştirilen sembolik modeller çeşitli şekillerde sınıflandırılabilir. Ancak genelde bu modelleme yöntemlerini üç başlık altında toplamak mümkündür (HALLSTRÖM ve TRAGARDH, 1987) :

- a)- Zaman faktörüne göre oluşturulan modeller
- b)- Teorik veya deneysel modeller
- c)- Uygulama alanlarına göre geliştirilen modeller

Bunlardan ilkinde, matematiksel model tanımlanırken zamanın göz önüne alınmadığı önem kazanmaktadır. Model zamana bağlı olarak tanımlanıyorsa, "dinamik model" değil ise "statik model" olarak adlandırılmaktadır.

İkinci sınıflandırmada, model geliştirilirken temel alınan bilgi esas alınmaktadır. Teorik veya deneysel model adı verilerek yapılan bu tip sınıflandırma aşağıda geniş olarak incelenecektir.

Son sınıflandırma ise uygulama alanlarına göre yapılmaktadır. Modelin gıdanın işlenmesi sırasında kullanılan fiziksel işlemleri ya da gıdanın fiziksel özellik ve reaksiyon kinetiklerinin tanımlanması amacı ile geliştirilmesi, bu tip sınıflandırmanın alt başlıklarını oluşturmaktadır. Ancak yukarıda sıralanan üç sınıflandırma birbirleri ile kesin hatlarla ayrılmamakta, birçok durumda bir sınıflandırma bir diğeri ile birlikte incelenmektedir.

Matematiksel model tanımlanırken geliştirilen eşitliklerde çeşitli değişkenler kullanılmaktadır. Bu nedenle model sınıflandırmasından önce, sembolik modeller tanımlanırken kullanılan değişkenlerin incelenmesinde yarar bulunmaktadır.

Değişkenler genel olarak bağımsız ve bağımlı olmak üzere iki grup altında toplanmaktadır. Örnek olarak $y = f(x)$ eşitliğinde x bağımsız değişken, y bağımlı değişken olmaktadır. Bağımsız değişkenler kendi aralarında üç başlık altında toplanabilmektedir :

- a)- *işlem değişkenleri* : işlem çalışma koşullarında kullanılan sıcaklık, basınç, debi vb parametreler
- b)- *cihaz değişkenleri* : işlem sırasında kullanılan ekipmanların çap, hacim, elektrik gücü vb büyüklükler
- c)- *parametreler* : işlem sırasında kullanılan akışkanların termofiziksel değerleri gibi büyüklükler

Bağımlı değişkenler ise,

- a)- *sonuç değişkenleri* : modelin çalıştırılması sonucunda elde edilen değerler

b)- *aradeğer değişkenleri* : sonuç değişkenlerinin bulunması sırasında hesaplanan, ancak modelin değerlendirilmesi aşamasında doğrudan dikkate alınmayan değişkenler olarak ikiye ayrılırlar.

MATEMATİKSEL MODELLERİN SINIFLANDIRILMASI

Yukarıda kısaca tanımlanan statik/dinamik modeller, teorik/deneysel modeller ile uygulama alanlarına göre sınıflandırılan modeller aşağıda incelenmiştir.

Statik ve Dinamik Modeller

Modeli tanımlayan matematiksel eşitliklerde kullanılan bağımlı değişkenler yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise, böyle modellere "statik model" adı verilmektedir. Örnek olarak soğuk hava depolarında soğutma yükünün hesaplanması için izlenen yol gösterilebilir. Burada belirli bir yapı tasarımı ve dış hava sıcaklığı, ürün giriş sıcaklığı ve yükü kabul edilerek, bir gün içinde olabilecek maksimum ısı kazancı, temel ısı transferi bilgileri kullanılarak bulunmaktadır. Bunun sonucunda hesaplanacak kompresör gücü, buharlaştırıcı ve yoğunlaştırıcı kapasitesi gibi bağımlı değişkenler; sıcaklık, duvar kalınlıkları, depoya gelen günlük ürün miktarı gibi bağımsız değişkenlerin fonksiyonu olarak değişmektedir (PALA ve DEVRES, 1987).

Aynı şekilde statik modele örnek olarak, bir et bloğunun ısıtılması gösterilebilir. Burada başlangıç, bitiş ve ortam sıcaklıkları ile taşınım ve iletim ısı transfer katsayıları bağımsız değişkenler olurken, bu değişkenler yardımı ile hesaplanan ısıtma yükü bağımlı değişken olmaktadır. Ancak bundan önce ortam sıcaklığının sürekli sabit tutulduğunun, taşınım ve iletim ısı transfer katsayılarının sıcaklığa bağlı olmadığını kabul edilmesi gerekmektedir. Katsayıların sıcaklığa bağlı kabul edildiği durumlarda ise sistemdeki bağımlı değişken sayısı doğal olarak artacaktır.

Dinamik modelde ise, statik modelde tanımlanan bağımlı ve bağımsız değişkenlere ek olarak, zaman da hesaplamalar sırasında dikkate alınmaktadır. Statik modele örnek verilen soğuk hava deposu, dinamik modele örnek olarak da gösterilebilir. Eğer bir sezon boyunca enerji tüketimi incelenecekse tanımlanan modelin dinamik yapıda olması gerekmektedir. Dış hava sıcaklığı ve ürün giriş çıkışı günden güne, hatta saatten saate değişebileceği için, modeldeki bağımlı değişkenler zamana bağlı olarak hesaplanmalıdır (PALA ve DEVRES, 1988a, b; 1990).

Teorik ve Deneysel Modeller

Bu tip sınıflandırmada modeli tanımlayan matematiksel eşitliğin türetilme yöntemi önem kazanmaktadır. Eğer eşitlikler türetilirken yalnızca ısı transferi, termodinamik v.b. teorik bilgiler kullanılmışsa, bu tip modeller "teorik model" olarak adlandırılmaktadır. Eğer model yalnızca deneyler sonucunda elde edilen verilerin, regresyon analizi gibi sayısal bir yöntem kullanılarak bulunan eşitlikleri ile tanımlanıyorsa, böyle modellere "deneysel model" adı verilmektedir. Bazı çalışmalarda hem teorik hem de deneysel sonuçların bir arada değerlendirildiği yarı teorik yaklaşımlarda bulunmaktadır (ANON., 1985).

Teorik ve deneysel modellere örnek olarak gıdalarda donma/çözünme işlemleri gösterilebilir (DEVRES, 1991). Evre değişiminin de göz önüne alındığı, boyuta ve zamana bağlı (dolayısı ile dinamik model) ısı transfer denkleminin, sınırlı ve başlangıç koşullarına bağlı olarak analitik veya sayısal çözümü teorik modelin sonucunu vermektedir. Deneysel modellerde ise, örnek olarak çeşitli büyüklüklerdeki çok sayıda karkasla yapılan donma/çözünme deneyleri sonucunda elde edilen sıcaklık dağılımları donma/çözünme süresi gibi bağımlı değişkenlerin hava hızı, donma/çözünme ortamı sıcaklığı, karkas boyutları vb. bağımsız değişkenlere göre, bire bir ya da çoklu ilişkileri sonucunda bulunan eşitlikler ile sistem tanımlanmaktadır.

Uygulama Alanlarına Göre Modeller

Matematiksel modelleme, bütün mühendislik uygulamalarında olduğu gibi Gıda Sanayii'nde de büyük bir işlem potansiyeline sahiptir. Genel olarak tesis yerleşimi, tesis sahasının verimli kullanımı, para akışı ve kapasitenin planlanması, üretim akışı, doğrudan ve doğrudan olmayan işçilik maliyet analizleri vb. konularda modelleme yapılabilmektedir (ROBE, 1990). Bununla birlikte ülkemiz Gıda Sanayii AR-GE

çalışmalarında, gerek nitelik gerekse nicelik bakımından istihdam edilen personelin ve bu çalışmalara aktarılan mali kaynakların yetersiz kalması sonucunda, bugüne kadar matematiksel modellemeden yeterince yararlanılmamıştır.

TÜBİTAK-Soğuk Tekniği Bölümü'nde, soğuk hava tesislerinde enerji tasarrufu önlemlerinin belirlenmesi amacı ile, statik yapıda bir model geliştirilmiştir (PALA ve DEVRES, 1987). Daha sonra bu model dinamik bir yapıya getirilerek, bir sezon boyunca soğuk hava deposunda ısı kazancı ve ürün nem kaybının değişimi incelenmiştir (PALA ve DEVRES, 1988a, b). Hazırlanan bu çalışmada yaklaşık onbin tonluk bir soğuk hava deposu modellenerek değişik çalıştırma koşullarının elektrik tüketimi ve ürün ağırlık kaybı üzerine etkisi incelenmiştir (Çizelge 1).

Gıdaların soğuma/ısıtma ve donma/çözünme işlemlerinin incelenmesi sırasında da matematiksel modellemeden büyük ölçüde yararlanılmaktadır. Örnek olarak bazı meyve ve sebzelerin sıcaklık değişimi ve ağırlık kaybının modellenmesi tümden analiz yöntemi kullanılarak yapılmıştır (DEVRES, 1989a, c). Çözümün analitik olarak elde edildiği bu çalışmada, hava hızı değişiminin soğuma süresi ve ağırlık kaybına etkisi saptanmış, hızlı soğutmanın önemi vurgulanmıştır (Çizelge 2).

Çizelge 1. Isı Kazancı ve Ağırlık Kaybı Analizi (Depolama sıcaklığı 0°C, Depolama bağıl nemi %90) (PALA ve DEVRES, 1988b)

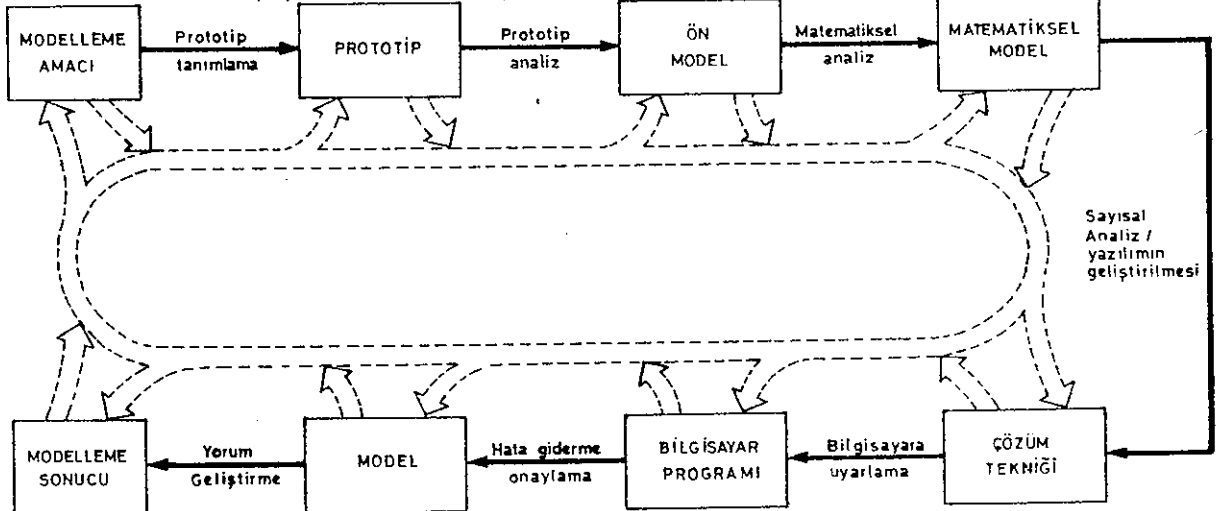
	Ürünün depoya girişi ve soğutulması 9 hafta	Depolama ve ürünün depodan çıkışı 23 hafta	Toplam 32 hafta
Toplam ısı kazancı	752 432 kW	469 155 kW	1 221 587 kW
Duvarlardan olan ısı kazancı	% 15,5	% 34,9	% 22,9
Solunum ısı kazancı	% 19,4	% 38,2	% 26,6
Ürünün soğutulması	% 39,4	% 0,0	% 24,3
Nemli havadaki suyun evre değişimi kazancı	% 12,7	% 12,7	% 12,7
Fan kazancı	% 7,0	% 7,0	% 7,0
Diğerleri	% 6,0	% 7,2	% 6,5
Güç tüketimi	526 702 kWh	328 400 kWh	855 111 kWh
Ağırlık kaybı	332 488 kg	197 114 kg	529 602 kg
Depolanan ürüne oranı	% 3,19	% 1,89	% 5,07

Çizelge 2. İki değişik hava hızı için soğuma süresi ve ağırlık kaybı değerleri (DEVRES, 1989a, c)
Elmanın çapı 0,10 m; Ortam sıcaklığı 0°C; Ortam bağıl nemi % 90

		Soğuma süresi		Depolama süresi	
		25° → 10°	10° → 0,1°	0°C'de altı ay	
H A V A	0.005 m/s	t (s)	27 277	156 587	15 552 000
		m (kg/s)	2,146x10 ⁻⁷	3,106x10 ⁻⁸	4,881x10 ⁻¹⁰
		m (kg)	5,854x10 ⁻³	4,864x10 ⁻³	7,483x10 ⁻³
		kayıp (%)	2,27	1,88	2,91
H I Z I	0.05 m/s	t (s)	11 445	60 321	15 552 000
		m (kg/s)	2,222x10 ⁻⁷	3,210x10 ⁻⁸	4,972x10 ⁻¹⁰
		m (kg)	2,543x10 ⁻³	1,937x10 ⁻³	7,734x10 ⁻³
		kayıp (%)	0,99	0,75	3,00
Elma 0,25762 kg kabul edilmiştir.					

Dondurulmuş gıdalarda sıcaklık -40°C 'lere düşürülse bile, bağlı su olarak ifade edilen belirli oranda su, hala sıvı evrede bulunmaktadır. Çözündürme işlemi sırasında, gıdanın donma noktasında buzun tamamı su oluncaya değin bu oran sıcaklıkla birlikte artmaktadır. Donma/çözünme işlemi sırasında sıcaklığa bağlı olarak buz oranının belirlenmesi, problemin çözümü sırasında büyük önem taşımaktadır (DEVRES, 1989b, d). Ayrıca bu oranın bilinmesi ile gıdaların termofiziksel özelliklerini tanımlama imkanı da ortaya çıkmaktadır (DEVRES, 1989e).

Gıda işleyen bir tesiste, üretim akışının modellenmesi firma yöneticilerine büyük kolaylıklar getirecektir. Son yıllarda gıda işleme cihaz birim fiyatları önemli ölçüde yükselmiş ve sonucunda tesisin, işleme tekniğinin, hattın veya ürün akışının tasarlanması sırasında yapılan hataların Gıda işleme kuruluşlarına maliyetini arttırmıştır. Bu nedenle gerek tasarım aşamasında gerekse kapasite artımı veya azaltımı sırasında modellenmenin kullanımı ile en uygun çözümlerin bulunması, ham ve mamul ürün stoklarının denetlenmesi, en ekonomik ve optimum üretim yolunun saptanması kolaylaşacaktır.



Şekil 1. Modelleme Aşamaları (JACOBY ve KOWALIK, 1980).

MATEMATİKSEL MODELLEME YÖNTEMİ

Matematiksel modelleme, genel olarak optimal kesin bir çözümü vermemektedir. Ancak modelin geliştirilmesi ve denenmesi sonucunda, modellemeye konu olan sistemin daha iyi anlaşılabilmesine büyük ölçüde yardımcı olmaktadır. Böylelikle sistem davranışının tanımlanması, bu davranışın açıklanması için teorilerin geliştirilmesi ve bu teorileri kullanarak farklı sistem davranışlarının daha önceden saptanması mümkün olabilmektedir. Bunların sonucunda, sistem verimliliğinin geliştirilmesi için stratejiler ile daha gelişmiş yeni sistemlere ait seçeneklerin elde edilmesi imkanları da doğmaktadır.

Bir kavramın, cismin, sistemin ya da işlemin modellenmesi için, genel olarak belirli aşamalardan geçmek gerekmektedir. Jacoby ve Kowalik (1980) bunları Şekil 1'de verildiği şekilde tanımlamışlardır. Bir kapalı döngü olarak düşündükleri modelleme yönteminde her aşama bir önceki ve sonraki ile kesin ilişkide olup, devamlı olarak geliştirilmektedir. Bu nedenle belirlenen problem için modelleme işleminin tam olarak bittiğini saptamak, hiç bir zaman için mümkün olmamaktadır. Rivett (1972) ise modelleme aşamalarını, bu çalışmada da yararlanıldığı gibi, altı başlık altında tanımlamıştır (KARA, 1985):

- Problemin belirlenmesi
- Matematiksel modelin geliştirilmesi
- Modelin çözülebilirliğinin sağlanması
- Modelin çözümü
- Modelin kanıtlanması
- Çözümün uygulanması

Yukarıda verilen konu başlıklarının daha iyi anlaşılabilmesi için, modelleme aşamaları, genel hatları ile aşağıda açıklanmıştır:

Problemin Belirlenmesi

Bir sistem ya da işlemi modelleyebilmek için, herşeyden önce problemin tanımlanması, tam olarak ortaya koyulması ve sınırlarının çizilmesi gerekmektedir. Eğer modellenmek istenen sistem çok karmaşık ise, ortaya çıkabilecek modelleme hatalarını azaltmak için, sistemi daha basit alt sistemlere bölmekte fayda bulunmaktadır. Örnek olarak salça işleme hattında üretim akışı incelenirken, buharlaştırıcılar ve sterilizatör önce ayrı ayrı tanımlanmalı, daha sonra diğer sistem elemanları ile birleştirilmelidir. Bu şekildeki tanımlamalarda, bir alt sistemin model sonucu bir diğer alt sistemin verisi olmakta ve böylelikle sistem bir bütün olarak oluşturulmaktadır.

Matematiksel Modelin Geliştirilmesi

Problemin amacı ve ana hatları belli olduktan sonra, konuya etki eden parametrelerin belirlenmesi ve boyut analizinin yapılması gerekmektedir. Böylelikle modelleme için gerekli olan temel teorik bilgilerin çerçevesi ortaya çıkacaktır. Daha sonra bu bilgiler ile başlangıç ve sınır koşullarından yararlanarak, model bağımlı ve bağımsız değişkenlerden oluşan eşitlikler ya da diferansiyel denklemler ile tanımlanmaktadır. Ancak çoğu zaman bağımsız değişken sayısını azaltıp, geliştirilen ifadelerin basitleştirilmesi amacı ile, örnek olarak ısı transfer katsayılarının sıcaklığa bağlı olmaması gibi kabullerin yapılması gerekmektedir. Bu nedenle modelleme sırasında "basitlik" anahtar kelime olmaktadır. Basitliğin ana koşulu ise, aşağıdaki verilen kavram ile tanımlanabilmektedir (JACOBY and KOWALIK, 1980):

"Eğer herhangi bir parametre, cevaplanmak istenen sorunun sonucunu hiç bir şekilde etkilemiyor veya ihmal edilebilecek mertebede etkiliyse, modelin tanımlanması sırasında kullanılmamalıdır"

Matematiksel Modelin Çözülebilirliğinin Saptanması

Bir önceki aşamada geliştirilen ifadelerin çoğu kapalı formda elde edilmektedir. Yani eşitliklerde bağımsız ve bağımlı değişkenler bir arada, çarpanlar halinde bulunmaktadır. Bu eşitliklerin çözülebilmesi için, kullanılacak çözüm yöntemine (analitik ve/veya sayısal) bağlı olarak uygun formda getirilmesi gerekmektedir. Çok basit örnek olarak bağımsız değişkenlerin yalnız bilinenler cinsinden, eşitliğin sağ tarafında toplanması verilebilir. Ayrıca temel bilgileri, başlangıç ve sınır koşullarını kullanarak, bilinmeyen sayısı kadar eşitlik türetilmesine de dikkat edilmelidir.

Matematiksel Modelin Çözümü

Modeli tanımlayan eşitlikler çoğu zaman analitik olarak çözülememekte ya da verilerin yetersiz kalması sonucu iterasyon yapılması gerekmektedir. Bu nedenle denklemlerin çözümünde sayısal yöntemler sık sık kullanılmaktadır. Sayısal çözüm sırasında zamanın ekonomik kullanımı ve işlem hassasiyeti ile insandan kaynaklanan hataları azaltabilmek için bilgisayar kullanılması gerekmektedir.

Sayısal çözümlerde, geliştirilen ifadelerin cinsine göre çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Örnek olarak modeli tanımlayan doğrusal eşitlikler birden fazla ise, bu eşitliklerin ortak sayısal çözümünü bulmak için Gauss Yok Etme, Gauss-Jordan Yok Etme, Gauss-Siedel Kısmi Ardışık Yaklaşım yöntemleri kullanılabilir (FOX ve PARKER, 1968).

Model tek bir doğrusal olmayan denklem sistemi ile tanımlanıyor ise, çözüme ulaşmak için Newton-Raphson (Teğet), Ardışık Yaklaşımlar (Fonksiyonel iterasyon) veya Kesen yöntemlerinden birinin kullanılması yeterli olabilmektedir (DORN ve McCracken, 1972).

Modeli temsil eden ifadeler adi diferansiyel denklemlerden oluşuyor ise Euler, Runge-Kutta, Seriyeye Açılım veya Picard (Ardeşık Yaklaşım) yöntemleri kullanılarak denklemler sayısal olarak çözülebilmektedir (COHEN ve ark., 1983).

Kısmi diferansiyel denklemler ile tanımlanan bir modelde ise sonuca, sonlu farklar yönteminin değişik yorumları olan "Explicit", "Implicit" ve Crank-Nicolson yöntemlerinden biri kullanılarak ulaşılabilir. Aynı şekilde sistemin modellenmesi sırasında ayrı bir yaklaşım olarak sonlu elemanlar yöntemi de kullanılabilir (MYERS, 1971; ÖZİŞİK, 1977; CROFT ve LILLEY, 1977).

Model çözümünün son aşamasını, yukarıda belirtilen sayısal yöntemleri kullanarak eşitliklerin bilgisayar dillerine aktarılması oluşturmaktadır. Bunun için genellikle FORTRAN, BASIC, PASCAL, C gibi bilgisayar dilleri kullanılmaktadır. Bu aşamada eşitliklerin doğru şekilde bilgisayara geçirilmesine ve programlama mantığına dikkat edilmeli, çok sıkı kontrol yapılmalıdır.

Matematiksel Modelin Kanıtlanması

Model ile ilgili herhangi bir değerlendirme yapılmadan önce, modeli tanımlayan ifadelerin çözülmesi ile elde edilen sonuçların güvenilir deneysel veya teorik çalışmalarla karşılaştırılması ve uygunluğunun saptanması gerekmektedir. Bu yapılmadığı takdirde, geliştirme ya da çözüm aşamasında yapılabilecek hatalar model sonuçlarını etkileyebilecektir. Sonuçlar incelendiğinde çoğu zaman yapılan hatalar kolaylıkla saptanabilmektedir. Ancak sınırlı karşılaştırmaların yapıldığı durumlarda, modelin geliştirilmesi ve eşitliklerin çözümü sırasında ayrı ayrı yapılan hataların birbirlerini sıfırlaması sonucu, çok iyi çözümler de elde edilebilmektedir. Ancak model gerçek koşullarda karşılaşılan, çok sayıda değişik verilerle çalıştırılıp kontrol edildiğinde, model hataları hemen ortaya çıkmaktadır.

Çözümün Uygulanması

Giriş bölümünde de belirtildiği üzere, bazı durumlarda ekonomik ve teknik nedenlerden dolayı, deneyler sınırlı sayıda yapılabilmektedir. Bu ise konunun tam olarak anlaşılabilmesini, daha uygun çözümlere gidilmesini veya farklı koşullar için sonuçlar elde edilmesini zorlaştırmakta, bazen de imkânsız kılmaktadır. Ancak sistem veya işlem matematiksel olarak modellenip, doğruluğu kanıtlandıktan sonra böyle kısıtlamalar tamamen ortadan kalkmaktadır. Böylelikle çok sayıda bağımsız değişkenin değiştirilmesi ile bağımlı değişkenlerin değişimi kolaylıkla izlenebilmektedir. Bununla birlikte geliştirme ve çözüm aşamasında yapılan kabullerin bir takım kısıtlamalara neden olduğu da unutulmamalıdır.

MATEMATİKSEL MODEL ÇÖZÜM HATALARI

Matematiksel modelleme hesap sonuçları, değişik mertebelerde ve çeşitli nedenlerden kaynaklanan hatalarla birlikte elde edilmektedir. Genelde karşılaşılan hatalar aşağıda kısaca açıklanmıştır. Bu hata kaynaklarına problemin çözümü sırasında, hata mertebeleri ve ekonomiklik kriterlerinin birlikte analizi ile dikkat edilmesi, model hassasiyetini artıracaktır (ROSE, 1974; SPIRET ve VANSTEENKISTE, 1982; ROBERTS ve ark. 1983).

1. Yazılım ve Yazım Hataları: Modeli tanımlayan eşitliklerin bilgisayara aktarımı sırasında ve programlama mantığında yapılan hatalar ile bilgisayar donanımından (magnetik teyp okuma/yazma hataları gibi) kaynaklanan hatalar.

2. Yaklaşım Hataları: Model eşitliklerinin sayısal çözümü sırasında yapılan yaklaşımlardan kaynaklanan hatalar. Örnek olarak analitik türev ifadesinin, sonlu farklar yöntemi ile hesaplanmasında ortaya çıkan, sayısal yöntemin kendisinden kaynaklanan hatalar gösterilebilir.

3. Veri Hassaslıkları: Verilerin elde edilmesi sırasında yapılan, ölçme ve kaydetme işlemlerinden kaynaklanan hatalar.

4. Ondalık Hataları: Hesaplamalar sırasında kullanılan yaklaşık formül ve tanımlamaların, kesirli sayılar yerine ondalık sonlu haneli rakamların kullanılmasından kaynaklanan hatalar. Örnek olarak π sayısının $22/7$ veya daha iyi bir yaklaşımla $355/113$ ($=3,141592654$) yerine $3,14$ alınması verilebilir.

5. Tamamlama (yuvarlama) Hataları: Bilgisayarın hesaplama sırasında, rakamları noktadan sonra sonlu sayıda hane ile (4 veya 8 gibi) tanımlaması sonucu, örnek olarak hesaplamalar sırasında 2,31487691 gibi çıkan değişkenin 2,3149'a tamamlanmasından kaynaklanan hatalar.

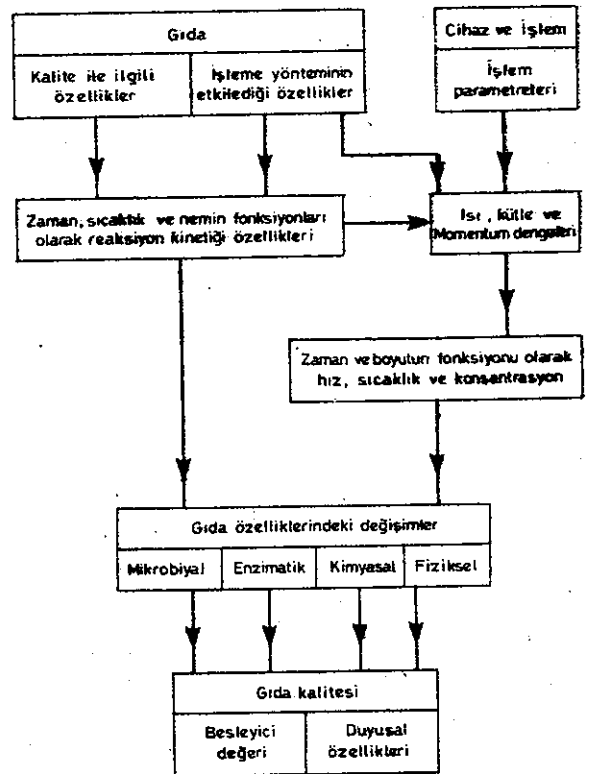
6. Sayısal Çözüm Hataları: Verilen ifadenin kökünün sayısal olarak bulunması sırasında kabul edilen hassasiyet aralığından kaynaklanan hatalar. Örnek olarak Newton-Raphson yöntemi ile bir eşitliğin kökünün hesaplanması sırasında kökün, 0,001 yerine 0,01 hassasiyetle bulunması sonucu ortaya çıkan hata gösterilebilir.

MATEMATİKSEL MODELLEME SIRASINDA KARŞILAŞILAN GÜÇLÜKLER

Matematiksel modellemede unutulmaması gereken konu, modelin hiç bir zaman kesin ve tam olarak sistem veya işlemi tanımlayamaması, sadece sonuç ile ilgili bir yaklaşım yapmasıdır. Çoğu zaman modeli tanımlayan eşitliklerin çözülmesi ile elde edilen sonuç, gerçekte elde edilenden az ya da çok farklı olmaktadır. Bununla birlikte, modelin geçerliliğinden söz edilebilmesi için, saptanan farklılıkların belirli aralıklar içinde olması gerekmektedir. Örnek olarak donma/çözünme işlemi modelleyen çalışmalarda, donma/çözünme süresini \pm % 10 fark aralığında hesaplayan modeller, hassas tanımlanmış olarak kabul edilmektedir (CLELAND ve ark., 1986).

Özellikle gıda işleme söz konusu olduğunda gıdanın fiziksel, termofiziksel ve fizikokimyasal özelliklerinin tam olarak belirlenememesi, her ürünün kendi içinde de farklılaşabilmesi önemli modelleme zorluklarını doğurmaktadır. Ayrıca gıda ürünlerinin kimyasal içerik ve fiziksel yapılarının çok karmaşık olması sonucu çoğu zaman konu ile ilgili temel bilgiler modelleme sırasında yetersiz kalmakta, yeterli olduğu durumlarda ise çözümü gereksiz yere zorlaştırabilmektedir. Bunun üstesinden, daha önce de belirtildiği gibi, problemi çözebilmek için olayı basitleştirecek bir takım kabullerin yapılması ile gelinmektedir. Bu ise yapılan kabulün önemine bağlı olarak model hassasiyetini azaltabilmektedir.

Matematiksel modelleme disiplinler arası bir çalışmayı gerektirmektedir. Bu nedenle gıda ile ilgili bir işlem incelendiğinde modellemeyi yapacak araştırma grubunun gıda konusuna ek olarak ısı, kütle, momentum transferi, kimya, fizikokimya, mikrobiyoloji, biyoteknoloji, matematik, bilgisayar yazılımı vb. konularında da uzmanlaşmış olması gerekmektedir (Şekil 2). Bununla birlikte çoğu durumda ya ilgili uzmanlık dallarındaki kişiler bir araya getirilememekte ya da disiplinler arası iletişim iyi bir şekilde kurulamamaktadır. İletişimin iyi olmadığı koşullarda da, bilgi eksikliğinden kaynaklanan, "her bir disiplinin yapabileceği katkıların bir diğer disiplin tarafından tam olarak bilinmemesi" problemi ortaya çıkmaktadır. Bunun sonucunda modelin işlemi tam olarak tanımlaması zorlaşmakta, çoğu zaman da mümkün olmamaktadır. Bu nedenle gıda ve gıda sanayii üzerinde matematiksel modelleme yapılacaksa, yukarıda belirtilen disiplinlerden kişilerin bir araya getirilmesi ya da ilişkiye geçirilmesi gerekmektedir. Ancak özellikle Ülkemizde böyle ortak çalışmalar yapıldığında, disiplinler arası ortak zeminin ve amacın belirlenememesinden kaynaklanan sorunlar ve takım çalışmasında ortaya çıkan zorluklar ile sık sık karşılaşmaktadır.



Şekil 2. Gıda İşleme Modellemesi Sırasında İlişkide Bulunan Kavramlar (HALLSTROM ve TRAGARDH, 1987).

SONUÇ

Modellemenin en büyük yararlarından biri, kişileri modelleme sırasında sistem veya işlemi tam olarak anlamaya zorlaması olmaktadır. Bunun sonucunda da çok değerli fikirler ve yorumlar geliştirilebilmektedir.

Bu çalışmada kısaca incelendiği gibi, matematiksel modelleme Gıda Sanayii'nde büyük bir uygulama potansiyeline sahiptir. Bu durumun aktif hale geçirilmesi ile, tasarım ve üretim aşamasında önemli ekonomik kazançlar ortaya çıkabilecektir. Ancak bunun için de yetişmiş personel ve bilgi birikimine ihtiyaç bulunmaktadır. Bununla birlikte genel olarak, Gıda Sanayii'nde iş verimliliğinin artırılması, üretim planlaması, enerji tasarrufu, girdi ve çıktılarının analizi v.b. konularında matematiksel modelleme yapılması ile Gıda Sanayii üst düzey yöneticilerine karar verme aşamasında büyük bir hareket serbestliği sağlanabilecek, çeşitli tasarruf önlemlerinin belirlenmesi konusunda seçenekler sunulabilecek ve uzun vadeli planlar yapılabilecektir.

KAYNAKÇA

- ANONYMOUS, 1985. Freezing and defrosting time of food. "in ASHRAE Fundamentals Handbook", Chapter 36, 1985.
- CLELAND, D.J. A.C. CLELAND, R.L. EARLE, S.J. BYRNE 1986. Prediction of thawing times for foods of simple shape. *International Journal of Refrigeration* 9 (2) 220-228.
- COHEN, A.M., J.F. CUTTS, R. FIELDER, O.E. JONES, J. RIBBANS, E. STUART 1973. Numerical analysis, McGraw Hill Book Company, 341 sayfa.
- CROFT, D.R., D.G. LILLEY 1977. Heat transfer calculations using finite difference equations, Applied Science Publishers, 1977.
- DEVRES, Y.O. 1988. Soğuk hava depolarında enerji tasarrufu, ISOHA 88,28 sayfa, 9-11 Mart, İstanbul
- DEVRES, Y.O. 1989a. Temperature and weight loss analyses of some fruit and vegetables in cold storage. South Bank Polytechnic. Institute of Environmental Engineering, Research Memorandum No. 113, 18 sayfa.
- DEVRES, Y.O. 1989b. Depression method for predicting unfrozen water fraction in frozen foodstuffs. South Bank Polytechnic. Institute of Environmental Engineering, Research Memorandum No. 115, 34 sayfa.
- DEVRES, Y.O. 1989c. Soğuk hava depolarında bazı meyve ve sebzelerin sıcaklık ve ağırlık kaybının matematiksel analizi, VII. Ulusal Isı Bilimi ve Tekniği Kongresi, 25-30 Eylül 1989, 11 sayfa, İzmir.
- DEVRES, Y.O. 1989d. Donma noktası kayma yöntemi ile donmuş gıdalarda donmamış su oranının belirlenmesi, VII. Ulusal Isı Bilimi ve Tekniği Kongresi, 25-30 Eylül 1989, 10 sayfa, İzmir.
- DEVRES, Y.O. 1989e. Dondurulmuş gıdaların fiziksel özelliklerinin bilgisayar modeliyle saptanması, Gıda ve Soğuk Tekniğinde Yeni Gelişmeler Sempozyumu, 18-19 Ekim 1989, İstanbul.
- DEVRES, Y.O. 1991. Dondurulmuş gıdaların çözündürme işlemlerinin modellenmesi ve çözündürme kayıplarının azaltılması. Doktora tezi, Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 184 sayfa, İstanbul.
- DORN, W.S., D.D. MCCRACKEN 1972. Numerical methods with Fortran IV case studies, John Wiley and Sons, Inc., 447 sayfa.
- FOX, L., I.B. PARKER 1968. Chebyshev polynomials in numerical analysis, Oxford University Press, 205 sayfa.
- HALLSTRÖM, B., C. TRAGARDH 1987. Mathematical modelling in food engineering research. *Acta Alimentaria*, 16 239-248.
- JACOBY, S.L.S., J.S. KOWALIK 1980. Mathematical modelling with computers, Prentice-Hall, Inc.
- KARA, İ. 1985. Yöneylem araştırmasının yöntem bilimi, Anadolu Üniversitesi Yayınları No. 96, 117 sayfa.
- MYERS, G.E. 1971. Analytical methods in conduction heat transfer, McGraw Hill Book Company.
- ÖZİŞİK, M.N. 1977. Basic heat transfer, McGraw-Hill Book Company.
- PALA, M., Y.O. DEVRES 1987. Bilgisayar yardımı ile soğuk hava tesislerinde enerji tasarrufu önlemlerinin belirlenmesi, Gıda Sanayii Dergisi, Cilt 1, No. 3, Ağustos-Eylül, 14-23, İstanbul.
- PALA, M., Y.O. DEVRES 1988a. Computer simulated model for power consumption and weight loss in a cold store, Col Chain in Economic Perspective, International Institute of Refrigeration, Section B1 Commission Meeting, 17th-20th May, Wageningen, Holland.
- PALA, M., Y.O. DEVRES 1988b. Bilgisayar benzeşimli model ile bir soğuk hava deposunda ısı kazancı ve ürün nem kaybının incelenmesi, Gıda Sanayii Dergisi, Cilt 2, Sayı 4, Eylül-Ekim, 19-26.
- PALA, M., Y.O. DEVRES 1990. Soğuk hava tesislerinin tasarım özellikleri ve enerji tasarrufuna yönelik pratik uygulamalar, Gıda Sanayii 4 (1) 36-45.
- RIVETT, P. 1972. Principles of model building, John Wiley and Sons.
- ROBE, K. 1990. CIM-The big picture, 1980's: computer integrated manufacturing, 1990's: computer integrated management, Food Processing, Putman Publication, March, 37-48.
- ROBERTS, N., D.F. ANDERSEN, R.M. DEAL, M.S. GARET, W.A. SHAFFER 1983. Introduction to computer simulation: the system dynamics approach, Addison-Wesley Publishing Company.
- ROSE, L.M. 1974. The application of mathematical modelling to process development and design, Applied Science Publishers Ltd., London, 364 sayfa.
- SPRIET, J.A., G.C. VANSTEENKISTE 1982. Computer-aided modelling and simulation, Academic Press.
- SWIENTEK, R.J. 1990. Simulation modelling: a powerful tool for optimizing plant design and operations, Food Processing, Putman Publication, June 99-102.