

B-SPLİNE FONKSİYONLARI KULLANILARAK EĞRİ VE YÜZEY OLUŞTURULMASI

Abdullah Yıldız, Özer Öz, Fahri Vatansever

Özet- Bu makalede B-Spline fonksiyonları vasıtasıyla düzlemde ve uzayda, eğriler ve yüzeyler inşa edilecektir. Computer-aided design - Bilgisayar yardımıyla tasarım olarak gelişen bu saha alanı içine giren konumuza giriş yapılmış matematik temelleri anlatılarak, örneklerle beraber eğriler ve yüzeyler oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler-B-Splines, Geometrik Modelleme.

Abstract - In this paper we will introduce B-Splines functions and then with these functions we construct curves and surfaces in two and three dimensional space. This field is known as CAD- Computer aided design. We gives some mathematical concepts and some examples of curves and surfaces.

Keywords - B-Splines, Geometric design.

I. GİRİŞ

Eğri ve yüzey temsilde polinom fonksiyonlarının kullanılması, bilhassa son zamanlarda rasyonel polinom fonksiyonları kullanmak CAD/CAM uygulamalarında giderek yaygınlaşmaktadır.

B-Spline'lar kullanılarak, eğri ve yüzey oluşturmak 1983'den beri (IGES)-Initial Graphics Exchange Specification standartları ile kullanılmaktadır. Bu fonksiyonları kullanarak birçok modelleme sistemleri geliştirilmiştir.

A. Yıldız, Sakarya Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Sakarya
Ö. Öz, Şehit Üsteğmen Selçuk Esendoğlu Lisesi, Sakarya
F. Vatansever, Sakarya Üniversitesi, Teknik Eğitim Fakültesi, Sakarya

Bu gelişmelerde, aşağıda özelliklerini sayacağımız avantajlar büyük rol oynamıştır.

Spline fonksiyonları standart analitik şekilleri (Doğrular, konikler, çemberler, düzlemler ve kuadratik yüzeyler) ile beraber serbest form eğriler ve yüzeyleri de hassas bir şekilde temsil edilmektedir.

Bunlar ekstra serbestlik dereceleri (ağırlıklar) kullanarak daha genel şekiller oluşturabilmektedirler.

Bu yüzeyler projektif dönüşümler altında değişmez kalmaktadır. Yani, kontrol noktalarının projektif transformasyonları eğrinin veya yüzeyin transformasyonlarına denktirler.

Bu çalışmada birinci bölümde B-Spline baz fonksiyonları tanıtılmıştır ve bunların vasıtasıyla eğriler ve tensor çarpımı vasıtasıyla da yüzeylerin nasıl oluşturulduğu anlatılmıştır. Bu baz fonksiyonlarının analitik özellikleri vurgulanarak, bunlara tekabül eden eğri ve yüzeylerde geometrik özelliklerin nasıl oluşturulduğu belirlenmiştir. Bunlar örneklerle de sergilenerek geometrik gösterimler yapılmıştır.

II. B-SPLİNE BAZ FONKSİYONLARI

Cox de-Boor algoritması olarak bilinen, B-splineların ardışık rekürans bağıntısı temel olarak alınacaktır.

$T = \{t_0, \dots, t_j, t_{j+1}, \dots, t_m\}$ azalmayan bir reel sayı dizisi olsun. İ. normalize, p. dereceden B-spline fonksiyonu $N_{i,p}(t)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t < t_{i+1} \text{ ve } t_i < t_{i+1} \\ 0 & \text{diğer değerlerde} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+p}-t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1}-t}{t_{i+p+1}-t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t) \quad (1)$$

Burada, p. derece (p+1). merteye olmaktadır. $\frac{0}{0} = 0$ alınacaktır. $N_{i,p}(t)$ fonksiyonu tüm reel ekseninde tanımlanmıştır. Fakat, $t \in [t_0, t_m]$ aralığında işlem görecektir. $N_{i,p}(t)$, p. derece parçalı polinom fonksiyonudur. T knot vektör, t_i değerleri düğüm noktaları olarak isimlendirilir. $[t_i, t_{i+1}]$ aralığı i. düğüm aralığı olarak isimlendirilir.

$N_{i,p}(t)$ fonksiyonu aşağıdaki önemli özelliklere sahiptir.

♦ $N_{i,p}(t) \geq 0$ (i,p,t'nin her değeri için)

♦ $\forall t \in [t_0, t_m]$ için $\sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) = 1$ 'dir. Buna birimin parçalanması denir. n, verilen knot vektörü için p. dereceden B-spline fonksiyonlarının sayısıdır. (n, p ve m'ye bağlıdır).

♦ Eğer t, $[t_i, t_{i+p+1}]$ kapalı aralığının dışındaysa $N_{i,p}(t) = 0$ 'dır. Yani, yerel destekli bir fonksiyondur. Üstelik, verilen $[t_i, t_{i+1}]$ aralığında en fazla (p+1) tane $N_{i,p}(t)$ sıfırdan farklıdır.

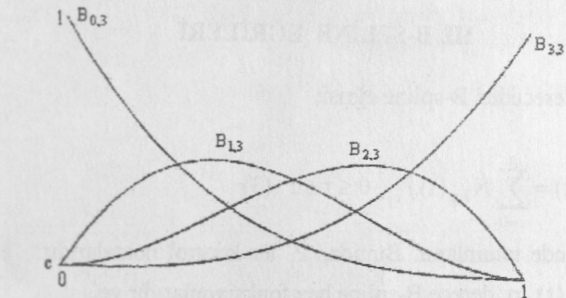
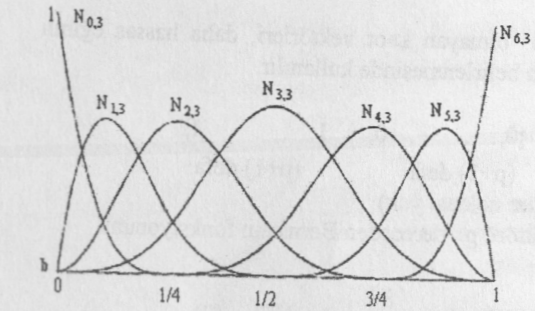
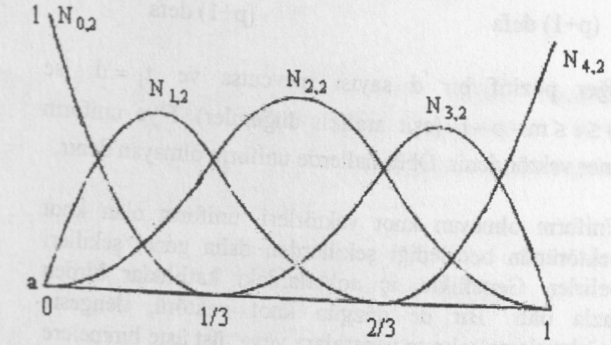
♦ Türevlenebilmesi:

$N_{i,p}(t)$ 'nin knot dizisinin her bir aralığının içerisinde bütün türevleri mevcuttur. (Buralarda polinomdurlar.) Knot noktalarında ise (p-k) defa sürekli türevlenebilir. Burada k, knotun katlılığıdır.

♦ Ekstramumlar:

P=0 hali hariç $N_{i,p}(t)$ bir maksimum değere sahiptir. Daha fazla bilgi için [3] ve [6] kaynaklarına bakılabilir.

Knot vektörlerini keyfi seçerek B-spline baz fonksiyonlarının nasıl fonksiyonlar olduklarını araştırabiliriz.



Şekil 1. a) Kuadratik B-spline baz fonksiyonları

$[0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1]$ knot vektörü için b) Kübik B-spline baz fonksiyonları

$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1/4 \ 1/2 \ 3/4 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ knot vektörü için

c) Kübik Bernstein polinomları $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ knot vektörü için

(Şekil 1)'de bazı B-spline baz fonksiyonları görülmektedir. T knot vektörünün seçimi bu fonksiyonların şekillerini etkilemektedir. Çeşitli tipte knot vektörleri yaygın olarak kullanılmaktadır. Kabul edelim ki p sabit alınrsa; $T = \{t_0, \dots, t_m\}$ eğer birinci ve son noktaları (p+1) defa tekrar ederse, yani; $t_0 = t_1 = \dots = t_p$ ve $t_{m-p} = t_{m-p+1} = \dots = t_m$ ise periyodik knot vektör denir. $t_0 = 0$ ve $t_m = 1$ ise periyodik knot vektörleri;

$$\{0, \dots, 0, t_{p+1}, \dots, t_{m-p-1}, 1, \dots, 1\}$$

(p+1) defa (p+1) defa

Eğer pozitif bir d sayısı mevcutsa ve $t_i = d$ ise $p \leq i \leq m-p-1$ (eşit aralıklı düğümler) T'ye uniform knot vektör denir. Öbür hallerde uniform olmayan denir.

Uniform olmayan knot vektörleri, uniform olan knot vektörünün belirlediği şekillerden daha genel şekilleri belirler. Genellikle, iç noktalardaki katlılıklar birden fazla olur. Bir de düzgün knot vektörü, dengesiz dağılımlarsa salınım yapımlara veya üst üste binmelere sebep olabilir.

Uniform olmayan knot vektörleri, daha hassas eğimli şekillerin belirlenmesinde kullanılır.

$$T = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$$

(p+1) defa (p+1) defa

(İç düğüm noktası yok)
Knot vektörü p. dereceden Bernstein fonksiyonunu verir.

$$N_{i,p}(t) = B_{i,p}(t) = \binom{p}{i} t^i (1-t)^{p-i} \quad (2)$$

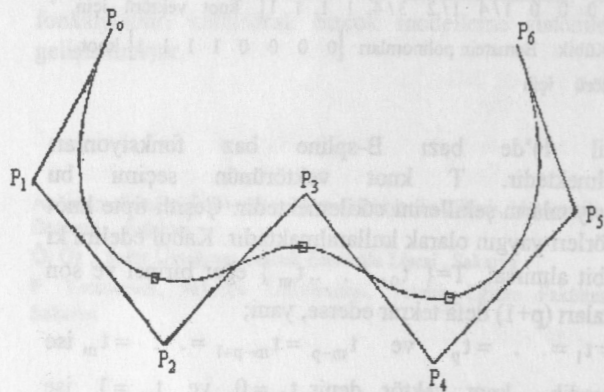
(Bkz. Şekil 1-c)

III. B-SPLİNE EĞRİLERİ

p. dereceden B-spline eğrisi;

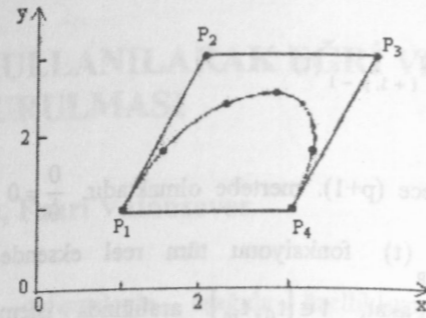
$$C(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) P_i \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, P_i 'ler kontrol noktalarıdır. $N_{i,p}(t)$, p. derece B-spline baz fonksiyonlarıdır ve $T = \{t_0, \dots, t_m\}$ knot vektörü ile tanımlanır. Knot sayısı ve kontrol noktaları sayısı $m+1 = (n+1) + (p+1)$ ile verilir.



Şekil 2 . Kübik B-spline . (Şekil 1-b)'de verilen knot dizisiyle

Şekil 2'de (şekil 1-b)'deki baz fonksiyonları ile elde edilen eğri görülmektedir.



Şekil 3. Kontrol noktaları, $P_1[1 \ 1]$, $P_2[2 \ 3]$, $P_3[4 \ 3]$, $P_4[3 \ 1]$ ve knot vektörü $[0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3]$ olan 2. dereceden B-spline eğrisi

B-spline eğrileri aşağıdaki özelliklere sahiptirler:

- 1) Uç noktalardaki (p+1) katlılığı;
 $C(0) = P_0$, $C(1) = P_n$ ve $C'(0) = \frac{P_1 - P_0}{t_{p+1}}$ olmasını sağlar.
- 2) Afin invarianttır. Yani; Kontrol noktalarına bu dönüşüm uygulanırsa, eğriye de bu dönüşüm uygulanmış olur.
- 3) Konveks bölge özelliği: Kontrol noktalarının oluşturduğu şekil konveks çukurlar içinde kalır. (Convex hull). Yani; Eğer $t \in [t_j, t_{j+1})$ aralığında ve $p \leq j < m-p-1$ ise $C(t)$, P_{j-p}, \dots, P_j kontrol noktalarının konveks çukurluğu içindedir.
- 4) Kontrol noktalarının birleştirilmesiyle, eğriye lineer yaklaşım yapılmıştır. Bu yaklaşım knot ilavesiyle iyileştirilebilir.
- 5) Yerel yaklaşım: Eğer bir kontrol noktası kaldırılırsa, bunun eğriye etkisi (p+1). aralık üzerindedir.
- 6) $C(t)$, knot noktaları dışında sonsuz türevlenebilir. Fakat, knot noktalarında k katlı knot varsa, (p-k) mertebeden sürekli türevlenebilir.
- 7) (Variation diminishing property): Kabaca söylemek gerekirse, eğri kontrol noktalarının değişiminden daha fazla salınan bir değişim göstermez.
- 8) B-spline eğrileri, knot dizisinde iç noktalar yoksa Bezier eğrilerine dönüşürler.
 $N_{i,p}(t) = B_{i,p}(t)$

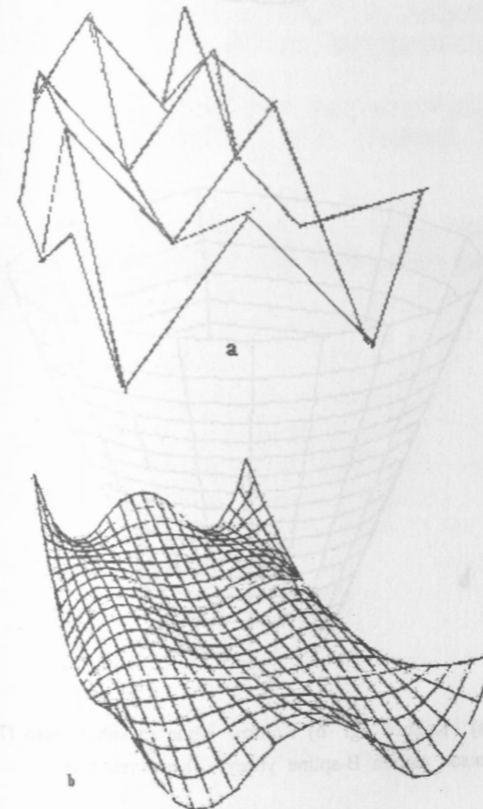
IV. TENSOR ÇARPIM B-SPLİNE YÜZEYLERİ

Bir eğri bir parametre ile tanımlanırken, yüzey iki parametre gerektirir. u ve v parametreler $0 \leq u, v \leq 1$ olmak üzere (p,q). dereceden tensor çarpım B-spline yüzeyi;

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{ij} \quad (4)$$

formundadır. $P_{i,j}$ kontrol noktaları, kontrol ağı denilen dikdörtgen bir dizi içerisinde topolojik olarak düzenlenirler. $N_{i,p}(u)$, $N_{j,q}(v)$ B-spline baz fonksiyonlarıdır. Yukarıda II. bölümde (1) denkleminde tanımlandığı gibi B-spline baz fonksiyonlarıdır.

U ve V periyodik olmayan ve uniform olmayan knot vektörleri dizisi olabilirler. Bunlar $N_{i,p}(u)$ ve $N_{j,q}(v)$ fonksiyonlarını tanımlarlar. (Şekil 4)'de kontrol ağı ve buna tekabül eden B-spline yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4 . a) Kontrol ağı b) Kontrol ağına tekabül eden (2,3) dereceden tensor çarpım B-spline yüzeyi. Knot vektörler

$$U = [0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1] \text{ ve}$$

$$V = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

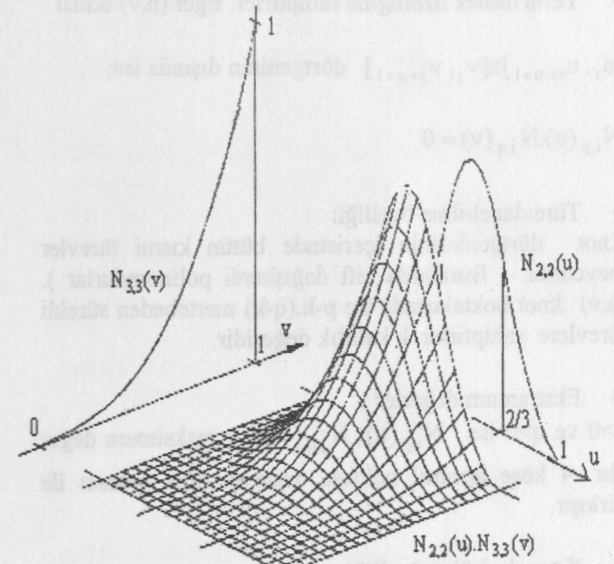
(4) yüzeyi iki yönlü eğri şeması tanımlar. Parametrelerden birisini sabit tutarsam; $u = u_0$, $0 \leq u_0 \leq 1$. O zaman, $0 \leq v \leq 1$ değişince yüzey üzerinde B-spline eğrisi elde edilir.

$$C(v) = S(u_0, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u_0) N_{j,q}(v) P_{ij} \quad (5)$$

$$= \sum_{j=0}^n N_{j,q}(v) \left(\sum_{i=0}^m N_{i,p}(u_0) P_{ij} \right) = \sum_{j=0}^n N_{j,q}(v) Q_j(u_0)$$

$C(v)$ eğrisi için $Q_j(u_0)$, (n+1) kontrol noktası olur. Özel olarak; $S(0,v)$, $S(1,v)$, $S(u,0)$ ve $S(u,1)$ yüzeyin 4 sınır noktasıdır. $(m+1)(n+1)$ çarpım fonksiyonu $N_{i,p}(u)$, $N_{j,q}(v)$ (4) denkleminin (p,q) derecesinden iki değişkenli B-spline baz fonksiyonlarını oluştururlar.

Bu fonksiyonlar P_{ij} kontrol noktalarının arasındaki bükülmeleri sağlarlar. Bunlardan iki tanesi (şekil 4-b) ve (şekil 5-a)'de gösterilmiştir. Bunlar (Şekil 1-a-c)'dekilerin

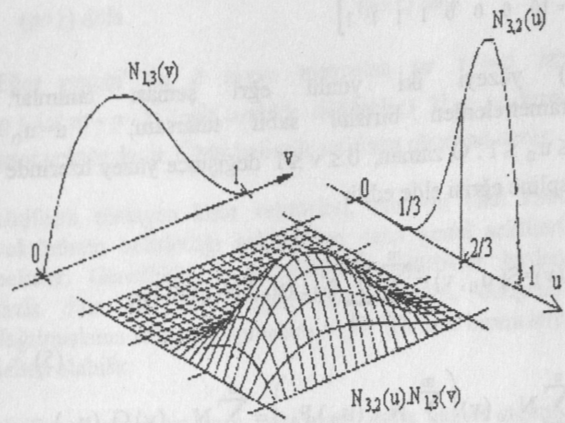


yüzey karşılıklarıdır.

Şekil 5 - a) P_{23} kontrol noktasının çarpım fonksiyonunun grafiği ve oluşturduğu yüzey

Eğer bir P_{ij} kontrol noktası kaldırılırsa, bu yüzey üzerinde sadece $[u_i, u_{i+p+1}] \times [v_j, v_{j+q+1}]$ dörtgeni üzerinde etkisini gösterir.

◆ İç knot noktaları yoksa B-spline yüzeyleri, Bezier yüzeyleri olurlar.



Şekil 5-b P_{31} kontrol noktasının çarpım fonksiyonunun grafiği ve oluşturduğu yüzey

Çift değişkenli B-spline baz fonksiyonları aşağıdaki analitik özelliklere sahiptirler.

◆ $N_{i,p}(u) \cdot N_{j,q}(v) \geq 0$ (her i,j,p,q,u,v için)

◆ $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) \cdot N_{j,q}(v) = 1 \quad \forall (u,v) \in [0,1] \times [0,1]$ için

◆ Yerel destek özelliğine sahiptirler. Eğer (u,v) ikilisi

$[u_i, u_{i+p+1}] \times [v_j, v_{j+q+1}]$ dörtgeninin dışında ise;

$$N_{i,p}(u) \cdot N_{j,q}(v) = 0$$

◆ Türevlenebilme özelliği:

Knot dörtgenlerinin içerisinde bütün kısmi türevler mevcuttur. (Buralarda çift değişkenli polinomdurlar). (u,v) knot noktalarında ise $p-k$ ($q-k$) mertebeden sürekli türevlere sahiptirler. k katlılık değeridir.

◆ Ekstramum değerler :

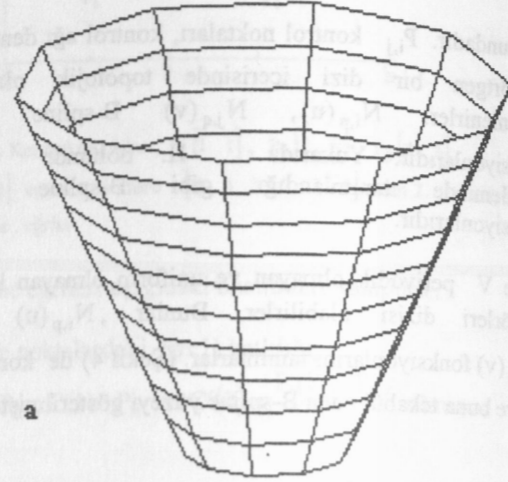
$p > 0$ ve $q > 0$ ise $N_{i,p}(u), N_{j,q}(v)$ bir maksimum değer alır. 4 köşe kontrol noktası, yüzeyin dört noktası ile birleşir.

◆ Konveks bölge özelliği

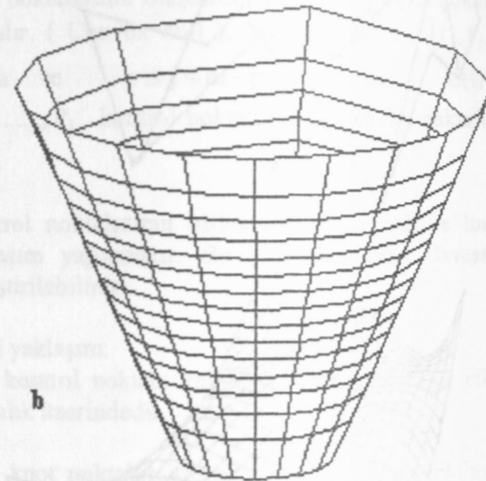
◆ Variation diminishing property

◆ Kontrol noktaları üçgen yüzeylerle birleştirilirse, yüzeyin parçalı düzlemsel yaklaşımı yapılmış olur.

◆ Yerel yaklaşım:



a



b

Şekil 6 . a) Kontrol ağı b) Kontrol ağına tekabül eden (7,8). dereceden tensor çarpım B-spline yüzeyi . Knot vektörler

$$U = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 4]$$

$$V = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4]$$

V. SONUÇLAR

Yukarıdaki bölümlerde, B-spline eğrileri ve tensor çarpımı B-spline yüzeyleri en çarpıcı özellikleri ile verilmiştir. Bunlara göre imalat sanayinde, tasarım alanlarında bu eğri ve yüzey uydurmaların, bu özellikleri ile yapılmaları sağlanmaktadır. Bazı yüzeyler için daha genel olarak nurbs-nonuniform rational B-spline eğrileri bu sahada daha avantajlı olmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Cox, M 'The numerical evaluation of B-splines' J. Inst. Maths. Applic. (1972) Vol 10 pp 134-149
- [2] deBoor, C 'on calculating with B-splines' J. Approximation Theory (1972) Vol 6 pp 50-62
- [3] deBoor, C A practical guide to splines Springer Verlag, New York / Berlin (1978)
- [4] Risenfeld, R 'Applications of B-spline approximation to geometric problems of computer aided desing' PhD Thesis Syracuse University, Syracuse, NY, USA (1973)
- [5] Bartels, R, Beatty, J and Barsky, B 'An introduction to the use of splines in computer graphics' SIGGRAPH'84 Tutorial Notes Minneapolis (1984)
- [6] Faux, I and Pratt, M Computational geometry for desing and manufacture Ellis Horwood, Chichester (1979)
- [7] Boehm, W 'Inserting new knots into B-spline curves' Comput.-Aided Des. (May 1980) Vol 12 No 4 pp 199-201