ORTALAMALARIN ÖRNEKLEM DAĞILIMI *

WERNER Z. HIRSCH

Çevirenler :
Demirali Yaşar ERGİN **
Füsun AKKOYUN ***

> **Her ne zaman düzensiz elemanlardan büyük bir örneklem ele alınsa ve büyüklük sırasına göre dizilse, en güzel ve en umulmadık biçimi ile düzenlilik, her zamanki varlığını kanıtlayacaktır.**
>
> **Sir Francis Galton**

Bir Oyun

Cemil, yeni bir oyun keşfetmiştir, bunu arkadaşlarına göstermek ister. Oyunu şöyle açıklar : «Bu torbada 20 adet madeni para bulunmaktadır. Bunların herbirinin üzerinde değişik sayısal değerler bulunmaktadır. Paraların fiziksel özelikleri bakımından çekilme olasılıklarını etkileyecek bir fark yoktur. Zeynep, şimdi sen bu torbadan birkaç tane para çek ve bunları, bakmadan şu torbaya koy. Şimdi aramızdan başka biri de bu torbadan tek bir para çeksin. Bunun değerini bir kağıda yazalım ve torbaya geri atalım. Şimdi de ikinci bir para daha çeksin ve bunun da değerini yazdıktan sonra torbaya geri atalım. Sonra, hepimiz torbadaki tüm paraların ortalama değerini tahmin etmeye çalışacağız. Daha sonra da, torbadaki paraların hepsini çıkararak, Zeynep'in koyduğu paraların

---

(*) Werner Z. Hirsch. **Introduction to Modern Statistics.** New York : The Macmillan Company, 1963. «Sampling Distribution of Means» ss. 111 - 24.

(**) Eğitim Yönetimi ve Planlaması Bölümü, Eğitim İstatistiği ve Araştırma Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi.

(***) Eğitimde Psikolojik Hizmetler Bölümü, Rehberlik ve Psikolojik Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi.

gerçek değerlerini göreceğiz. En yakın tahmini yapan oyunu kazanacak.»

Cemil bir para çeker, bu 4'dür. Torbaya geri koyar, bir daha çeker, bu 1'dir. Cemil, torbadaki paraların ortalama değerinin 5 lira olduğu tahmininde bulunur. Belin 4, Lale 5, Ayça 3, Mehmet 1 lira der. Erol, en iyi tahminin 2 lira olacağını düşünür. Ayşe ise zekice gülümseyerek onları yeneceğini söyler. İçinden bir hesap yapmaktadır. Bunun «sistemini» bulmuştur. «Benim tahminim 2.5 lira» der.

Oyun devam ederek, Zeynep torbadan tekrar bir para çeker, bu 1'dir. Bu para torbaya geri konduktan sonra bir para daha çekilir, bu 3'dür. Herkes tekrar tahminde bulunur. Ayşe, yine aynı «sistemi» kullanarak 2 der. Oyun böylece devam eder. En sonunda, Cemil «artık bu kadar yeter, şimdi şampiyonumuzu belirleyelim» der.

Torbadaki paraları çıkardıklarında, 1.0, 2.0, 3.0 ve 4.0 sayı değerlerinde 4 madeni paranın bulunduğunu görürler. Lale atılır, «öyleyse paraların ortalama değeri, 10/4=2.5 lira» der. Bütün hesaplamalardan sonra Ayşe'nin «sisteminin» doğru olduğunu anlarlar. Ayşe'nin bugüne kadar toto tahminleri de diğer arkadaşlarına göre daha iyidir.

Ayşe'ye göre çekilen iki paranın ortalama değeri, torbadaki paraların ortalama değeridir. Neden bu böyledir? Şimdi bunu görelim.

Örneklem Ortalaması ve Evren Ortalaması

Bu torbada 1.0, 2.0, 3.0 ve 4.0 değerleri bulunmaktadır. Daha önce hesaplandığı gibi, torbadaki paraların ortalama değeri, yani torbadaki paraların evren ortalaması 10/4=2.5'dir. 4 paradan oluşan bu evrenden yansız olarak iki adetlik örneklemler alınmıştır. Yansız örneklem seçiminde, torbadaki her bir para eşit seçilme şansına sahiptir. O halde, her bir para çekildikten ve bunun sayısal değeri yazıldıktan sonra bu geri atılmalıdır, aksi takdirde bunun tekrar seçilme şansı olmayacaktır.

Bu koşullarda, 4'lük bir evrenden 2'lik yansız örneklemler çekildiğinde, $N^n=4^2=4\times4=16$ olacaktır. İki para 16 değişik şekilde çekilebilir. Her ikili örneklemin ortalaması bulunarak, torbadaki paraların evreninin ortalama değeri tahmin edilebilir. Çizelge 1'de, Ayşe'nin karşılaşabileceği 16 olası ortalama gösterilmektedir. Bu ortalamaların ortalama değeri

$$\frac{1.0+1.5+2.0+2.5+1.5+2.0+2.5+3.0+2.0+2.5+3.0+3.5+2.5+3.0}{16}+$$

$$\frac{3.5+4.0}{16}=\frac{40}{16}=2.5 \text{ lira}$$

olur.

ÇİZELGE 1

ÖRNEKLEM ORTALAMALARININ DEĞERLERİ

Paraların Lira Değeri	1.0	2.0	3.0	4.0
1.0	1.0	1.5	2.0	2.5
2.0	1.5	2.0	2.5	3.0
3.0	2.0	2.5	3.0	3.5
4.0	2.5	3.0	3.5	4.0

Böylece, hem paralar evreninin ortalaması hem de tüm olası 2'lik yansız örneklemlerin ortalamalarının ortalaması 2.5 liradır, yani $\mu = m$'dir. **Ancak, hiç kimse evrendeğeri tahmin etmek için tüm olası yansız örneklemleri çekmeyecektir. Bunun yerine, tek bir örneklem alıp, bunun ortalamasını hesaplayarak, bu değerden evrendeğeri kestirecektir.**

Evrenin ortalaması, örneklem ortalamalarının ortalamasına eşit olduğundan, yansız olarak çekilen iki paranın aritmetik ortalaması torbadaki paraların ortalama değerini kestirmek üzere kullanıldığında (Ayşe'nin yaptığı gibi) bu genelde doğru olacaktır. Böylece, genelde, örneklem ortalaması torbadaki paraların evreninin ortalamasına eşit olacaktır, yani $\overline{m} \cong \mu$'dür. Çizelge 2'de, Çizelge 1'deki veriler frekans dağılımına göre düzenlendiğinde, farklı örneklem ortalamalarının olasılığı gösterilmektedir.

ÇİZELGE 2

1, 2, 3 ve 4 LİRA DEĞERLERİNDE 4'LÜK BİR EVRENDEN ÇEKİLEN 2'LİK ÖRNEKLEMLERİN ORTALAMALARININ DAĞILIMI

Örneklemdeki her bir paranın değeri (Lira olarak örneklem ortalamaları)	Örneklem ortalamalarının sayısı	Örneklem ortalamasının ortaya çıkma olasılığı
1.0	1	0.062
1.5	2	0.125
2.0	3	0.187
2.5	4	0.250
3.0	3	0.187
3.5	2	0.125
4.0	1	0.062
Toplam	16	1.00

Kaynak : Çizelge 1.

Bu durum, yalnızca 4'lük bir evrenden 2'lik örneklem için mi doğrudur? Bu sorunun cevabı, elbette hayırdır. 4'lük bir evrenden 3 para yansız olarak çekildiğinde, $N^n = 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ farklı örneklem çekilebilir.

ÇİZELGE 3

1, 2, 3 ve 4 LİRA DEĞERLERİNDE 4'LÜK BİR EVDENDEN ÇEKİLEN 3'LÜK ÖRNEKLEMLERİN ORTALAMALARININ DAĞILIMI

Örneklemdeki her bir paranın değeri (Lira olarak örneklem ortalamaları)	Örneklem ortalamalarının sayısı	Örneklem ortalamasının ortaya çıkma olasılığı
1.00	1	0.016
1.33	3	0.047
1.67	6	0.094
2.00	10	0.156
2.33	12	0.187
2.67	12	0.187
3.00	10	0.156
3.33	6	0.094
3.67	3	0.047
4.00	1	0.016
Toplam	64	1.00

Çizelge 3'den, 64 adet, yansız olarak çekilmiş 3'lük örneklemlerin ortalama değerlerinin 160 olduğunu görüyoruz. (Bu değer, her bir paranın değeri ile örneklem sayısının çarpımları toplanarak, yani Çizelge 3'deki ilk iki kolonun çarpımları toplanarak bulunmaktadır.) 160 lira 64'e (örneklem ortalamalarının sayısına) bölündüğünde, yansız olarak çekilmiş 3'lük örneklem ortalamalarının ortalama değeri 2.5'dir. Aynı şekilde, 4'lük evrenden çekilen 256 adet farklı 4'lük örneklemlerin ortalama değerinin de, 640/256=2.5 olduğunu görüyoruz. İstendiğinde, 3'lük veya 5'lik değişik evrenler alınarak aynı sonucun ortaya çıktığı kontrol edilebilir.

Ayşe'nin «sistemi» çok bilinen bir yasaya dayanmaktadır. Burada bunu kanıtlamaya çalışmıyoruz. Ancak bu örnekte, **tüm farklı örneklem ortalamalarının ortalamasının aynı olduğunu ve bunun bu örneklemlerin alındığı evrenin ortalaması olduğunu** görmüş olduk.

O halde, örneklemlerin ortalaması, evrenin ortalamasının yansız bir tahmini olmaktadır. Her biri aynı büyüklükte olan örneklemlerin sayısı sonsuza kadar arttırıldığında, örneklem tahminlerinin ortalaması giderek gerçek evren değerine yaklaşacağından, bu yansız bir tahmin olacaktır. Gerçekte, örneklemin aritmetik ortalamasına dayandırılan tahminler, ikinci bir öneme sahiptir. Bu tahminlerde, örneklemin varyansı en aza indirgendiğinden, diğer evren tahminlerine göre standart hata en azdadır. Bu nedenle de en etkin tahmin, örneklemin aritmetik ortalamasıdır. Tüm bu özeliklerinden dolayı, örneklemin ortalaması evrenin ortalamasını tahmin etmede kullanılabilir. Ayşe de bunu yapmıştır.

Ayşe'nin sistemi bu kadarla bitmemektedir. Bunun daha başka yararları da vardır. Ayşe, örneklem ortalamasını kullanarak evren ortalamasını tahmin ederken, yapmış olduğu tahmin ile ilgili daha başka hesaplamalar da yapabilir. Bu tahminlerinde ne kadar ve kaç kere yanılabilir?

Şimdi de, Ayşe'nin kendi sistemine göre yaptığı tahminlerin ardındaki yapıyı değerlendirelim. Hatırlayacağımız gibi torbada 1.0, 2.0, 3.0 ve 4.0 değerlerinde 4 adet para bulunuyordu. Çizelge 2 ye tekrar bakıldığında örneklem ortalamalarının 1.0'den 4.0'e kadar değiştiğini görüyoruz. Ayşe'nin sisteminde 1.0 elde etme olasılığı 1/16 veya 0.062'dir, yani çok azdır. Aynı şey 4.0 için de doğrudur. Ayşe'nin sisteminde 1.0 veya 4.0 elde etmenin olasılığının çok az olduğunu (1/16+1/16=1/8=0.125) görüyoruz. Aynı yolla, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0 veya 3.5 elde etme olasılığı (bunların hepsi gerçek ortalama olan 1'den büyüktür) 1−1/8=7/8=0.875'dir. Sonuç olarak, 4'lük bir evrenden yansız olarak iki para çekildiğinde, bu iki paranın ortalama değerini bulma olasılığı 0.875'dir, yani bizim örneklem ortalamasına dayandırdığımız tahminimiz gerçek ortalamadan 1 lira veya bundan daha az farklı olacaktır. Aynı yolla, 0.187+0.250+0.187=0.625 olasılıkla, bu tahminimiz gerçek ortalamadan 0.5 liradan daha fazla olacaktır. 1.0 ve 4.0 örneklemi durumunda, 2.5±0.5 aralığı olasılığı 0.625'dir, yani gerçek ortalama 2.0 ile 3.0 lira aralığında bulunmaktadır. Torbadan üç yansız para çekecek olursak, Çizelge 3'e göre, Ayşe'nin tahmin etme yöntemi, 0.156+0.187+0.187+0.156=0.686 olasılıkla gerçek değerden 0.5 lira veya daha fazla farklılık gösterecektir. Dört para çekildiğinde, Çizelge 4'e göre, böyle bir sonucu elde etmenin olasılığı 0.121+0.156+0.172+0.156+0.121=0.726'dır.

Bu sonuçlara tekrar göz atacak olursak şunları göreceğiz. İki madeni paralık bir yansız örneklem alındığında, bizim tahminimizin gerçek para değerinden 0.5 lira veya daha az farklı olmasının olasılığı, 0.625'dir. Üç para çekildiğinde 0.686, dört para çekildiğinde 0.726'dır. Torbadan çekilen para sayısı arttıkça, yani örneklem büyüdükçe tahmin etme olasılığı da artmaktadır. Bunun gibi önemli daha başka şeyler de söyleyebiliyoruz.

Hata yapma olasılığını bulmak oldukça kolaydır. Örneğin, 0.95 olasılığını kullanmak isteyebiliriz. Tahminimizin yüzde 95 kere hangi aralıklar arasında bulunacağını bekleyebiliriz? Veya, yüzde 95 güven aralığı ne olacaktır? Ortalamalar yüzde 95, 100-95 aralığı arasına düşüyor mu, veya yüzde 5 bunun dışında kalıyor mu? 4'lük bir örneklemin, 256 farklı örneklem ortalamasının yüzde beşi, yaklaşık olarak diyelim ki 10 olsun. 10 ortalamanın gerçek ortalamaya olan uzaklığı en fazla 1.0'de bir, 1.25'de dört, 3.75'de dört, 4.0'de bir kere söz konusudur. Bu bize 1.5 ile 3.5 arasında yüzde 95 güven aralığını vermektedir. (istendiğinde, diğer güven aralıkları da hesaplanabilir).

Ayşe'nin sistemine göre yaptığı tahminlerin diğer özelliklerini de hesaplayabiliriz. Biraz düşünecek olursak, bizim bütün bu he-

ÇİZELGE 4

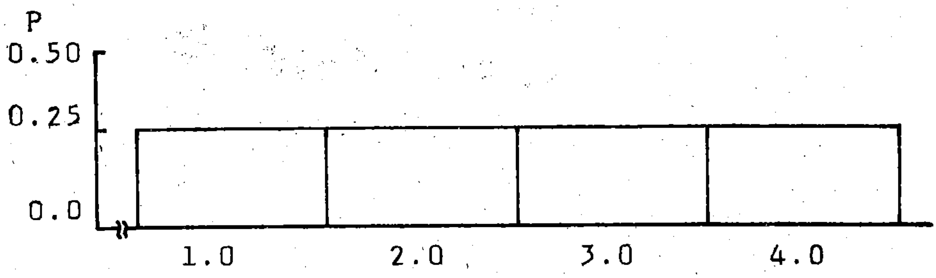
1, 2, 3 ve 4 LİRA DEĞERLERİNDE 4'LÜK BİR EVRENDEN ÇEKİLEN 4'LÜK ÖRNEKLEMLERİN ORTALAMALARININ DAĞILIMI

Örneklemdeki her bir paranın değeri (Lira olarak örneklem ortalamaları)	Örneklem ortalamalarının sayısı	Örneklem ortalamasının ortaya çıkma olasılığı
1.00	1	0.004
1.25	4	0.016
1.50	10	0.039
1.75	20	0.078
2.00	31	0.121
2.25	40	0.156
2.50	44	0.172
2.75	40	0.156
3.00	31	0.121
3.25	20	0.078
3.50	10	0.039
3.75	4	0.016
4.00	1	0.004
Toplam	256	1.00

saplamalarda torbada kaç tane para olduğunu ve hatta bunlardan her birinin değerini bildiğimizi, oysa Ayşe'nin bu bilgiler olmadan tahminde bulunduğunu hatırlayacağız. Fakat, biz evrenin büyüklüğünü ve elemanlarının her bir özelliğini bilmeden de, bir tahminin bazı özelliklerini hesaplayabiliriz. Gerçekte, modern istatistiğin en büyük başarısı budur. Şimdi bunu Cemil'in oyunu bakımından inceleyelim.

Örneklem Ortalamalarının Normal Dağılımı

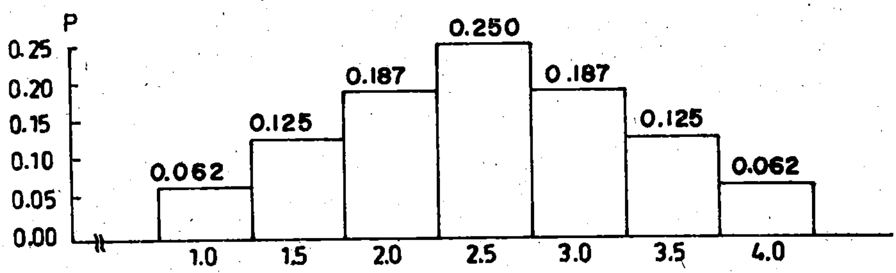
Dört birimlik bu evren, farklı para değerlerinin tek bir frekansı olduğundan, dikdörtgen bir dağılım oluşturacaktır (Şekil 1'e bakınız). 2'lik yansız örneklemler olarak çekilen 16 örneklemin ortalamasının olasılık dağılımını çizecek olursak, oldukça normal bir dağılım elde ederiz (Şekil 2'de görüldüğü gibi). Şekil 3 ve 4'de, sırasıyla 3'lük ve 4'lük örneklemlerin, 64 ve 256 örneklem ortalamalarının olasılık dağılımlarının normale daha çok yaklaştığını görüyoruz.



Lira olarak evrendeki para değerleri.

Şekil 1. 1, 2, 3 ve 4 Lira Değerindeki 4 Adetlik Paralar Evreninin Olasılık Dağılımı.

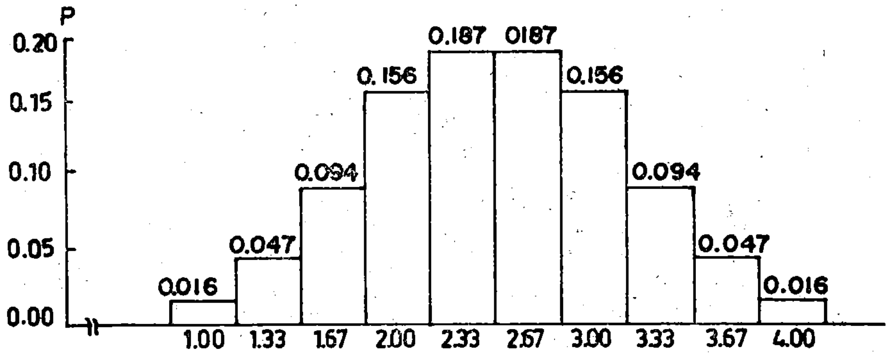
Biz farklı şekillere sahip evrenleri de ele alıp, genellikle örneklemlerin dağılımı (sampling distribution) diye bilinen, ortalamaların örneklem dağılımını çizebiliriz. Evren çok çarpık olmadıkça, örneklemlerin dağılımı normale yaklaşacaktır. Bu matematikçiler tarafından gözlenerek incelenmiş bir olgudur. İyi bilinen bu yasaya göre, **normal olan veya olmayan evrenden alınan yansız örneklemlerin ortalamaları, özellikle örneklem büyüklüğü arttıkça, ortalamaların etrafında (bunun gerçek ortalama gibi olduğunu daha önce göstermiştik) normal dağılıma yaklaşmaktadır.** Bu yasayı kanıtlamak bizim konumuz dışında kaldığından, burada yalnızca bunu göstermekle yetindik. Dikdörtgen bir evren dağılımı, 36 örneklem ortalaması için oldukça normal bir dağılım vermektedir.



Lira olarak evrendeki para değerleri.

Şekil 2. 1, 2, 3 ve 4 Lira Değerindeki 4 Adetlik Paralar Evreninden Çekilen 2'lik Örneklemlerin Ortalamalarının Olasılık Dağılımı.

Kaynak : Çizelge 2.



Lira olarak örneklemdeki para değerleri.

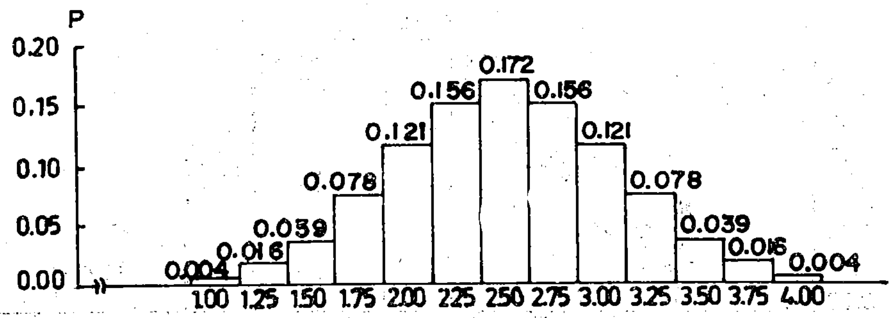
Şekil 3. 1, 2, 3 ve 4 Lira Değerindeki 4 Adetlik Paralar Evreninden Çekilen 3'lük Örneklemlerin Ortalamalarının Olasılık Dağılımı.

Kaynak : Çizelge 3.

Örneklem büyüklüğü arttıkça, normal dağılım gösteren bir evrenden olsun veya olmasın, bir çok örneklem ortalamaları dağılımı evren ortalamasının etrafında normal bir dağılım gösterecektir. Bu, özellikle örneklemin büyük olduğu durumlar için yani örneklem sayısı 30 veya daha fazla ise doğrudur. Böyle olunca da, örneklemler dağılımının standart sapması ve örneklem ortalamalarını kullanarak, normal eğrinin içinde kalan alanlara dayalı olarak olasılık hesaplamaları yapılabilir. Ortalamaların örneklem dağılımının standart sapmasını biliyorsak, (ki bu genellikle **ortalamanın standart hatası** olarak kullanılır), bir sigma aralığının örneklem ortalamalarının üçte ikisini oluşturduğunu söyleyebiliriz. Veya, daha önemlisi, örneklem ortalamasının, ortalamanın bir standart hatasından daha fazla farklı olmasının olasılığı, 1.00—0.68=0.32'dir. Benzer olarak, örneklem ortalamasının, ortalamanın iki standart hatasından daha fazla farklı olmasının olasılığı, 1.00—0.95=0.05 dir. 2 standart hatadan daha fazla hata olasılığının, yalnızca yüzde beş olduğunu söyleyebiliriz. Ayşe'nin sistemine göre onun tahmininin, ortalamanın 2 standart hatasından daha fazla olma olasılığı yüzde beş olacaktır.

Ortalamanın Standart Hatası

Ayşe'nin aslında ortalamanın standart hatasını bilmediğini biliyoruz. Ortalamaların örneklem dağılımının standart sapması, ev-



Lira olarak örneklemdeki para değerleri.

Şekil 4. 1, 2, 3 ve 4 Lira Değerindeki 4 Adetlik Paralar Evreninden Çekilen 4'lük Örneklemlerin Ortalamalarının Olasılık Dağılımı.

Kaynak: Çizelge 4.

renin standart sapması ve örneklem ortalamasının standart sapması gibi ortalama standart hata arasındaki ilişkilere dayalı olarak, ortalamanın standart hatasının büyüklüğünü iyi bir şekilde kestirebiliriz.

Bu ilişkileri sınamadan önce, incelenmekte olan dağılım çeşitlerinin belirtilmesi yararlı olacaktır. Burada üç dağılım vardır. Birincisi, **evren dağılımıdır** (population distribution). Çizelge 1'de verilen, bizim örneğimizin evren dağılımıdır. Yatay eksen üzerindeki x değerleri, evrendeki para değerleridir. Bu dağılımın ortalama değeri, evren ortalamasıdır (μ) ve standart sapması, evrenin standart sapmasıdır (σ).

İkinci dağılım, **örneklem dağılımıdır** (sample distribution). Bizim örneğimizdeki örneklemler 2, 3 ve 4 büyüklüğündedirler ve bunlar bir dağılım oluşturmak için çok küçüktürler. Daha büyük örneklemlerin çekildiği durumlarda, bu örneklem değerlerini yatay eksen üzerinde işaretleyebiliriz. Bu dağılımın ortalama değeri, örneklem ortalamasıdır (m) ve standart sapması, örneklemin standart sapmasıdır (s).

Üçüncü dağılım, örneklem ortalamalarının dağılımı veya **örneklemlerin dağılımı**dır (sampling distribution). Ortalamaların örneklem dağılımları, Çizelge 2, 3 ve 4'de verilmektedir. Bunlar, değişik örneklemlerin ortalamalarının dağılımını göstermektedir. Yatay eksende örneklemdeki her bir paranın değeri bakımından örneklem ortalama değerleri işaretlenmiştir. Bu dağılımın ortalama değeri, örneklem ortalamalarının ortalamasıdır ($\bar{m}$) ve standart sapması, örneklem ortalamalarının standart sapması veya ortalamanın standart hatasıdır ($\sigma\bar{x}$).

Artık, evrenin standart sapması, örneklemin standart sapması ve örneklem dağılımının standart sapması arasındaki ilişkileri sınamaya hazırız. Bunun için, Cemil'in oyununa geri dönelim ve standart hatayı hesaplayalım. Karekökle çalışmamak için, paralar evreninin varyansını, $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma (x-\mu)^2}{N}$ hesaplayalım. Cemil'in oyununda,

$$\sigma^2 = \frac{(1.0-2.5)^2+(2.0-2.5)^2+(3.0-2.5)^2+(4.0-2.5)^2}{4} = 1.25\text{'dir.}$$

Aslında bu, $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma x^2}{N} - (\dfrac{\Sigma x}{N})^2$ formülü ile daha kolay hesaplanabilir.

Şimdi, bu örneklem ortalamalarının varsayısını, yani ortalamanın standart hatasının karesini hesaplayalım. Bu varyans, örneklem ortalamalarının her birinin örneklem ortalamaları ortalaması ile arasındaki farkının kareleri toplamının, örneklem sayısına bölümüne eşittir. Örneklemlerin evrenini veya örneklem ortalamalarının büyüklüğünü (L), bireysel gözlemler evreninin büyüklüğünü (N) ile göstererek, birbirinden ayırt edeceğiz.

Özet olarak, $\sigma\bar{x}^2 = \dfrac{\Sigma(m-\bar{m})^2}{L}$ 'dir.

Bizim örneğimizde,

$$\sigma\bar{x}^2 = \frac{(1.0-2.5)^2+2(1.5-2.5)^2+3(2.0-2.5)^2+4(2.5-2.5)^2}{16} +$$

$$\frac{3(3.0-2.5)^2+2(3.5-2.5)^2+(4.0-2.5)^2}{16} = 0.625\text{'dir.}$$

Şu formül ile $\sigma\bar{x}^2$ daha kolay hesaplanabilir.

$$\sigma\bar{x}^2 = \frac{\Sigma m^2}{L} - (\frac{\Sigma m}{L})^2 = 6.875 - 6.250 = 0.625.$$

Şimdi de, σ^2 ile $\sigma\bar{x}^2$'ni karşılaştıralım. $\frac{\sigma^2}{\sigma\bar{x}^2} = \frac{1.25}{0.625} = 2.00$, eşitliğinden örneklem büyüklüğünü buluyoruz. Yani, yansız olarak iki para çekilmiştir. Evren varyansı ile örneklem ortalamalarının varyansı arasındaki bu oranın, örneklem büyüklüğüne eşit olması bir rastlantı değildir. Bu, üç para için hesaplanacak olursa $\frac{\sigma^2}{\sigma\bar{x}^2} = \frac{1.25}{0.416} = 3.00$'dür. Dört para için $\frac{\sigma^2}{\sigma\bar{x}^2} = \frac{1.25}{0.3125} = 4.00$'dür.

Bütün bunlar, matematikçilerin kesinlikle kanıtlamış oldukları, örneklem büyüklüğü $n = \frac{\sigma^2}{\sigma\bar{x}^2}$ ilişkilerini görmemize yardım etmektedir.

Öte yandan, $\sigma\bar{x}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ ve $\sigma\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$'dır.

Ortalamaların standart hatası ($\sigma\bar{x}$), evrenin standart sapmasının (σ) örneklem büyüklüğünün kareköküne ($\sqrt{n}$) bölümüne eşittir.

$\sigma\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ilişkisinden dolayı, ortalamanın standart hatası evrenin standart sapmasından uygulamada daima daha küçüktür. Bütün bunlar, örneklem ortalamaları dağılımının, evrenin dağılımından daha toplu, yani gözlemlerin ortalamaya yakın olduğunu göstermektedir. Bu sonuç, evrendeki uç değerlerden az etkilenen örneklem gözlemlerinin ortalaması, gerçek ortalamaya uç değerlerden daha yakın olacağından, tümü ile mantığa uymaktadır.

Örneklemlerin dağılımı toplandıkça, yani $\sigma\bar{x}$ küçüldükçe kestiri daha isabetli olacaktır. $\sigma\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ olduğundan, örneklem büyüdükçe $\sigma\bar{x}$ küçülecek ve daha isabetli kestiri yapılabilecektir. $\sigma\bar{x}$'nın, örneklem büyüklüğü iki olduğunda $\sqrt{0.625}$, üç olduğunda $\sqrt{0.416}$, dört olduğunda $\sqrt{0.313}$ olduğunu görmüştük. Kestirinin isabetini arttırmak için, örneklem büyüklüğünü arttırabiliriz. $\sigma\bar{x}$ ve n arasındaki ilişkiden dolayı, örneklem büyüklüğünü ikilemekle kestirinin isabetini de ikileyemeyiz. Kestirinin isabetini ikilemek için örneklem büyüklüğünü dörtlemek gerekir. Örneğin, $\sigma\bar{x} = 2$, $\sigma = 6$ ve $n = 9$ ise kestirinin isabetini ikilemek için, yani $\sigma\bar{x}$'i yarı yarıya azaltmak için, örneklem büyüklüğü dörtlenmelidir. $\bar{x}\sigma = 1$, $\sigma = 6$ olacağından, $1 = \frac{6}{\sqrt{36}} = \frac{6}{6}$ formülünde olduğu gibi $n = 36$ olmalıdır.

Evrenin bilinmediği durumlarda, ortalamanın standart hatasını bulma yöntemini keşfetme yönünde oldukça ilerlemiş bulunuyoruz. $\sigma\bar{x}^2 = \frac{\Sigma(m-\bar{m})^2}{L}$'in her zaman için geçerli olduğunu biliyoruz. Ancak evren ortalamasını kesin olarak bilmediğimizden bu formülü uygulayamıyoruz. $\sigma\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ eşitliğinin kullanımı, evren varyansını bildiğimiz sayıltısına dayanmaktadır. Eğer biz evren ortalamasını bilmiyorsak, varyansını da bilmiyoruz demektir. Bununla birlikte, **evren varyansı ile bir örneklemin varyansı arasındaki ilişki, $\sigma\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ eşitliğinde evren varyansı yerine tek bir örneklemin varyansını kullanmamıza olanak sağlamaktadır.** Bunu yapabilmek için, örneklem ve evren varyansı arasındaki ilişki hakkında bazı şeyleri daha bilmemiz gerekmektedir.

Yine Cemil'in oyununa dönecek olursak, 16 örneklem ortalamasının her birinin varyansını hesaplayacağız. Örneklem verilerinin varyansı için, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\mu)^2}{N}}$ formülünden $s^2 = \frac{\Sigma(x-m)^2}{n}$ olarak çıkarsanabilir. Örneklemlerin küçük olduğu bu örnekte sapma puanlarının yanlılığını azaltmak için düzeltmeyi n yerine n–1'e bölerek yapacağız. Böylece, iki kez bir çekilmenin sonucu, ortalaması 1 olan örneklemin varyansı $\frac{(1.0-1.0)^2+(1.0-1.0)^2}{2.0-1.0} = 0.0$ olur. Aynı şekilde, ortalaması 1.5 olan örneklemin varyansı, $\frac{(2.0-1.5)^2+(1.0-1.5)^2}{2.0-1.0} = 0.5$ olur. 16 örneklemin ortalamasının tümü için yapılan bu hesaplamalar Çizelge 5'de özetlenmektedir.

ÇİZELGE 5

ÖRNEKLEM ORTALAMALARININ VARYANSI

Paraların Lira Değeri	1.0	2.0	3.0	4.0
1.0	0.0	0.5	2.0	4.5
2.0	0.5	0.0	0.5	2.0
3.0	2.0	0.5	0.0	0.5
4.0	4.5	2.0	0.5	0.0

16 örneklem varyansının ortalaması alındığında (20/16 = 1.25) bunun örneklem ortalamalarının varyansına eşit olduğu görülür.

Örneklem varyansı ortalaması ve evren varyansının aynı olması bir rastlantı değildir. Aksine, bu kesin bir ilişkidir ve **örneklem varyansı ortalaması evren varyansına eşittir** iddiasını olası kılmaktadır.

Böylece, ortalamanın standart hatasını bulabilmek için evrenin standart sapmasını bilmediğimizden onun yerine örneklemin standart sapmasını kullanabiliriz. Bundan dolayı, **ortalamanın standart hatası yaklaşık olarak, örneklemin standart sapmasının, örneklem büyüklüğünün kareköküne bölünmesine eşittir.**

Kısaca, $\sigma\bar{x} \cong \frac{s}{\sqrt{n-1}}$,

$\sigma\bar{x} \cong \frac{s}{\sqrt{n}}$'dir.

Güven Aralıkları

Burada betimleyici olmak amacı ile, çok küçük örneklemleri kullandık. Oysa, gerçekte yüz veya bin gibi çok daha geniş örneklemler kullanılmaktadır. Ancak, burada büyük örneklemler kullanıldığında ortaya çıkacak bir yığın sayı ile uğraşmamak için, durumu betimlemek amacı ile 4'lük N'den 2'lik n'ler alarak incelemeyi tercih ettik ki, bu durumda bile her biri iki üniteden oluşan 16 örneklem ile çalışmamız gerekmiştir.

Burada söz konusu edilen kavramlar, örneklem ortalamasının yardımı ile ve ortalamanın standart hatasının yaklaşık olarak $\frac{s}{\sqrt{n-1}}$ olmasıyla, evren ortalamasının kestirisinin güven aralığını bulmakda kullanılmaktadır.

Sonuç

1. Bir örneklemin ortalaması, yaklaşık olarak evren ortalamasına eşittir.

2. Büyük örneklemlerin, örneklem ortalamaları, evren dağılımının şekli ne olursa olsun, örneklem ortalamalarının ortalaması ve evren ortalaması etrafında normal bir dağılım göstermektedir.

3. Örneklem ortalamasının, gerçek ortalamadan farklılık göstermesinin olasılığı 1 standart hata için 0.32, 2 standart hata için 0.05, 3 standart hata için 0.01'dir.

4. Ortalamanın standart hatası ($\sigma\bar{x}$), evrenin standart sapmasının, örneklem büyüklüğünün kareköküne bölünmesine eşittir ($\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

5. Genel olarak örneklem varyansı (s^2), evren varyansına (σ^2) eşittir.

6. Ortalamanın standart hatası ($\sigma\bar{x}$), örneklemin standart sapmasının, örneklem büyüklüğünün (eğer örneklem küçük ise, örneklem büyüklüğünün 1 eksiğinin) kareköküne bölünmesine eşittir.

Kısaca, büyük örneklemler için, $\sigma\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{n}}$, küçük örneklemler için $\sigma\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}$'dir.