TÜRK BİLİM ARAŞTIRMA VAKFI
TÜBAV
1995
TURKISH SCIENCE-RESEARCH FOUNDATION
TUBAV BILIM DERGISI

Yıl: 2010, Cilt:3, Sayı:1, Sayfa:128-136

FONKSİYON KAVRAMI: TARİHİ GELİŞİMİ, ÖĞRENİLME SÜRECİ, ÖĞRENCİ YANILGILARI VE ÖĞRETİM STRATEJİLERİ

Tangül UYGUR KABAEL [1*]

[1]Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi

Özet

Matematiğin temel taşlarından biri olan fonksiyon kavramı, matematik eğitimcilerinin kaynaklara kattıkları çalışmalar ile üzerinde önemle durdukları bir kavram olmasına karşın, öğrencilerin çoğunun pek çok güçlük ve dolayısıyla kavram yanılgısı yaşadıkları bir konu olmaktan çıkamamıştır. Bu çalışmada, kaynaklardaki başlıca araştırmalar taban alınarak fonksiyon kavramının tarihsel gelişimine, öğrenme teorileri çerçevesinde öğrenilme basamaklarına, öğrencilerin kavrama ilişkin sıklıkla yaşadıkları güçlük ve yanılgılara ve bu yanılgıları ortadan kaldırmak için araştırmalarda önerilen başlıca öğretim stratejilerine yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fonksiyon kavramı, fonksiyonları anlama, fonksiyonlarda kavram yanılgıları, fonksiyonları öğretme stratejileri

CONCEPT OF THE FUNCTION: HISTORICAL DEVELOPMENT, UNDERSTANDING PROCESS, MISCONCEPTIONS AND THE TEACHING STRATEGIES

Abstract

As one of the foundation stones of the mathematics, the concept of function is thought by the mathematics teachers with much attention and will, but, for the most part of the students it continues to be a misconception and hard to learn subject. In this study, the historical development of the concept of function, the steps of being learnt in the framework of the theories of learning, students' difficulties and misconceptions with the notion and major teaching strategies of the concept are presented based on the major studies related with the concept, in the mathematics education literature.

Keywords: Function concept, understanding functions, misconceptions with the concept of function, teaching strategies of the concept of function

* E-posta: tuygur@anadolu.edu.tr

1. Fonksiyonların Matematik Tarihindeki Yeri

Matematik dünyasında ortaya çıkışı çok eski çağlara dayanan fonksiyon kavramı, klasik ve modern matematik arasındaki ayırıcı özeliklerden biri olarak görülür. Matematikçiler tarafından çeşitli biçimlerde tanımlanarak gelişen [1,2] kavram için "*fonksiyon*" adını ilk olarak Leibniz, matematiğin temel nesnelerinin geometrik eğriler olarak alındığı 17. yüzyılda kullanmıştır [1]. Leibniz, teğetin bir eğri fonksiyonu olduğunu söylemiştir [2]. 1748 de Euler fonksiyon kavramı için genel tanımı vermiştir:

Değişken niceliğinin bir fonksiyonu; sabit ya da sayı nicelikleri ve değişken niceliklerinden oluşan bir analitik ifadedir [3].

1821'de, değişkenler arasında bağlılık kavramını fonksiyon tanımına alan Cauchy'nin de fonksiyon kavramını bir formül olarak düşündüğü görülmektedir [3]. Gelişim sürecinde fonksiyon kavramını eğri ya da analitik ifadenin ötesinde bir eşleme olarak gören ilk matematikçi Dirichlet olmuştur. Dirichlet, fonksiyon kavramı için aşağıdaki tanımı vermiştir:

$a<x<b$ aralığındaki her x değişkenini, değeri tanımlı tek bir y değişkeni ile eşliyor ise, y; x değişkeninin bir fonksiyonudur ve eşlemenin hangi yolla kurulduğu önemsizdir [2].

1900 lerde, Drichlet'in tanımındaki eşlemenin hangi yolla kurulduğunun önemsizliğine karşı görüşler oluşmuş, Baire, Borel ve Lebesgue, fonksiyon tanımında eşlemenin kuralının belirli olmasının gerekliliğini vurgulamışlardır [2]. 1939'da Bourbaki ise aşağıdaki tanımı vermiştir:

E ve F, eş olabilir iki küme olsunlar. Verilen bağıntıda x ile bağlı tek bir y var ise, E nin bir x elemanı ile F nin bir y elemanı arasında bağıntıya fonksiyon bağıntısı denir [2].

Bourbaki daha sonra fonksiyon kavramının tanımını, $E \times F$ kartezyen çarpım kümesinin belli alt kümeleri olarak vermiştir [2].

Bu gelişimin sonunda 1960'lardan sonra fonksiyon kavramı, Drichlet-Bourbaki tanımı ile ders kitapları ve öğretim programlarında yerini almıştır. Buna göre fonksiyon; boş olmayan iki küme arasında, her elemanı yalnızca bir elemana götüren bir eşlemedir.

2. Fonksiyonları Anlama Süreci

Fonksiyon kavramının öğrenilme süreci pek çok matematik eğitimcisinin araştırma konusu olmuştur. Burada belli başlı öğrenme teorilerine göre fonksiyon kavramının öğrenilme sürecini araştıran bazı çalışmalar incelenecektir. APOS; Dubinsky ve arkadaşlarının [4] geliştirdiği, bir kavramın öğrenilme sürecinde hangi zihinsel oluşumların gerçekleştiğini inceleyen teorik bir çerçevedir. Bu zihinsel oluşumlar *hareket (action), süreç (process), nesne (object)* ve *şema (schema)* olarak adlandırılır. Fonksiyon kavramının öğrenilme süreci bu teorik çerçeve ile çalışılan ilk konulardandır [5]. Elde edilen sonuçlara göre; fonksiyon kavramını algılaması *hareket* düzeyinde olan bir öğrenci, formülü verilen bir fonksiyon için girdi çıktı değerlerini hesaplayabilir. Buna karşın bir fonksiyon formülü üzerinde hesaplama yapmaksızın bir temsilin fonksiyon olup olmadığı yorumunu yapma, bir fonksiyonun tersi kavramı ya da bir türev alma sonucunun yine bir fonksiyon olduğu bilgisi, *hareket* düzeyinde olan bir öğrenci için güçlük oluşturur. Öğrenci, fonksiyonu bağımsız değişken denilen girdi ile bağlı değişken olan çıktı arasında bir eşleme olarak görebilme ve bir girdiye uygulanan bazı işlemler sonucunda tek bir çıktı elde edildiği algılamalarının sonucu olarak *süreç* düzeyine ulaşmıştır. Fonksiyon kavramının *süreç* olarak bilincinde olan ve gerektiğinde başka *hareket* ya da *süreçleri* fonksiyonlara uygulayarak, fonksiyonları matematiksel nesne olarak görebilen öğrencinin kavramı anlaması ise *nesne* düzeyine ulaşmıştır. Örneğin, fonksiyon kavramını anlaması *nesne* düzeyinde olan bir öğrenci, fonksiyonlar kümesinde dört işlemi ya da bileşke işlemlerini kavrayabilir ve çeşitli durumlarda uygulayabilir. Kavramı anlamadaki bilişsel gelişimi *şema* düzeyine ulaşmış bir öğrenci ise, gelişim sürecini tamamlamıştır ve kavramı gerektiğinde başka her duruma aktarabilir.

Fonksiyon kavramının öğrenilme sürecinden söz etmek istediğimiz bir başka teorik çerçeve ise Gray ve Tall`un [6] süreç-kavram ikiliği olacaktır. Bu teorik çerçeve, matematiksel bir sembolün hem bir süreci hem de bir kavramı temsil ettiği düşüncesi üzerine kurulmuştur. Gray ve Tall, *süreç* (*process*) ve *kavram* (*concept*) kelimelerinden türetilmiş *procept* kelimesini kullanırlar ve procept'i ise *elementer procept* ifadesi yardımıyla açıklarlar. *Elementer procept*'in üç bileşeni vardır. Birincisi *süreç*, ikincisi sürecin ürettiği *nesne* ve üçüncüsü ise süreç ya da nesneyi temsil eden *sembol*dür. Burada nesneye kavram da denilebilir. Tall'a (1992) göre $y = f(x)$ şeklinde (örneğin

$f(x) = x^3-27$) bir fonksiyon gösterimi, hem x in özel bir değeri için fonksiyonun değerinin nasıl hesaplanacağını söyler yani bir süreci temsil eder, hem de bir matematiksel nesne olan, x değişkenine bağlı bir fonksiyonu temsil eder.

Tall ve Vinner 'ın [7,8] geliştirdiği kuramsal çerçevede ise, kavramın tanımı ve kavram görüntüsü ele alınır. Vinner'a göre kavram görüntüsü; zihinde kavramın ismi ile ilişkilendirilir ve kavramın görsel temsillerinin, izlenim ya da deneyimlerin koleksiyonu olabilir. Vinner, modelinde kavram görüntüsünü bir hücre, kavram tanımını bir diğer hücre olarak ele alır ve başlangıçta bunlardan birinin boş olabileceğini ve örnek, problem ve açıklamalar verildikçe bu hücrelerin içlerinin dolduğunu söyler. Vinner'a göre kavrama bir anlam yüklenmedikçe, kavram görüntüsü hücresi boştur ve bu durum kavramın tanımının ezberlenmesi durumunda ortaya çıkabilir. Vinner, kavramın görüntüsü ile ilişkilendirilmiş görsel temsillerin, zihinsel resimlerin, izlenim ya da deneyimlerin sözel formlara dönüştürülebileceğini, ancak bu sözel formların zihnimizi ilk uyaran olmadıklarını vurgular. Örneğin "*fonksiyon*" sözcüğünü duyduğumuzda "$y=f(x)$" matematiksel ifadesini, bir fonksiyon grafiğini, ya da $y=x^2$, $y=sinx$, $y=lnx$ gibi özel bir fonksiyonu hatırlayabiliriz. Vinner ve Dreyfus [9] yaptıkları çalışmada, matematik (calculus) öğrencilerinin, fonksiyon kavramı ders kapsamında verilmeden önce, kavrama ilişkin sahip oldukları "*kavram tanımı*" ve "*kavram görüntülerini*" araştırmışlardır. Araştırmada öğrencilere yöneltilen açık uçlu testte, biri grafik temsilden oluşan altı farklı durumun fonksiyon olup olmadığını sorgulamışlar ve son soruda da fonksiyon kavramının tanımını istemişlerdir. Elde ettikleri veriler sonucu, öğrencilerin kavramın tanımına ilişkin verdikleri yanıtları altı sınıfa ayırmışlardır. Öğrenci yanıtlarında fonksiyon kavramının önemli rol oynayan yönlerini yani öğrencilerin sahip olduğu kavram görüntülerini ise aşağıdaki gibi belirlemişlerdir.

1.*Tek değerlilik*: Bir eşleme, tanım kümesindeki her bir elemana tek bir değer eşliyorsa fonksiyondur.

2.*Süreksizlik***:** Grafik bir boşluğa sahip. Eşleme tanım kümesindeki en az bir noktada süreksiz.

3.*Ayrık Tanım Kümesi*: Eşlemenin tanım kümesi, iki farklı kurala sahip iki ayrık alt bölgeye ayrılmış. Grafik karakterini bir bölgeden diğer bölgeye geçerken değiştirebilir.

4.*Hariç Nokta:* Verilen eşleme için dahil olmayan yani eşlemenin genel kuralının sağlanmadığı bir nokta var.

Vinner ve Dreyfus öğrencilerin sahip oldukları bu kavram görüntülerinin, öğrencilerin bir kısmı için bazı temsil durumlarını fonksiyon olarak, bir diğer kısım öğrenci için ise fonksiyon olmayan bağıntı olarak belirleme nedeni olduklarını görmüşlerdir.

3. Fonksiyon Kavramına İlişkin Sık Rastlanan Öğrenci Güçlükleri ve Yanılgıları

Fonksiyon kavramına ilişkin bazı güçlük ve yanılgılar, kavram üzerine yapılmış hemen hemen tüm çalışmalarda çeşitli biçimlerde ortaya çıkar. Genel olarak ifade edilirse, kavrama ilişkin güçlük ve yanılgılar; *kavramın tanımına* ilişkin, *temsil ve aralarındaki ilişkilere* ilişkin ve kavramda kullanılan *matematiksel dile* ilişkin olmak üzere üç sınıfta belirtilebilir. Bu bölümde bu sınıflama altında, pek çok araştırmada rastlanan ve kavrama ilişkin ortak yanılgı haline gelmiş olan güçlük ve yanılgılardan söz edilecektir. Kavramın formel tanımına ilişkin, kaynaklarda rastlanan yanılgılar, öğrencilerin fonksiyon kavramını eksik ya da hatalı biçimde, örneğin "*bir eşleme*" , "*bir formül*" ya da "*bir denklem*" gibi tanımlamalarından kaynaklanmaktadır. Güçlük ve dolayısıyla kavram yanılgısına neden olan, fonksiyon kavramına ilişkin, kaynaklarda karşılaşılan öğrenci tanımlamaları, genel olarak, Vinner ve Dreyfus'un [9] çalışmasında elde ettiği ve aşağıdaki biçimde altı sınıfa ayırdıkları tanımlamalar ile uyuşmaktadır.

1. *Eşleme:* Fonksiyon, birinci kümedeki her elemanı ikinci kümede tek bir elemana eşleyen bir eşlemedir (Dirichlet-Bourbaki tanımı). Bu sınıflamada olan yanıtlara aşağıda iki örnek verilmiştir:

   "İki kümenin elemanları arasında bir eşleme"

   "A daki her eleman için B de bir ve yalnız bir eleman vardır"

2. *Bağlılık İlişkisi*: Fonksiyon iki değişken arasında bağlılık ilişkisidir (y, x e bağlı).

   Bu sınıflamaya ait verilen örnekler aşağıdaki gibidir:

   "Diğer birine bağlı bir etken"

   "İki değişken arasında bağlılık"

   "İki büyüklük arasındaki bağlantı"

3. *Kural*: Fonksiyon bir kuraldır. Kural olarak ele alınan fonksiyonda eşleme keyfidir. Bu sınıfta, sınıflamada olduğu gibi tanım ve değer kümelerinden genellikle bahsedilmez. Sınıftaki örnekler:

   "x değerini y değerine bağlayan bir şey"

   "Değişen bir sayıya uygulanan belirli bir kuralın sonucu"

   "x ve y arasındaki bir bağıntı bir fonksiyondur"

4. *İşlem:* Fonksiyon bir işlemdir.

“Bir işlem”

“*x* değerleri üzerinde ve her *x* değerini *y=f(x)* değerine eşleyen bir işlem”

“Belirli koşullara göre değerleri, diğer değerlere götüren taşıyıcı”

5. *Formül*: Fonksiyon bir formül, bir cebirsel ifade ya da bir denklemdir.

“İki sayısal nesne arasındaki belirli bir bağıntıyı ifade eden bir denklem”

“İki etken arasındaki bağıntıyı açıklayan matematiksel bir ifade”

“İki etkeni bağlayan bir denklem”

6. *Temsil*: Fonksiyon, mümkün olabilen anlamsız bir yolla, grafik ya da sembolik temsillerinden biri ile ilişkilendirilir.

“Matematiksel olarak tanımlanabilen bir grafik”

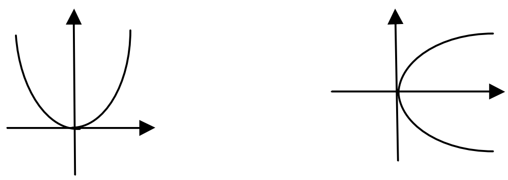
“Belirli bir sırada olan ve bir grafikte ifade edilebilen sayıların bir koleksiyonu”

“y=f(x)”

“*F(y)=x*”

Vinner ve Dreyfus’un bu sınıflamasına eklenmesi gereken ve kaynaklarda sıklıkla rastlanan, fonksiyon kavramının tanımına ilişkin bir yanılgı, fonksiyonu *bire-bir bağıntı* olarak düşünme davranışıdır. Öğrenciler sık sık bir bağıntının fonksiyon olma koşulunu, bir fonksiyonun bire-bir olma koşulu ile karıştırarak yanılgıya düşmektedirler.

Araştırmalarda, öğrencilerin fonksiyon temsillerine ilişkin yanılgıları genellikle verilen çeşitli temsil durumlarının birer fonksiyon belirtip belirtmediği sorulduğunda ortaya çıkmaktadır. Çalışmalarda ortak olarak ortaya çıkan yanılgılara bakıldığında bir kısım yanılgının nedeni, öğrencilerin temsil durumlarının fonksiyon olup olmadığını belirlemede, verilen temsilin onlar için “*bilindik*” ya da diğer bir deyişle “*alışılmış*” olup olmamasına göre karar vermeleridir. Örneğin çemberi “*tanıdık”* gerekçesi ile bir fonksiyon grafiği ya da verilen bir parabolü, kollarının hangi değişkene ait ekseni sardığını göz önüne almaksızın fonksiyon grafiği olarak belirleme davranışına sıklıkla rastlanmaktadır. Tall ve Vinner’a göre [7] öğrenciler kendilerinden fonksiyon olanların belirlenmesi istenildiğinde, sahip oldukları kavram görüntüleri ve prototiplerin yönlendirmesiyle, kavramın formel tanımını göz ardı ederek cevap verirler. Bakar ve Tall (1991) bu konuda öğrencilerin cebirsel olarak “*$y=x^2$ eşitliğine benzer*”, grafik temsili olarak “*parabol gibi*” düşüncelerine benzer biçimde prototip örnekler geliştirdiklerini ve bir durumun fonksiyon olup olmadığı sorulduğunda bu örneklere göre soruları yanıtladıklarını belirtirler. Bakar ve Tall [10] İngiltere’de lise ve üniversite öğrencileri ile yaptıkları bir çalışmada, eksenleri saran parabollerin fonksiyon belirtip belirtmediğinin belirlenmesi konusunda aşağıdaki verileri elde etmişlerdir.



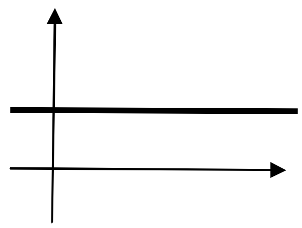
Şekil 1: Bakar ve Tall’un kullandığı paraboller

	%evet	%hayır
okul	100	0
üniversite	97	3

	%evet	%hayır
okul	95	4
üniversite	80	2

Bakar ve Tall bu parabol örneğinde, yalnızca iki üniversite öğrencisinin hangi değişkenin bağımsız değişken olarak ele alındığını önemsediğini belirterek, birinin “*ikinci parabole farklı bir yolla bak*” ve diğer öğrencinin “*f(y)=x”* ifadelerini örneklemektedirler. Araştırmacıların parabollere benzer biçimde yarı-çemberlerin fonksiyon grafiği olup olmadıklarına ilişkin sorusuna verilen yanıtlarda ise doğru yanıtların sayısı artış göstermektedir. Çemberin bir fonksiyon grafiği olup olmadığı konusunda ise lise öğrencilerinin %64 ü, üniversite öğrencilerinin ise %65 i evet yanıtını vermişlerdir.

Matematik eğitimi kaynaklarda sıklıkla belirtilen yanılgıların bir diğeri de sabit fonksiyonlara ilişkindir. Bakar ve Tall çalışmalarında kullandıkları sabit fonksiyon grafiğinin fonksiyon belirtip belirtmediği sorusu karşısında aşağıdaki verileri elde etmişlerdir:



Şekil 2: Sabit fonksiyon grafiği

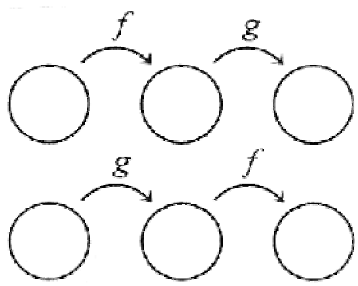
	% evet	% hayır
okul	verilmedi	verilmedi
üniversite	55	44

Bu konuda Bakar ve Tall, sabitin fonksiyon olmadığı yorumunu, okul matematiğinde fonksiyon kavramında, değişkenin varlığının şart olduğu iması nedeni ile ortaya çıkan "*eğer bir değişken yoksa ifadenin fonksiyon olmadığı*" yanılgısına bağlamaktadırlar. Araştırmaları sonucunda Bakar ve Tall'un elde ettiği bu yanılgılara diğer pek çok çalışmada [11,12,13] rastlandığı gibi, Montiel, Vidakovich ve Kabael [14] de araştırmalarında, 15 üniversite öğrencisinin 10'undan, $y=3$ eşitliğinin fonksiyon olmadığı yanıtını almışlardır. Öğrenciler bu yanıtlarına gerekçe olarak, $y=3$ matematiksel ifadesinde "*değişken*" ya da "*değişim*" olmamasını göstermişlerdir.

Dil açısından düşündüğümüzde ise öğrenci yanılgıları $y=f(x)$ gösteriminin ve "f" sembolü ile "$f(x)$" gösterimi arasındaki ayırımın yorumu ile başlar. $f(x)$ gösterimi, üzerinde hesaplama yapılan bir cebirsel ifadeyi yani Gray ve Tall [6] 'un kuramında ele aldığı gibi süreci, yalnız f ise matematiksel nesne olarak bir fonksiyonu temsil eder. Ancak, zaman zaman, hem süreç hem de nesne "$f(x)$" gösterimi ile temsil edilir. Öğrencilerde bu bağlamda sıklıkla görülen güçlük "$f(x)$" ve "f" sembollerini farklılaştırmama durumudur. Sierpinska [15], "$f(x)$ gösterimi hem fonksiyonu hem de f fonksiyonunun aldığı değeri temsil ettiğinden", fonksiyonları anlamada esnekliğin gerekli olduğunu vurgular.

4. Fonksiyon Kavramının Öğretimine İlişkin Literatürde Önerilen Başlıca Stratejiler

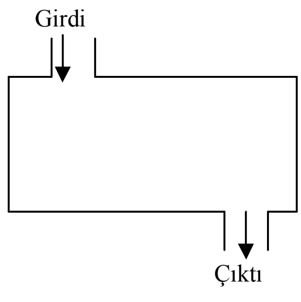
Matematik eğitimi kaynaklarda fonksiyon kavramının tanımına ilişkin iki yaklaşım yer almaktadır. İlki, bağıntı yaklaşımı olan Drichlet-Bourbaki tanımı, ikincisi ise girdi-çıktı süreç yaklaşımıdır. Kaynaklarda pek çok matematik eğitimcisi, konuya ilişkin, nerede ise kaçınılmaz hale gelmiş, öğrenci güçlükleri ve yanılgılarını göz önüne aldıklarında, kavramı tanımlama aşamasında girdi-çıktı süreç yaklaşımının önemini vurgulamışlardır [16,17,18,19,20,21,22,23,13]. Ayrıca sözü edilen güçlük ve yanılgıları yaşayan öğrencilerin fonksiyon kavramını öğrenme düzeylerinin, APOS çerçevesinde *hareket* düzeyinde kaldığı belirlenmiş ve *süreç* düzeyine çıkabilmeleri için kavramın öğretimi açısından yapılan önerilerin başında çoklu temsil ortamları gelmiştir. Çoklu temsil yaklaşımı son yirmi yılda çoğu matematik eğitimcisinin ortak savunusu haline gelmiştir. Carlson ve Oehrtman [17], kavramın süreç düzeyinde kazanımı için öğrencilerden temel fonksiyon özeliklerinin girdi-çıktı bağlamında açıklanmasının istenilebileceğini vurgulamaktadırlar. Örneğin, öğrencilere $(f \circ g)^{-1}$ matematiksel ifadesinin, $f^{-1} \circ g^{-1}$ ya da $g^{-1} \circ f^{-1}$ matematiksel ifadelerinden hangisine eşit olduğunun sorulabileceğini ve bu soruda hem aşağıdaki gibi bir diyagram hem de formül kullanımının girdi-çıktı süreç kazanımını destekleyeceğini belirtmişlerdir.



Şekil 3: Hangi diyagram f∘g yi temsil eder? Tersi nedir?

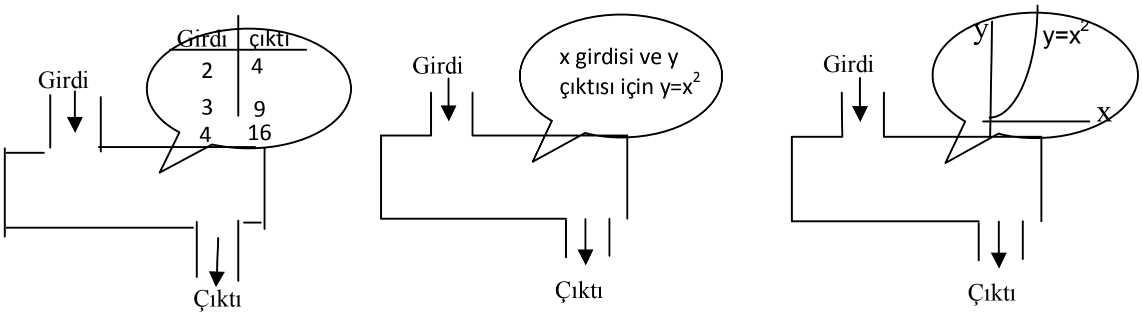
Carlson ve Oehrtman ayrıca öğrencilerin fonksiyonları denklem gibi görme yanılgıları üzerinde durmuşlar ve öğrencilerin fonksiyonlar ile denklemler arasında ayrım yapmaları için desteklenmeleri gerektiğini vurgulamışlardır. Bu desteklemeye örnek olarak, belirli bir f fonksiyonu için *f(x)=6* gibi bir denklemin çözüm kümesinin sorulabileceğini ve fonksiyonun *6* değerindeki çıktısı için fonksiyonun girdi değerlerini hem cebirsel hem de grafiksel olarak sormanın, öğrencilerin bir denklem çözümünü fonksiyon sürecinin tersi olarak görmelerini sağlayacağını belirtmektedirler. Ayrıca yukarıda söz edildiği gibi, fonksiyonları denklem olarak görme gibi karmaşaların, kavramın okullarda lineer ya da quadratik gibi özel fonksiyon örnekleri ile tanıtılmasından dolayı sürpriz olmadığını vurgulamaktadırlar. Öğrencileri bu gibi karmaşalardan kurtarmak için, fonksiyon kavramının erken öğrenme basamaklarından itibaren, aynı fonksiyonun çoklu temsilleri vurgulanacak biçimde çeşitli örnekler ile verilmesini önermektedirler. Temsillerin kullanımı bağlamında ise, öğrencilere temsiller arası karşılaştırma yaptırılması gerektiğini ve öğrencileri fonksiyon formülünden bağımsız kılmak için buna yönelik soruların standart grafik, tablo ve sözel temsilleri kadar çoklu cebirsel temsiller de içermesi gereği üzerinde durmaktadırlar. Amerikan Matematik Öğretmenleri Topluluğu (NCTM) standartları [24] da, tüm öğrencilerin, fonksiyonların grafik, tablo, denklem ve sözel temsillerini yapabilmeleri, bu temsilleri analiz edebilmeleri ve bu temsiller arası geçişleri yapabilmeleri gerektiğini vurgulamaktadır. Bununla birlikte, Bower ve Lobato [25], çoklu temsilin kaçınılmaz olmasının yanı sıra, öğrencilerin temsiller arası geçişi bildikleri halde neyin temsil edildiğini öğrenememe durumunun da olabildiğini belirtirler. Christou, Elia ve Gagatsis [26] temsiller arası geçişin anlaşılmasını destekleyici teorik çerçeve ve alternatif öğretim yaklaşımlarının gerekliliğine değinirler. Tall, McGoven ve DeMarois [27] "*fonksiyon makinesi (girdi- çıktı makinesi)*" modelini, fonksiyon kavramının çoklu temsillerini içeren bir "*bilişsel kök (cognitive root)"* olarak fonksiyon kavramının öğretiminde kullanılmak üzere önermektedirler. Tall, McGoven ve DeMarois'e göre "*bilişsel kök*";

1. Öğrenme sürecinin başında öğrenci için çekirdek bilginin anlamlı bir bilişsel birimidir
2. Bilişsel yeniden yapılandırmadan ziyade, bir bilişsel gelişim stratejisi ile başlangıç gelişimini sağlar
3. Daha sonraki gelişimlerde uzun süreli anlam olasılığı içerir
4. Daha karmaşık anlama gelişimlerinde de kullanışlı kalabilecek kadar sağlamdır.



Şekil 4: Fonksiyon makinesi

Tall, McGoven ve DeMarois, fonksiyon makinesini Şekil 4'de görüldüğü gibi resmederler ve bu makine ile temsilleri Şekil 5'de görüldüğü gibi ilişkilendirirler.



Şekil 5: Temsillerin makine gösterimi

5. Tartışma ve Sonuç

Öğretiminin gelişimi için büyük çabalar sarf edilen fonksiyonlar konusunun matematik eğitimindeki önemi kadar, kavrama ilişkin öğrenci güçlük ve yanılgılarının kaynaklardaki pek çok çalışmada kaydedildiği de bir gerçektir. Öğrenme teoricilerinin öğrenilme basamaklarını belirlemede öncelik tanıdığı ve öğretimine ilişkin çeşitli stratejilerin geliştirildiği fonksiyon kavramının neden hâlâ öğrenciler için güçlük oluşturduğu ülkelerin kendi eğitim sistemi içinde farklı açılardan sorgulanmalıdır. Sorgulamanın yapılması gereken ilk bakış açısı, fonksiyon kavramına ilişkin, matematik eğitimi kaynaklara geçmiş yeniliklerin, Matematik Dersi Öğretim Programlarına yansıtılma durumu, ikincisi ise; Programlarda kavramın öğretiminin başlangıç düzeyinin ele alınış şekli olmalıdır.

Türkiye'deki eğitim sisteminde fonksiyonlar konusu ortaöğretim 9. Sınıfta (Lise 1) verilmeye başlanılır. Kavram, bağıntı tanımı verildikten sonra özel bir bağıntı olarak tanıtılır. Matematiksel formel tanım ise, Drichlet-Bourbaki'nin ifade ettiği aşağıdaki biçimde verilir:

Tanım: A ve *B* boş olmayan fakat eş olabilen iki küme olmak üzere, *A* nın her elemanını *B* nin yalnız bir elemanına eşleyen, *A* dan *B* ye bir bağıntıya, *fonksiyon* denir.

2005 yılında ortaöğretimin dört yıla çıkarılması ile yenilenen Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programında, fonksiyon kavramının öğretim etkinlikleri incelenildiğinde, son yirmi yılda matematik eğitimcilerinin ortak savunusu haline gelmiş çoklu temsil ortamlarının ve temsiller arası ilişkilerin tanıtılmasının yetersiz olduğu göze çarpmaktadır. Bu yetersizliğin ötesinde, soyut düşünme becerisini henüz kazanmış ve aslında günlük yaşamında fonksiyonel ilişkiler ile iç içe olan bir 9. Sınıf öğrencisi için, fonksiyon kavramının Drichlet-Bourbaki tanımı ile özel bir bağıntı olarak tanıtılması ve çoklu temsiller kullanılsa dahi yalnızca bu soyut anlam ile ilişkilendirilmesi ne kadar anlamlıdır? Bir 9. Sınıf öğrencisinin günlük yaşanımda fonksiyonel ilişkiyi zaten kullanıyor olmasının yanında, bulunduğu sınıf düzeyine kadar cebir öğrenimi yaşantısında da fonksiyonel ilişki ile iç içedir. Erken basamaklarda nesneler arası ilişki arama ile başlayan cebirsel düşünme becerisi, daha sonra sayılar arası ilişki ve değişkenler arası ilişki arama ve genelleme becerileri ile devam eder. Cebirsel düşünmenin gelişimi sürecinde gerçekte her basamakta çeşitli matematiksel nesneler arasında *fonksiyonel ilişki* vardır. Bu anlamda, fonksiyon kavramının öğretimine ilişkin, öğrencileri güçlüğe sürükleyen yaklaşım; kavramın öğrencilere soyut ve ani bir yolla tanıtılmasıdır. Erken basamaklardan itibaren sayılar arası ilişkiler, örüntü kavramı ve sonrasında değişken kavramları ile öne çıkarılmayan *fonksiyonel ilişkinin*, 9. Sınıfta fonksiyon kavramı ile kazandırılmaya çalışılması, öğrencilerin *fonksiyonel ilişkiyi* yalnızca fonksiyon kavramı bağlamında ve soyut anlamda düşünmelerine yol açmaktadır. Erken basamaklarda, özellikle örüntü kavramında sayılar ya da geometrik şekiller arası ilişki ile daha açık ortaya çıkan *fonksiyonel ilişki*; cebirsel düşünme sürecinin uygun her basamağında, düzeye uygun, günlük yaşamla ve çoklu temsiller ile ilişkilendirmiş öğretim etkinlikleri ile sezdirilmelidir. 9. sınıfa gelindiğinde fonksiyon kavramının öğretimine yine düzeye uygun, öğrencilerin günlük yaşamlarından örnekler ile fonksiyonel ilişki hatırlatılarak başlanılabilir. Örneğin erken basamaklarda, basit nesne ya da kartondan yapılmış geometrik şekiller ile işleme sokulan yine kartonlardan yapılmış bir fonksiyon makinesinin yerini ilerleyen basamaklarda sayılar ve sonrasında değişkenler arasında fonksiyonel ilişkiyi veren fonksiyon makinesi bilgisayar programları alabilir. Fonksiyonel ilişkiyi farklı düzeylerde temsil eden çeşitli fonksiyon makinelerine pek çok kaynakta ve elektronik ortamda ulaşmak mümkündür [27, 28, 29, 30,31]. Fonksiyon makinesi temsiline benzer biçimde, öğrenme basamaklarındaki temsil kullanımını içeren öğretim etkinliklerinde kullanılan temsillerin cebirsel düşünmenin gelişim sürecine uygun bir biçimde gelişim ve benzerlik göstermesi, öğrencilerin fonksiyon kavramının temsillerinde yaşadıkları güçlükleri ortadan kaldırabilir. Orta öğretime gelindiğinde ise, fonksiyonel ilişkiye yönelik verilen örnekler, bağımsız ve bağlı değişkenler arasındaki ilişki bir fonksiyon olacak biçimde çeşitlendirilerek, bu örneklerdeki ortak özeliğin buldurulması yolu ile öğrencilerin fonksiyon kavramının tanımına ulaşmaları da sağlanabilir. Bu yolla erken öğrenme basamaklarında somut materyaller ile kazandığı *fonksiyonel ilişkiyi* soyut düzeye geldiğinde yine yaşam örnekleri ile ilişkilendiren öğrenci, gerekli matematiksel ilişkileri kolaylıkla kurarak, verilen fonksiyon kavramı tanımını soyut anlamda kazanabilecek duruma gelmiştir.

Sonuç olarak, İlköğretim ve Ortaöğretim Matematik Dersi Programlarının bu bakış açısı ile geliştirilme gereği vardır. Bu geliştirmenin etkin bir biçimde gerçekleştirilebilmesi için öncelikler, şimdiki durumda, öğrencilerde cebirsel düşünmenin gelişimi sürecinde öne çıkan eksikliklerin ve güçlüklerinin gelecek çalışmalar ile belirlenerek, geliştirmenin elde edilen bu veriler doğrultusunda ve eğitim sistemine uygun biçimde düzenlenmesi gerekir. Ayrıca, matematik öğretmenlerinin, kaynakları yansıtan öğretim ilkelerinden ne derece haberdar oldukları göz önüne alındığında, matematik dersi öğretim programlarının geliştirilmesi yalnız başına yeterli olmayıp, bu konularda öğretmen eğitimine de gereksinim vardır.

Kaynaklar

[1] J.P. Ponte, "The History Of The Concept Of Function And Some Educational İmplications" *Mathematics Educator,* 3(2): 3-8 (1992).

[2] Kleiner, "I., Evolution Of The Function Concept: A Brief Survey", *The College Mathematics Journal,* 20(4): 282-300 (1989).

[3] The Function Concept. 01.07.2008 Tarihinde

Http://Www-History.Mcs.St-And.Ac.Uk/Histtopics/Functions.Html Adresinden Alınmıştır.

[4] Asiala, Et Al, "A Framework For Research And Curriculum Development İn Undergraduate Mathematics Education", *Research İn Collegiate Mathematics Education,* 2: 1-32 (1996).

[5] E. Dubinsky, Ve G. Harel, "The Nature Of The Process Conception Of Function", In G. Harel And E. Dubinsky (Eds.), *The Concept Of Function: Aspects Of Epistemology And Pedagogy, MAA Notes 25:* 85-106,Mathematical Association Of America, Washington (1992).

[6] E. Gray, Ve D., Tall, "Duality, Ambiguity And Flexibility: A Proceptual View Of Simple Arithmetic", *The Journal For Research In Mathematics Education*, 26 (2): 115– 141 (1994).

[7] D. Tall, Ve S., Vinner, "Concept İmage And Concept Definition İn Mathematics, With Special Reference To Limits And Continuity", *Educational Studies İn Mathematics*, **12:** 151– 169 (1981).

[8] S.,Vinner, "Concept Definition Concept İmage And The Notion Of Function", *International Journal For Mathematics Education İn Science And Technology*, 14 (3): 293-305 (]983).

[9] S. Vinner, Ve T., Dreyfus, "Images And Definitions For The Concept Of Function", *Journal For Research İn Mathematics Education*, 20(4): 356-366 (1989).

[10] M. Bakar, Ve D., Tall, "Students' Mental Prototypes For Functions And Graphs", *Proceedings Of PME 15*, Assisi, 1: 104–111 (1991).

[11] F.Confrey, Ve E., Smith, "A Framework For Functions: Prototypes, Multiple Representations And Transformations". In R.G. Underhill (Ed.), *Proceedings Of The 13th Annual Meeting Of The North American Chapter Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education*: 57-63, Blacksburg: Virginia Polytechnic Institute And State University (1991).

[12] D., Breidenbach, E. Dubinsky, J. Hawks, Ve D. Nichols, "Development Of The Process Conception Of Function", *Educational Studies İn Mathematics*, 23: 247-285 (1992).

[13] L.. Clement, "What Do Students Really Know About Functions?", *The Mathematics Teacher, 94*(9): 745 (2001).

[14] M., Montiel, D. Vidakovic, Ve T. Kabael, "Relationship Between Students' Understanding Of Functions İn Cartesian And Polar Coordinate Systems", *Investigations İn Mathematics Learning*, 1(2): 52-70 (2008).

[15] A. Sierpinska, "On Understanding The Notion Of Function", In Harel. G. And Dubinsky, E. (Eds.), MAA *Notes And Reports Series:* 25 - 58 (1992).

[16] A. Evangelidou, P. Spyrou, I. Elia, Ve A. Gagatsis, "University Students' Conceptions Of Function", Proceedings Of The 28th Conference Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education, 2: 351-358 (2004).

[17] M. Carlson, Ve M. Oehrtman,, " Key Aspects Of Knowing And Learning The Concept Of Function", *The Mathematical Association Of America* (Research Sampler) (2005).

[18] M. P. Carlson, N. Smith, Ve J. Persson, "Developing And Connecting Calculus Students' Notions Of Rate Of Change And Accumulation: The Fundamental Theorem Of Calculus". In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings Of The 2003 Joint Meeting Of PME And PMENA*, 2: 165-172, Honolulu, HI: CRDG, *College Of Education, University Of Hawai'i* (2003).

[19] Cottrill,Et Al., "Understanding The Limit Concept: Beginning With A Coordinated Process Schema", *Journal Of Mathematical Behavior, 15*(2): 167-192 (1996).

[20] J. Kaput, "Patterns İn Students' Formalization Of Quantitative Patterns". In G. Harel Ve E. Dubinsky (Eds.), The Concept Of Function: Aspects Of Epistemology And Pedagogy. *MAA Notes, 25.* Washington D.C.: *Mathematical Association Of America* (1992).

[21] C. L., Rasmussen, "New Directions İn Differential Equations: A Framework For İnterpreting Students' Understandings And Difficulties", *Journal Of Mathematical Behavior, 20:* 55-87 (2000).

[22] P. W. Thompson, "Images Of Rate And Operational Understanding Of The Fundamental Theorem Of Calculus", *Educational Studies İn Mathematics, 26:* 229-274 (1994).

[23] M. J. Zandieh,, "A Theoretical Framework For Analyzing Students` Understanding Of The Concept Of Derivative". In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research İn Collegiate Mathematics Education. IV. CBMS Issues İn Mathematics Education* : 103-127, Providence, RI: American Mathematical Society (2000).

[24] Amercan National Council Of Teachers Of Mathematics," *Curriculum And Evaluation Standards For Teaching Mathematics",* Reston, VA: National Council Of Teachers Of Mathematics (1989).

[25] J. Bower, Ve J. Lobato, "Three Perspectives İn Research On Functions: Multi-Representational, Quantitative, And Phenomenological", *Paper Presented At The Annual Meeting Of The American Educational Research Association*, New Orleans, LA, April 24-28 (2000).

[26] C. Christou, I. Elia, Ve A. Gagatsis, "The Nature Of Multiple Representations İn Developing Mathematical Relationships", *Quaderni Di Ricerca İn Didattica, 14*: 150-159 (2004).

[27] D.O. Tall, M. Mcgoven, Ve P. Demarois "The Function Machine As A Cognitive Root For Building A Rich Concept İmage Of The Function Concept", *Proceedings Of PME-NA*, 1: 247-254 (2000).

[28] M. M. Hatfield, Edwards, N. T., Bitter G. G. Ve Morrow, J., *Mathematics Methods For Elementary And Middle School Teachers.* John Wiley & Sons, Inc., USA (2005).

[29]Http://Teams.Lacoe.Edu/Documentation/Classrooms/Amy/Algebra/34/Activities/Functionmachine/Functionmachine3_4.Html Adresinden, Fonksiyon Makinesi 1; 26.08.2008 Tarihinde Alınmıştır.

[30]Http://Www.Shodor.Org/İnteractivate/Activities/Functionmachine/?Version=1.6.0_02&Browser=MSIE&Vendor= Sun_Microsystems_Inc. Adresinden, Fonksiyon Makinesi 2; 26.08.2008 Tarihinde Alınmıştır.

[31] Http://Nlvm.Usu.Edu/En/NAV/Frames_Asid_191_G_3_T_1.Html Adresinden, Fonksiyon Makinesi 3; 26.08.2008 Tarihinde Alınmıştır.