Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
2020, 13(2),898-916
ISSN: 1307-9085, e-ISSN: 2149-4584
Araştırma Makalesi

Erzincan University
Journal of Science and Technology
2020, 13(2),898-916
DOI: 10.18185/erzifbed.617161
Research Article

Küçük Gürültü Terimi İçeren Itô Stokastik Diferansiyel Denklemler için Stokastik Runge-Kutta-Fehlberg Yöntemi

Hande GÜNAY AKDEMİR[1*], Dudu AYDIN OĞUR[2]

[1]Giresun Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Giresun, Türkiye
[2]Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Giresun, Türkiye

Geliş / Received: 09/09/2019, Kabul / Accepted: 01/06/2020

Öz

Bu çalışmada, difüzyon teriminde küçük bir çarpan olan Itô stokastik diferansiyel denklemler (SDD) için stokastik Runge-Kutta-Fehlberg (SRKF) yöntemi önerilmiştir. Bu yöntem, deterministik DD için iyi bilinen ve türevleri kullanmayan altı aşamalı bir yöntem olan RKF yönteminin karışık stokastik (klasik-stokastik) integralleri kullanan bir uyarlamasıdır. Önerilen yöntemin ara adımlarında Euler-Maruyama (EM) tahminleyicisi kullanılmıştır. Bazı test problemleri için, yöntemin güçlü yakınsaklığını incelemek ve bilinen bazı yöntemlerle karşılaştırmak amacıyla simülasyon çalışmaları yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Runge-Kutta-Fehlberg yöntemi, Itô stokastik diferansiyel denklemler, nümerik çözümler, küçük gürültü.

A Stochastic Runge-Kutta-Fehlberg Method for Itô Stochastic Differential Equations with Small Noise

Abstract

In this study, a stochastic Runge-Kutta-Fehlberg (SRKF) method is proposed for the Itô stochastic differential equations (SDE) with a small factor in the diffusion coefficient. This method, which uses mixed stochastic (classical-stochastic) integrals, is an extension of derivative-free six-stage RKF method which is well known for deterministic DE. In intermediate steps of the proposed method, the Euler-Maruyama predictor is used. For some test problems, simulation studies are conducted to examine strong convergence of the method and compare it with some known methods.

Keywords: Runge-Kutta-Fehlberg method, Itô stochastic differential equations, numerical solutions, small noise.

* Sorumlu Yazar: hande.akdemir@giresun.edu.tr

1. Giriş

Bir mühendislik problemi, fizik kanunları gereğince veya deneyler gösterir ki; bir fonksiyonun zamana bağlı değişim hızını (türevini) içeren bir DD ile ifade edilen matematiksel bir modele dönüşebilir. Gerçek hayat problemlerinde, birbiriyle etkileşen çok sayıda bileşen içeren karmaşık sistemler vardır ve dış etkenlerin etkisiyle sonuçları tam olarak kestirilemeyen, yani tahmin edilemeyen durumlar ortaya çıkabilir. Koşullar değişmeden tekrarlanan bir deneyin sonuçları aynı olmayabilir. Deterministik adı verilen denklemlerden daha gerçekçi bir model temsili elde edilmek istenirse, ölçüm ve yuvarlama hataları, dalgalanmalar ve düzensizlikler, yani belirsizlik göz önüne alınmalıdır. Stokastik analizin konusu, rastgele fonksiyonların olduğu ve özellikle mikro ölçekli yapıları olan problemlerdir. Olasılık teorisini kullanan analitik ve nümerik yöntemler, stokastik dinamikleri göz önüne alacak şekilde düzenlenmiş deterministik tekniklere dayanmaktadır.

Bir rastgele fonksiyonu ifade etmek için Stokastik Süreç kavramı kullanılmaktadır. Bir rastgele değişkenler ailesi olarak tanımlanabilecek stokastik süreç, bir olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış ölçülebilir bir fonksiyondur ve indeks kümesi genellikle zamanı ifade eder. Dolayısıyla iki değişkenli bir fonksiyon olan stokastik süreç, şans faktörünün ortadan kalktığı düşünüldüğünde sadece zamana bağlı bir fonksiyon (realizasyon); zamanın belirli bir anında ise bir rastgele değişkendir.

Botanikçi Robert Brown, çok küçük bir polen parçacığının suyun içine bırakıldığında çok düzensiz ve tahmin edilemez bir yörünge çizdiğini gözlemlemiştir (Brown, 1828). Einstein (1905) bu durumu, polenin su molekülleri tarafından rastgele yönlerde bombardımana tutulması olarak açıklamıştır. Rastgele bir güç alanında hareket eden bir parçacığın hız denklemi ilk kez Langevin (1908) tarafından formüle edilmiştir. 1923'te Wiener, Brown Hareketi Sürecini (BHS) tanımlamıştır (Wiener, 1923). SDD'nin sistematik olarak ele alınışı ise 1940'ların başlarında Japon matematikçi Kazufumi Itô ile başlamıştır. Ayrıntılar için okuyucu Itô (1951) makalesine başvurabilir.

SDD'nin analitik çözümlerini elde etmek çoğu zaman zordur. Bu durumda, Stokastik Taylor açılımlarına (STA) dayalı nümerik metotlar iyi yaklaşımlar sağlayabilmektedir. STA'nın en büyük zorluğu katsayıların yüksek mertebeden türevlerinin her iterasyonda hesaplanması gerekliliğidir. Daha yüksek mertebeden yaklaşımlar çok hızlı bir şekilde karmaşık hale gelmektedir. Dolayısıyla, türevleri kullanmayan kararlı yöntemler önem kazanmaktadır. Türevler yerine sonlu farklar getirildiğinde nümerik metotların önemli bir sınıfı olan SRK yöntemleri elde edilir. Nümerik yöntemin etkinliğini veren iki önemli kriter; zayıf ve güçlü yakınsaklık mertebesidir. Tanımlar için okuyucu Milstein (1994) çalışmasına başvurabilir.

Küçük dalgalanmalardan etkilenen birçok fiziksel sistemi modellemek için küçük gürültülü SDD kullanılır. Gürültü küçük olduğunda, stokastik sistemin, farklı bir analitik karaktere sahip olmasına rağmen, bir şekilde deterministik olana "yakın" bir çözümü olması beklenebilir (Sickenberger ve ark., 2009).

Şimdi, küçük gürültülü Itô SDD için SRK tipli yöntemleri içeren ilgili literatürü verelim.

Deterministik RK yöntemlerinin adaptasyonları olarak görülebilen Rumelin'in (1982) önerdiği formülasyonlar için güçlü yakınsaklık mertebesinin 3/2 değerini aşamayacağı gösterilmiştir. Özellikle küçük gürültüyü göz önüne alan Milstein ve Tretyakov (1997a, b ve 2000) verdikleri yöntemlerin yakınsaklık mertebelerini ayrıntılı incelemişlerdir. Güçlü yakınsaklık mertebesi 3/2 ve zayıf yakınsaklık mertebesi 2 olan yöntemler sırasıyla Rößler (2005 ve 2009) çalışmalarında verilmiştir. Komori (2007) küçük gürültü için deterministik mertebesi 4 olan ve 2 zayıf yakınsaklık mertebesindeki SRK yöntemlerini önermiştir. Yazar iki aşamalı, kapalı, 1. veya 2. mertebeden SRK yöntemi için kararlılık özelliklerini Komori (2008) çalışmasında incelemiştir. Açık bir yöntem için okuyucu Komori ve ark. (2017) çalışmasına başvurabilir. Buckwar ve ark. (2010) deterministik mertebesi 2 ve 3 olan iki aşamalı iyileştirilmiş SRK yöntemini önermişler ve bu yöntemin hata analizlerini yapmışlardır. Buckwar ve Riedler (2011) sıçramalı-difüzyon DD için RK-Maruyama yöntemlerini ele almışlar ve özellikle küçük gürültü için bu yöntemlerin sıçramasız durumu da içeren lokal ve global hata davranışlarını analiz etmişlerdir. Buckwar ve arkadaşlarının makalelerini referans alan, sabit değil de uyarlanabilir (adaptive) adım boyu kullanılan ve küçük gürültülü SDD için yerel hata analizleri yapan iki çalışma Valinejad ve Hosseini (2010 ve 2012)'dir. RKF katsayılarını kullanan, uyarlanabilir başka bir yöntem için okuyucu Averina ve ark. (1994) çalışmasına başvurabilir. Wang (2015) çarpımsal gürültü içeren SDD için kararlılık (A-stability) özelliğine sahip SRK yöntemleri incelemiş ve güçlü yakınsaklık mertebelerini hesaplamıştır. Tang ve Xiao (2018), DD sistemlerinin çözümleri için açık, yarı kapalı ve kapalı SRK tipli yöntemleri vermişlerdir.

Bu makalede ise Buckwar ve ark. (2010) çalışmasında verilen, stokastik integralleri kullanan, iki aşamalı iyileştirilmiş SRK yönteminin; deterministik mertebesi 5 olan, 6 aşamalı bir uyarlaması verilmiştir. Benzer bir yaklaşım Komori and Buckwar (2013)'de önerilmiştir. SRK yöntemleri, deterministik RK yöntemlerinin genelleştirmeleri olarak görülebilir. Daha önceden de belirttiğimiz üzere, küçük gürültü için deterministik mertebenin 2, 3 ve 4 olduğu durumlar analiz edilmiştir. Dolayısıyla, bu çalışmada deterministik mertebe 5 olarak seçilmiştir. Ancak, mertebe yükseldikçe aşama sayısı artmaktadır. Tercih edilen herhangi bir deterministik mertebeden RK katsayıları kullanılarak yöntem uyarlanabilir. Algoritmaların tamamlanma süreleri ve deterministik mertebe kriterleri göz önüne alınarak aşama sayısı belirlenmelidir.

Ayrıca bu çalışmada, bilinen SRK yöntemlerinden farklı olarak, daha iyi bir yaklaşım sağlayabilmek amacıyla, tahminleyici işlemleri vasıtasıyla elde edilen yaklaşım değerleri kullanılarak ara aşama değerleri iyileştirilmiştir. Dolayısıyla, önerilen yöntem açık olmasına rağmen tahminleyici-düzeltici tipli bir RK yaklaşımı olarak görülebilir.

Çalışma şu şekilde organize edilmiştir. Bölüm 2'de bazı temel tanımlar ve karşılaştırma yapılacak yöntemler verilmiştir. Yine aynı bölümde SRKF yöntemi tanımlanmıştır. Önerilen yöntemin uygulama örnekleri Bölüm 3'de yer almaktadır. Çalışma, Sonuç bölümü ile tamamlanmıştır.

3. Materyal ve Metot

Bu bölümde, Itô SDD'nin temellerinde önemli bir yer tutan BHS'nin tanımından ve bazı özelliklerinden başlayarak, bazı temel tanımlar ve yöntemler verilmiştir.

Tanım 2.1: (Ω, F, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı $B_t = \left(B_t(\omega), t \in [0,\infty), \omega \in \Omega\right)$ stokastik süreci aşağıdaki şartları sağlıyorsa (standart) BHS adını alır.

$(i)\, B_0 = 0$

$(ii)\, B_t$ sürecinin artımları durağan ve bağımsızdır, yani $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ için $\left(B_{t_1} - B_{t_0}\right), \left(B_{t_2} - B_{t_1}\right), \ldots, \left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right)$ bağımsız rastgele değişkenler ve $\left(B_t - B_s\right)$ ile $\left(B_{t+h} - B_{s+h}\right)$ aynı dağılıma sahiptir.

$(iii)\, B_t \sim N(0,t)$

BHS'nin realizasyonları hemen hemen kesinlikle süreklidir ve hemen hemen her yerde türevi tanımsızdır, yani sıçramalı süreksizlik noktaları yoktur ve neredeyse tüm realizasyonları türevli değildir. Türev tanımlı olmamasına rağmen, anlamlı olan $dB_t = B_{t+dt} - B_t$ sonsuz küçük artımları için $dB_t \sim N(0,dt)$ ve

$$\left(dB_t\right)^2 \overset{m.s}{\cong} dt. \tag{1}$$

Bu çalışmada, $t \in [0,\infty)$ için, bilinen (Ω, F, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı X_t sürekli stokastik süreç ve B_t de BHS olmak üzere, Itô formunda verilen:

$$\begin{cases} dX_t = f\left(t, X_t\right)dt + g\left(t, X_t\right)dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

skaler SDD'nin çözümündeki nümerik yaklaşım yöntemleri göz önüne alınmaktadır. Burada $f\left(t, X_t\right)$ fonksiyonuna sürüklenme terimi, $g\left(t, X_t\right)$ fonksiyonuna ise difüzyon terimi adı verilir. (2) denklemiyle verilen SDD'ye eşdeğer integral formu:

$$X_t = X_0 + \int_{s=0}^{t} f\left(s, X_s\right)ds + \int_{s=0}^{t} g\left(s, X_s\right)dB_s$$

şeklindedir. Burada birinci integral Riemann anlamında, ikinci integral ise Itô anlamındadır. 0 ortalamalı normal dağılımlı bir rastgele değişken olan Itô stokastik integrali, Riemann-Stieltjes toplamlarının kuadratik orta anlamda limiti olarak tanımlanır.

İki değişkenli deterministik fonksiyonlar için verilen TA'da $\left(dt\right)^2 = dB_t\, dt = 0$ kabul edilerek ve (1)-(2) denklemleri kullanılarak klasik analizdeki zincir kuralının benzeri olan Itô Formülü:

$$d(F(t,X_t)) = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \left(\frac{\partial F}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(dX_t\right)^2 \right)_{x=X_t}$$
$$= \left[\left(F_t(t,X_t) + F_x(t,X_t)f(t,X_t) + \frac{1}{2}F_{xx}(t,X_t)g^2(t,X_t) \right)dt + F_x(t,X_t)g(t,X_t)dB_t \right]_{x=X_t}$$

elde edilir.

Burada üç nümerik yöntem (EM yöntemi (Maruyama, 1955), Milstein yöntemi (Milstein, 1994), Newton yöntemi (Newton, 1991) üzerinde durulmuştur. Bölüm sonunda önerilen yöntem SRKF yöntemi verilmiştir. Yöntemin katsayıları mertebesi 5 olan deterministik RKF yönteminden bazı değişikliklerle alınmıştır (Fehlberg, 1969, Sayfa 13, Tablo III).

2.1. Euler-Maruyama Yöntemi

$[0,T]$ aralığının bir parçalanışı $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ olmak üzere, her $n = 0,1,\ldots,N-1$ için adım boyu $h = t_{n+1} - t_n$ şeklinde eşit seçilerek $X_{t_n} \cong Y_n$ yaklaşım sürecini veren nümerik çözümlerle ilgilenilmektedir. Bu yöntemler arasında en basit ve en bilineni:

$$Y_{n+1} = Y_n + f\left(t_n, Y_n\right)h + g\left(t_n, Y_n\right)\Delta B_n \qquad n = 0,1,2,\ldots,N-1 \tag{3}$$

iteratif eşitliği ile verilen EM yöntemidir. Burada, $\Delta B_n = B_{n+1} - B_n \sim N(0,h)$ şeklinde hesaplayıcıda üretilir.

2.2. Milstein Yöntemi

İlgilendiğimiz diğer bir yöntem, (3) eşitliği ile verilen EM yaklaşımının hatasını azaltmak için difüzyon teriminin türevini kullanan:

$$Y_{n+1} = Y_n + f\left(t_n, Y_n\right)h + g\left(t_n, Y_n\right)\Delta B_n + \frac{1}{2}g(t_n, Y_n)\left.\frac{\partial g(t_n, x)}{\partial x}\right|_{x=Y_n}\left(\left(\Delta B_n\right)^2 - h\right) \tag{4}$$
$$n = 0,1,2,\ldots,N-1$$

ile verilen Milstein yöntemidir. (4) eşitliğindeki $\left(\left(\Delta B_n\right)^2 - h\right)\big/2$ terimi aslında STA'da kullanılan karışık stokastik integralden biridir ve

$$\int_{u=0}^{h}\int_{s=0}^{u} dB_s dB_u = \int_{u=0}^{h} B_u dB_u = \frac{B_h^2 - h}{2}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

EM ve Milstein yöntemlerinin güçlü yakınsaklık mertebeleri sırasıyla 1/2 ve 1'dir. Dolayısıyla EM, Milstein yöntemine göre daha büyük hata değerleri vereceğinden karşılaştırmalı analizlerde kullanılmamıştır. Ancak, hesaplama kolaylıkları nedeniyle önerilen SRKF yönteminin ara adımlarında EM yönteminin kullanılması tercih edilmiştir.

2.3. Newton Yöntemi

RK tipli yöntemler sınıfında yer alan ve türevsiz Milstein yöntemi olarak bilinen Newton yöntemi, (5)'deki gibi verilir.

$$\begin{cases} F_1 = f(Y_n), G_1 = g(Y_n), \\ G_2 = g\left(Y_n + \dfrac{g(Y_n)\left(\Delta B_n - \sqrt{h}\right)}{2}\right) \end{cases} \text{ olmak üzere,}$$

$$Y_{n+1} = Y_n + F_1 h + G_2 \Delta B_n + \left[G_2 - G_1\right]\sqrt{h}. \tag{5}$$

Burada, basitlik açısından $f\left(t_n, Y_n\right) = f\left(Y_n\right)$ ve $g\left(t_n, Y_n\right) = g\left(Y_n\right)$ şeklinde yazılmıştır.

2.3. Stokastik Runge-Kutta-Fehlberg Yöntemi

Bu bölümde önerilen açık yöntem olan 6 aşamalı SRKF yöntemi verilmiştir.

$Z_1^n, Z_2^n \sim N(0,1)$ bağımsız,

$$\frac{I_{10}^{t_n,t_n+h}}{h} = h^{3/2}\frac{\frac{Z_1^n}{\sqrt{3}} + Z_2^n}{2h} = \frac{\frac{Z_1^n\sqrt{h}}{\sqrt{3}} + Z_2^n\sqrt{h}}{2} = \frac{\frac{\Delta B_h^{1,n}}{\sqrt{3}} + \Delta B_h^{2,n}}{2} = \frac{I_n}{2},$$

$I_1^{t_n,t_n+h} = Z_2^n\sqrt{h} = \Delta B_h^{2,n}$ kullanılan stokastik integraller,

$$F_i^n = Y_n + \sum_{j=1}^{6} a_{ij} f(t_n + c_j h, F_j^n)h + \sum_{j=1}^{6} b_{ij} g(t_n + \hat{c}_j h, G_j^n)\frac{I_{10}^{t_n,t_n+h}}{h}$$

$$G_i^n = Y_n + \sum_{j=1}^{6} \hat{a}_{ij} f(t_n + c_j h, F_j^n)h \quad i = 1, \ldots, 6$$

yardımcı değişkenleri ara aşama değerleri olmak üzere,

$$\begin{aligned} Y_{n+1} = Y_n &+ \sum_{i=1}^{6} \beta_i f(t_n + c_i h, F_i^n)h + \sum_{i=1}^{6} \gamma_i g(t_n + \hat{c}_i h, G_i^n) I_1^{t_n,t_n+h} \\ &+ \sum_{i=1}^{6} \eta_i g(t_n + \hat{c}_i h, G_i^n)\frac{I_{10}^{t_n,t_n+h}}{h}. \end{aligned} \tag{6}$$

Yöntemin katsayılarını veren Butcher tablosu aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 3/8 & 12/13 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{c}} = 2\mathbf{c},$$

$$\boldsymbol{\beta}^T = \begin{pmatrix} 16/135 & 0 & 6656/12825 & 28561/56430 & -9/50 & 2/55 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\gamma}^T = \begin{pmatrix} 25/216 & 0 & 1408/2565 & 2197/4104 & -1/5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\eta}^T = \begin{pmatrix} 181/360 & 0 & -128/4275 & -2197/75240 & -12/25 & 2/55 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 1/4 & 0 & & & & \\ 3/32 & 9/32 & 0 & & & \\ 1932/2197 & -7200/2197 & 7296/2197 & 0 & & \\ 439/216 & -8 & 3680/513 & -845/4104 & 0 & \\ -8/27 & 2 & -3544/2565 & 1859/4104 & -11/40 & 0 \end{pmatrix} \text{(alt üçgensel)},$$

$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{B} = 2\mathbf{A}$ olmak üzere,

$$\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \\ \hline \hat{\mathbf{c}} & \hat{\mathbf{A}} & & \\ \hline & \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}} & \boldsymbol{\gamma}^{\mathbf{T}} & \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{T}} \end{array}.$$

Ayrıca, $\mathbf{e}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere, mertebe koşulları:

$$\begin{gathered} \mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{e}, \quad \hat{\mathbf{c}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\beta}^T\mathbf{e} = 1, \quad \boldsymbol{\gamma}^T\mathbf{e} = 1, \quad \boldsymbol{\eta}^T\mathbf{e} = 0, \\ \boldsymbol{\beta}^T\mathbf{A}\mathbf{e} = \frac{1}{2}, \quad \boldsymbol{\beta}^T\mathbf{B}\mathbf{e} = 1, \quad \boldsymbol{\gamma}^T\hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} = 1, \quad \boldsymbol{\eta}^T\hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} = -1. \end{gathered} \tag{7}$$

şeklindedir.

Problemlerimizde gürültünün küçüklüğünü belirtebilmek için difüzyon teriminde $g(t, X_t) = \varepsilon \hat{g}(t, X_t)$ şeklinde küçük bir çarpan kullanılmıştır. (6) formülasyonlarında bu parametreye ihtiyaç olmamasına rağmen, gürültünün küçük olması (7) mertebe koşullarının sayıca az olmasına, çözüm sürecinin varyansının ve hatanın küçük olmasına yol açmaktadır. Ayrıca, (2) denklemi $\varepsilon \to 0$ iken deterministik denkleme yaklaşacaktır.

4. Bulgular

Bu bölümde, Bölüm 2'de verilen nümerik yöntemler için analitik çözümü bilinen bazı test problemleri üzerinde hata analizleri raporlanmıştır. 100 realizasyon üzerinden hata analizleri yapılmıştır. k realizasyon sayacı olmak üzere, ortalama mutlak hata formülü:

$$e = \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}\left|X_T^k - Y_N^k\right|$$

şeklindedir.

$$E\left[\left|X_{t_n} - Y_n\right|\right] = Ch^p$$

ortalama mutlak hata ifadesinde her iki tarafın da 2 (veya 10 (adım boyunun tabanına göre)) tabanında logaritması alınırsa

$$\log_2\left(E\left[\left|X_{t_n} - Y_n\right|\right]\right) = \log_2\left(C\right) + p\log_2\left(h\right)$$

şeklinde elde edilir. Bağımlı değişken değerleri, eşitliğin sol tarafındaki ortalama mutlak hataların 2 tabanındaki logaritmaları ve bağımsız değişken değerleri ise adım boyunun 2 tabanındaki logaritmaları olmak üzere, doğrusal regresyon yöntemiyle doğru uydurulduğunda mertebe değeri p kestirilebilir.

Tüm uygulama örnekleri için kodlamalar MATLAB'da yapılmıştır. Daha iyi karşılaştırmalar yapabilmek üzere, yöntemlerin her adımda aynı BHS realizasyonlarını kullanması için hata değerleri tek bir kod içinde elde edilmiştir. Dolayısıyla, örnek uzayın elemanı olan belirli bir durum için üç yöntemin nasıl yaklaşımlar vereceği karşılaştırılmıştır. Newton yöntemi, Milstein yönteminden elde edilen RK tipli bir yöntem olduğundan hata değerleri aynı çıkmıştır.

Örnek 3.1. Geometrik BHS

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

sabit katsayılı, lineer homojen SDD'nin çözümü:

$$X_t = X_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)$$

şeklindedir. $X_0 = 1,\ T = 1$ olmak üzere, sürüklenme ve difüzyon katsayıları sırasıyla $\mu = -1,\ \sigma = 10^{-6}$ olarak alınmıştır.

SRKF yöntemi için (6) formülasyonları kullanılarak MATLAB'da fonksiyonlar oluşturulmuştur. randn ~ N(0,1) olmak üzere, sürüklenme ve difüzyon terimlerini tanımlayan fonksiyonlar ve ara adımlarda kullanılan EM tahminleyicisi sırasıyla:

$$\begin{aligned} &\text{Drift}(x) = -x, \quad \text{Difussion}(x) = 10^{-6}x, \\ &\text{Euler}(\Delta, x) = x + \Delta \cdot \text{Drift}(x) + \sqrt{\Delta} \cdot \text{randn} \cdot \text{Difussion}(x) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $\text{Euler}(\Delta, X_{t_n}) = X_{t_n+\Delta}$ şeklindedir. Ek I'de verilmiş olan diğer fonksiyonlar ise birbirini çağıran yapıdadır. Buradan, iteratif denklemler:

$$
\begin{aligned}
Y_{n+1} = Y_n &+ \frac{16h}{135} f(t_n, F_1^{\,n}) + 0hf(t_n + h/4, F_2^{\,n}) + \frac{6656h}{12825} f(t_n + 3h/8, F_3^{\,n}) \\
&+ \frac{28561h}{56430} f(t_n + 12h/13, F_4^{\,n}) - \frac{9h}{50} f(t_n + h, F_5^{\,n}) + \frac{2h}{55} f(t_n + h/2, F_6^{\,n}) \\
&+ \Delta B_h^{2,n} \Big(\frac{25}{216} g(t_n, G_1^{\,n}) + 0g(t_n + h/2, G_2^{\,n}) + \frac{1408}{2565} g(t_n + 3h/4, G_3^{\,n}) \\
&+ \frac{2197}{4104} g(t_n + 24h/13, G_4^{\,n}) - \frac{1}{5} g(t_n + 2h, G_5^{\,n}) + 0g(t_n + h, G_6^{\,n})\Big) \\
&+ \frac{I_n}{2} \Big(\frac{181}{360} g(t_n, G_1^{\,n}) + 0g(t_n + h/2, G_2^{\,n}) - \frac{128}{4275} g(t_n + 3h/4, G_3^{\,n}) \\
&- \frac{2197}{75240} g(t_n + 24h/13, G_4^{\,n}) - \frac{12}{25} g(t_n + 2h, G_5^{\,n}) + \frac{2}{55} g(t_n + h, G_6^{\,n})\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= Y_n + \frac{16h}{135} \mathrm{Drift}(Y_n) + 0h\mathrm{F2}(h/4, Y_n, I_n) + \frac{6656h}{12825} \mathrm{F3}(3h/8, Y_n, I_n) \\
&+ \frac{28561h}{56430} \mathrm{F4}(12h/13, Y_n, I_n) - \frac{9h}{50} \mathrm{F5}(h, Y_n, I_n) + \frac{2h}{55} \mathrm{F6}(h/2, Y_n, I_n) \\
&+ \Delta B_h^{2,n} \Big(\frac{25}{216} \mathrm{Diffusion}(Y_n) + 0\mathrm{G2}(h/2, Y_n) + \frac{1408}{2565} \mathrm{G3}(3h/4, Y_n, I_n) \\
&+ \frac{2197}{4104} \mathrm{G4}(24h/13, Y_n, I_n) - \frac{1}{5} \mathrm{G5}(2h, Y_n, I_n) + 0\mathrm{G6}(h, Y_n, I_n)\Big) \\
&+ \frac{I_n}{2} \Big(\frac{181}{360} \mathrm{Diffusion}(Y_n) + 0\mathrm{G2}(h/2, Y_n) - \frac{128}{4275} \mathrm{G3}(3h/4, Y_n, I_n) \\
&- \frac{2197}{75240} \mathrm{G4}(24h/13, Y_n, I_n) - \frac{12}{25} \mathrm{G5}(2h, Y_n, I_n) + \frac{2}{55} \mathrm{G6}(h, Y_n, I_n)\Big)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

Tablo 1. Örnek 3.1 için Ortalama Mutlak Hata ve Kestirilen Mertebe Değerleri

h	Milstein	Newton	SRKF
0.0100	1.84710E-03	1.84710E-03	1.84397E-03
0.0010	1.84016E-04	1.84016E-04	1.83982E-04
0.0001	1.83947E-05	1.83947E-05	1.83274E-05
p	1.0009	1.0009	1.0013

Tüm yöntemler için $[0,1]$ aralığı $N = 100, 1000, 10000$ eşit parçaya bölünerek hesaplamalar yapılmıştır. Ortalama mutlak hatalar ve kestirilen mertebe değerleri Tablo 1'de verilmiştir.

Örnek 3.2. Stokastik lojistik (Pearl Verhulst) denklemi (Hu ve Wang, 2011)

$$\begin{cases} dX_t = \lambda\left(\bar{X} - X_t\right) X_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

denkleminin çözümü:

$$X_t = \frac{\exp\left(\left(\lambda\bar{X} - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)}{\frac{1}{X_0} + \lambda \int_{s=0}^{t} \exp\left(\left(\lambda\bar{X} - \frac{\sigma^2}{2}\right)s + \sigma B_s\right) ds}$$

şeklindedir. Burada,

$$Z_t = \int_{s=0}^{t} \exp\left(\left(\lambda\bar{X} - \frac{\sigma^2}{2}\right)s + \sigma B_s\right) ds$$

şeklindeki integre edilmiş BHS, yaklaşık integrasyon yöntemlerinden dikdörtgenler kuralı vasıtasıyla üretilmiştir. $X_0 = 0.2,\ T = 20$ olmak üzere, $\lambda = 0.8, \bar{X} = 0.625, \sigma = 2^{-15}$ olarak alınmıştır.

SRKF yöntemi için, Örnek 3.1'den farklı olarak sadece sürüklenme ve difüzyon fonksiyonları (8)'deki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} &\text{Drift}(x) = \lambda\left(\bar{X} - x\right)x, \\ &\text{Difussion}(x) = \sigma x. \end{aligned} \tag{8}$$

Tablo 2. Örnek 3.2 için Ortalama Mutlak Hata ve Kestirilen Mertebe Değerleri

h	Milstein	Newton	SRKF
2^{-6}	2.43651E-03	2.43651E-03	2.43404E-03
2^{-7}	1.21984E-03	1.21984E-03	1.22073E-03
2^{-8}	6.10321E-04	6.10321E-04	6.05016E-04
p	0.9986	0.9986	1.0042

Tüm yöntemler için $[0,20]$ aralığı $N = 1280, 2560, 5120$ eşit parçaya bölünerek hesaplamalar yapılmıştır. Ortalama mutlak hatalar ve kestirilen mertebe değerleri Tablo 2'de verilmiştir.

Örnek 3.3. Lineer olmayan skaler SDD

$$\begin{cases} dX_t = -\left(\alpha + \beta^2 X_t\right)\left(1 - X_t^{\,2}\right)dt + \beta\left(1 - X_t^{\,2}\right)dB_t,\ t \in [0,1] \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

denkleminin çözümü:

$$X_t = \frac{\exp\left(-2\alpha t + 2\beta B_t\right) - 1}{\exp\left(-2\alpha t + 2\beta B_t\right) + 1}$$

şeklindedir. Burada, $T = 1$ olmak üzere, $\alpha = 1, \beta = 2^{-12}$ olarak alınmıştır. Mutlak hatalar ve kestirilen mertebe değerleri Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 3. Örnek 3.3 için Ortalama Mutlak Hata ve Kestirilen Mertebe Değerleri

h	Milstein	Newton	SRKF
2^{-6}	2,86094E-03	2,86094E-03	2,87744E-03
2^{-7}	1,42685E-03	1,42685E-03	1,43414E-03
2^{-8}	7,12507E-04	7,12507E-04	6,99095E-04
p	1.0028	1.0028	1.0206

5. Sonuç

Buckwar ve arkadaşlarına (2010) göre, p deterministik yöntemin mertebesi olmak üzere, global hata

$$O(\varepsilon^2 h^{1/2} + \varepsilon h^2 + h^p)$$

mertebesindendir. Yazarlar, önerdikleri yöntemi güçlü yakınsaklık mertebesi 3/2 olan STA ile karşılaştırmışlardır.

Bu çalışmada, $p=5$ seçildiğinden üç bölge oluşur. $h > \varepsilon^{1/3}$ için üçüncü, $\varepsilon^{2/3} \le h \le \varepsilon^{1/3}$ için ikinci ve $h < \varepsilon^{2/3}$ için ise birinci terim baskın gelir. Örneğin, Örnek 3.1'de $\varepsilon = 10^{-6}$ ve $h = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ olduğundan ikinci terim baskındır ve mertebe 1 olmalıdır. Analizlerimizden mertebenin asimptotik olarak 1'e yaklaştığı gözlemlenmiştir. Aynı örnekte, hatanın da minimum olabilmesi için $\varepsilon = 10^{-6}$ iken $h = 10^{-2}$ seçilirse, p değeri 1.3671 olarak bulunmuştur. Benzer analizler Örnek 3.2 ve 3.3 için de verilebilir. Teorik değerlerle Tablo 1-3'te verilen deneysel sonuçlar uyumludur.

Test problemleri üzerinde yapılan analizler sonucunda, Milstein ve Newton yöntemlerine göre daha küçük hata ve daha yüksek mertebe değerleri elde edilmiştir. Adım boyu, ε parametresi göz önünde bulundurularak, hatanın küçüklüğü ile algoritmanın tamamlanma zamanı arasında ödünleşim yapılarak seçilmelidir.

Teşekkür: Bu çalışma, Giresun Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından desteklenmiştir (Proje No: FEN-BAP-A-230218-49). Ayrıca, yazarlar değerli katkılarından ötürü hakemlere teşekkürlerini sunarlar.

Kaynaklar

Averina, T. A., Artemiev, S. S., and Schurz, H. (1994). "Simulation of stochastic auto-oscillating systems through variable stepsize algorithms with small noise", Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Berlin, Preprint 116.

Brown, R. (1828). "On the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies", *Edinburgh New Philosophical Journal*, 5, 358-371.

Buckwar, E., Riedler, M. G. (2011). "Runge–Kutta methods for jump–diffusion differential equations", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(6), 1155-1182.

Buckwar, E., Rößler, A., and Winkler, R. (2010). “Stochastic Runge–Kutta methods for Itô SODEs with small noise”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(4), 1789-1808.

Einstein, A. (1905). “Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen”, *Annalen der physik*, 322(8), 549-560.

Fehlberg, E. (1969). “Low-order classical Runge-Kutta formulas with stepsize control and their application to some heat transfer problems”, NASA Technical Report 315.

Hu, G., Wang, K. (2011). “The estimation of probability distribution of SDE by only one sample trajectory”, *Computers and Mathematics with Applications*, 62(4), 1798-1806.

Ito, K. (1951). “On Stochastic Differential Equations”, *Memoirs of the American Mathematical Society*, 4, 1-51.

Komori, Y. (2007). “Weak second-order stochastic Runge–Kutta methods for non-commutative stochastic differential equations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 206(1), 158-173.

Komori, Y. (2008). “Weak first or second-order implicit Runge–Kutta methods for stochastic differential equations with a scalar Wiener process”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 217(1), 166-179.

Komori, Y., Buckwar, E. (2013). “Stochastic Runge-Kutta methods with deterministic high order for ordinary differential equations”, *BIT Numerical Mathematics*, 53(3), 617-639.

Komori, Y., Cohen, D., and Burrage, K. (2017). “Weak Second Order Explicit Exponential Runge--Kutta Methods for Stochastic Differential Equations”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 39(6), A2857-A2878.

Langevin, P. (1908). “Sur la théorie du mouvement brownien”, *Comptes Rendus*, 146, 530-533.

Maruyama, G. (1955). “Continuous Markov processes and stochastic equations”, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 4(1), 48-90.

Milstein, G. N. (1994). “Numerical integration of stochastic differential equations”, Vol. 313, Springer Science and Business Media.

Milstein, G. N., Tretyakov, M. V. (1997a). “Mean-square numerical methods for stochastic differential equations with small noises”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(4), 1067-1087.

Milstein, G. N., Tretyakov, M. V. (1997b). “Numerical methods in the weak sense for stochastic differential equations with small noise”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34(6), 2142-2167.

Milstein, G., Tretyakov, M. (2000). “Numerical algorithms for semilinear parabolic equations with small parameter based on approximation of stochastic equations”, *Mathematics of Computation*, 69(229), 237-267.

Newton, N. J. (1991). “Asymptotically efficient Runge-Kutta methods for a class of Ito and Stratonovich equations”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 51(2), 542-567.

Rößler, A. (2005, December). “Explicit order 1.5 schemes for the strong approximation of Itô stochastic differential equations”, In

PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (Vol. 5, No. 1, pp. 817-818), Berlin: WILEY-VCH Verlag.

Rößler, A. (2009). "Second order Runge–Kutta methods for Itô stochastic differential equations", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 47(3), 1713-1738.

Rümelin, W. (1982). "Numerical treatment of stochastic differential equations", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(3), 604-613.

Sickenberger, T., Weinmüller, E., and Winkler, R. (2009). "Local error estimates for moderately smooth problems: Part II—SDEs and SDAEs with small noise", *BIT Numerical Mathematics*, 49(1), 217-245.

Tang, X., Xiao, A. (2018). "Efficient Stochastic Runge-Kutta Methods for Stochastic Differential Equations with Small Noises", *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 10(4), 845-878.

Valinejad, A., Hosseini, S. M. (2010). "A variable step-size control algorithm for the weak approximation of stochastic differential equations", *Numerical Algorithms*, 55(4), 429-446.

Valinejad, A., Hosseini, S. M. (2012). "A stepsize control algorithm for SDEs with small noise based on stochastic Runge–Kutta Maruyama methods", *Numerical Algorithms,* 61(3), 479-498.

Wang, P. (2015). "A-stable Runge–Kutta methods for stiff stochastic differential equations with multiplicative noise", *Computational and Applied Mathematics*, 34(2), 773-792.

Wiener, N. (1923). "Differential-Space", *Journal of Mathematics and Physics,* 2(1-4), 131-174.

Ekler

Ek I. SRKF yöntemi için kullanılan yardımcı fonksiyonlar

$$\begin{aligned}
&F_1^n = Y_n = X_{t_n}, G_1^n = Y_n = X_{t_n}, \\
&F_2^n = Y_n + a_{21} f(t_n, F_1^n)h + b_{21} g(t_n, G_1^n)\frac{I_{10}^{t_n, t_n+h}}{h} \\
&= X_{t_n} + \frac{h}{4}\mathrm{Drift}(X_{t_n}) + \frac{I_n}{4}\mathrm{Diffusion}(X_{t_n}), \\
&G_2^n = Y_n + \hat{a}_{21} f(t_n, F_1^n)h = X_{t_n} + \frac{h}{2}\mathrm{Drift}(X_{t_n}).
\end{aligned} \tag{I.1}$$

$$\mathrm{F2}(\Delta, x, y) = \mathrm{Drift}(\mathrm{Euler}(\Delta, x) + \frac{h}{4}\mathrm{Drift}(\mathrm{Euler}(\Delta, x)) + \frac{y}{4}\mathrm{Diffusion}(\mathrm{Euler}(\Delta, x))) \tag{I.2}$$

olmak üzere,

$$f(t_n + h/4, F_2^n) = \text{Drift}(F_2^n(t_n + h/4))$$
$$= \text{Drift}(X_{t_n+h/4} + \frac{h}{4}\text{Drift}(X_{t_n+h/4}) + \frac{I_n}{4}\text{Diffusion}(X_{t_n+h/4}))$$
$$= \text{Drift}(\text{Euler}(h/4, X_{t_n}) + \frac{h}{4}\text{Drift}(\text{Euler}(h/4, X_{t_n})) + \frac{I_n}{4}\text{Diffusion}(\text{Euler}(h/4, X_{t_n})))$$
$$= \text{F2}(h/4, X_{t_n}, I_n).$$

$\text{G2}(\Delta, x) = \text{Diffusion}(\text{Euler}(\Delta, x) + \frac{h}{2}\text{Drift}(\text{Euler}(\Delta, x)))$ olmak üzere,

$$g(t_n + h/2, G_2^n) = \text{Diffusion}(G_2^n(t_n + h/2)) = \text{Diffusion}(X_{t_n+h/2} + \frac{h}{2}\text{Drift}(X_{t_n+h/2}))$$
$$= \text{Diffusion}(\text{Euler}(h/2, X_{t_n}) + \frac{h}{2}\text{Drift}(\text{Euler}(h/2, X_{t_n}))) = \text{G2}(h/2, X_{t_n}). \quad \text{(I.3)}$$

$$F_3^n = Y_n + a_{31} f(t_n, F_1^n)h + a_{32} f(t_n + h/4, F_2^n)h + [b_{31} g(t_n, G_1^n)$$
$$+ b_{32} g(t_n + h/2, G_2^n)]\frac{I_{10}^{t_n,t_n+h}}{h} = X_{t_n} + \frac{3h}{32}\text{Drift}(X_{t_n}) + \frac{9h}{32}\text{F2}(h/4, X_{t_n}, I_n)$$
$$+ \frac{3I_n}{32}\text{Diffusion}(X_{t_n}) + \frac{9I_n}{32}\text{G2}(h/2, X_{t_n}), \quad \text{(I.4)}$$

$$G_3^n = Y_n + \hat{a}_{31} f(t_n, F_1^n)h + \hat{a}_{32} f(t_n + h/4, F_2^n)h$$
$$= X_{t_n} + \frac{3h}{16}\text{Drift}(X_{t_n}) + \frac{9h}{16}\text{F2}(h/4, X_{t_n}, I_n).$$

$\text{F3}(\Delta, x, y) = \text{Drift}(\text{Euler}(\Delta, x) + \frac{3h}{32}\text{Drift}(\text{Euler}(\Delta, x)) + \frac{9h}{32}\text{F2}(h/4, \text{Euler}(\Delta, x), y)$
$+ \frac{3y}{32}\text{Diffusion}(\text{Euler}(\Delta, x)) + \frac{9y}{32}\text{G2}(h/2, \text{Euler}(\Delta, x)))$ olmak üzere,

$$f(t_n + 3h/8, F_3^n) = \text{Drift}(F_3^n(t_n + 3h/8))$$
$$= \text{Drift}(\text{Euler}(3h/8, X_{t_n}) + \frac{3h}{32}\text{Drift}(\text{Euler}(3h/8, X_{t_n})) \quad \text{(I.5)}$$
$$+ \frac{9h}{32}\text{F2}(h/4, \text{Euler}(3h/8, X_{t_n}), I_n) + \frac{3I_n}{32}\text{Diffusion}(\text{Euler}(3h/8, X_{t_n}))$$
$$+ \frac{9I_n}{32}\text{G2}(h/2, \text{Euler}(3h/8, X_{t_n}))) = \text{F3}(3h/8, X_{t_n}, I_n).$$

$$\mathrm{G3}(\Delta, x, y) = \mathrm{Diffusion}(\mathrm{Euler}(\Delta, x) + \frac{3h}{16}\mathrm{Drift}(\mathrm{Euler}(\Delta, x))$$
$$+\frac{9h}{16}\mathrm{F2}(h/4, \mathrm{Euler}(\Delta, x), y)) \text{ olmak üzere,}$$
$$g(t_n + 3h/4, G_3^{\,n}) = \mathrm{Diffusion}(G_3^{\,n}(t_n + 3h/4)) \tag{I.6}$$
$$= \mathrm{Diffusion}(\mathrm{Euler}(3h/4, X_{t_n}) + \frac{3h}{16}\mathrm{Drift}(\mathrm{Euler}(3h/4, X_{t_n}))$$
$$+\frac{9h}{16}\mathrm{F2}(h/4, \mathrm{Euler}(3h/4, X_{t_n}), I_n)) = G3(3h/4, X_{t_n}, I_n).$$

$$F_4^{\,n} = Y_n + a_{41} f(t_n, F_1^{\,n})h + a_{42} f(t_n + h/4, F_2^{\,n})h + a_{43} f(t_n + 3h/8, F_3^{\,n})h$$
$$+\left[b_{41} g(t_n, G_1^{\,n}) + b_{42} g(t_n + h/2, G_2^{\,n}) + b_{43} g(t_n + 3h/4, G_3^{\,n})\right]\frac{I_{10}^{t_n, t_n+h}}{h}$$
$$= X_{t_n} + \frac{1932h}{2197}\mathrm{Drift}(X_{t_n}) - \frac{7200h}{2197}\mathrm{F2}(h/4, X_{t_n}, I_n) + \frac{7296h}{2197}\mathrm{F3}(3h/8, X_{t_n}, I_n)$$
$$+\frac{1932I_n}{2197}\mathrm{Diffusion}(X_{t_n}) - \frac{7200I_n}{2197}\mathrm{G2}(h/2, X_{t_n}) + \frac{7296I_n}{2197}G3(3h/4, X_{t_n}, I_n), \tag{I.7}$$

$$G_4^{\,n} = Y_n + \hat{a}_{41} f(t_n, F_1^{\,n})h + \hat{a}_{42} f(t_n + h/4, F_2^{\,n})h + \hat{a}_{43} f(t_n + 3h/8, F_3^{\,n})h$$
$$= X_{t_n} + \frac{3864h}{2197}\mathrm{Drift}(X_{t_n}) - \frac{14400h}{2197}\mathrm{F2}(h/4, X_{t_n}, I_n) + \frac{14592h}{2197}\mathrm{F3}(3h/8, X_{t_n}, I_n).$$

$$\mathrm{F4}(\Delta, x, y) = \mathrm{Drift}(\mathrm{Euler}(\Delta, x) + \frac{1932h}{2197}\mathrm{Drift}(\mathrm{Euler}(\Delta, x))$$
$$-\frac{7200h}{2197}\mathrm{F2}(h/4, \mathrm{Euler}(\Delta, x), y) + \frac{7296h}{2197}\mathrm{F3}(3h/8, \mathrm{Euler}(\Delta, x), y)$$
$$+\frac{1932y}{2197}\mathrm{Diffusion}(\mathrm{Euler}(\Delta, x)) - \frac{7200y}{2197}\mathrm{G2}(h/2, \mathrm{Euler}(\Delta, x)) \tag{I.8}$$
$$+\frac{7296y}{2197}G3(3h/4, \mathrm{Euler}(\Delta, x), y)) \text{ olmak üzere,}$$

$$f(t_n+{}^{12h}\!/_{13}, F_4^{\,n}) = \text{Drift}(F_4^{\,n}(t_n+{}^{12h}\!/_{13}))$$
$$= \text{Drift}(\text{Euler}({}^{12h}\!/_{13}, X_{t_n}) + \frac{1932h}{2197}\text{Drift}(\text{Euler}({}^{12h}\!/_{13}, X_{t_n}))$$
$$-\frac{7200h}{2197}\text{F2}({}^{h}\!/_{4}, \text{Euler}({}^{12h}\!/_{13}, X_{t_n}), I_n) + \frac{7296h}{2197}\text{F3}({}^{3h}\!/_{8}, \text{Euler}({}^{12h}\!/_{13}, X_{t_n}), I_n)$$
$$+\frac{1932I_n}{2197}\text{Diffusion}(\text{Euler}({}^{12h}\!/_{13}, X_{t_n})) - \frac{7200I_n}{2197}\text{G2}({}^{h}\!/_{2}, \text{Euler}({}^{12h}\!/_{13}, X_{t_n}))$$
$$+\frac{7296I_n}{2197}G3({}^{3h}\!/_{4}, \text{Euler}({}^{12h}\!/_{13}, X_{t_n}), I_n)) = \text{F4}({}^{12h}\!/_{13}, X_{t_n}, I_n).$$

$$\text{G4}(\Delta, x, y) = \text{Diffusion}(\text{Euler}(\Delta, x) + \frac{3864h}{2197}\text{Drift}(\text{Euler}(\Delta, x))$$
$$-\frac{14400h}{2197}\text{F2}({}^{h}\!/_{4}, \text{Euler}(\Delta, x), y) + \frac{14592h}{2197}\text{F3}({}^{3h}\!/_{8}, \text{Euler}(\Delta, x), y) \text{ olmak üzere,}$$

$$g(t_n+{}^{24h}\!/_{13}, G_4^{\,n}) = \text{Diffusion}(G_4^{\,n}(t_n+{}^{24h}\!/_{13})) \tag{I.9}$$
$$= \text{Diffusion}(\text{Euler}({}^{24h}\!/_{13}, X_{t_n}) + \frac{3864h}{2197}\text{Drift}(\text{Euler}({}^{24h}\!/_{13}, X_{t_n}))$$
$$-\frac{14400h}{2197}\text{F2}({}^{h}\!/_{4}, \text{Euler}({}^{24h}\!/_{13}, X_{t_n}), I_n) + \frac{14592h}{2197}\text{F3}({}^{3h}\!/_{8}, \text{Euler}({}^{24h}\!/_{13}, X_{t_n}), I_n)$$
$$= \text{G4}({}^{24h}\!/_{13}, X_{t_n}, I_n).$$

$$F_5^{\,n} = Y_n + a_{51}f(t_n, F_1^{\,n})h + a_{52}f(t_n+{}^{h}\!/_{4}, F_2^{\,n})h + a_{53}f(t_n+{}^{3h}\!/_{8}, F_3^{\,n})h$$
$$+a_{54}f(t_n+{}^{12h}\!/_{13}, F_4^{\,n})h + [b_{51}g(t_n, G_1^{\,n}) + b_{52}g(t_n+{}^{h}\!/_{2}, G_2^{\,n})$$
$$+b_{53}g(t_n+{}^{3h}\!/_{4}, G_3^{\,n}) + b_{54}g(t_n+{}^{24h}\!/_{13}, G_4^{\,n})]\frac{I_{10}^{t_n, t_n+h}}{h}$$
$$= X_{t_n} + \frac{439h}{216}\text{Drift}(X_{t_n}) - 8h\text{F2}({}^{h}\!/_{4}, X_{t_n}, I_n) + \frac{3680h}{513}\text{F3}({}^{3h}\!/_{8}, X_{t_n}, I_n)$$
$$-\frac{845h}{4104}\text{F4}({}^{12h}\!/_{13}, X_{t_n}, I_n) + \frac{439I_n}{216}\text{Diffusion}(X_{t_n}) \tag{I.10}$$
$$-8I_n\text{G2}({}^{h}\!/_{2}, X_{t_n}) + \frac{3680I_n}{513}G3({}^{3h}\!/_{4}, X_{t_n}, I_n) - \frac{845I_n}{4104}G4({}^{24h}\!/_{13}, X_{t_n}, I_n),$$

$$G_5^{\,n} = Y_n + \hat{a}_{51}f(t_n, F_1^{\,n})h + \hat{a}_{52}f(t_n+{}^{h}\!/_{4}, F_2^{\,n})h + \hat{a}_{53}f(t_n+{}^{3h}\!/_{8}, F_3^{\,n})h$$
$$+\hat{a}_{54}f(t_n+{}^{12h}\!/_{13}, F_4^{\,n})h = X_{t_n} + \frac{439h}{108}\text{Drift}(X_{t_n}) - 16h\text{F2}({}^{h}\!/_{4}, X_{t_n}, I_n)$$
$$+\frac{7360h}{513}\text{F3}({}^{3h}\!/_{8}, X_{t_n}, I_n) - \frac{845h}{2052}\text{F4}({}^{12h}\!/_{13}, X_{t_n}, I_n).$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{F5}(\Delta,x,y)=\mathrm{Drift}(\mathrm{Euler}(\Delta,x)+\frac{439h}{216}\mathrm{Drift}(\mathrm{Euler}(\Delta,x))-8h\mathrm{F2}(h/4,\mathrm{Euler}(\Delta,x),y)\\
&+\frac{3680h}{513}\mathrm{F3}(3h/8,\mathrm{Euler}(\Delta,x),y)-\frac{845h}{4104}\mathrm{F4}(12h/13,\mathrm{Euler}(\Delta,x),y)\\
&+\frac{439y}{216}\mathrm{Diffusion}(\mathrm{Euler}(\Delta,x))-8y\mathrm{G2}(h/2,\mathrm{Euler}(\Delta,x))\\
&+\frac{3680y}{513}G3(3h/4,\mathrm{Euler}(\Delta,x),y)-\frac{845y}{4104}G4(24h/13,\mathrm{Euler}(\Delta,x),y))\ \text{olmak üzere,}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f(t_n+h,F_5^{\,n})=\mathrm{Drift}(F_5^{\,n}(t_n+h)) \qquad \text{(I.11)}\\
&=\mathrm{Drift}(\mathrm{Euler}(h,X_{t_n})+\frac{439h}{216}\mathrm{Drift}(\mathrm{Euler}(h,X_{t_n}))-8h\mathrm{F2}(h/4,\mathrm{Euler}(h,X_{t_n}),I_n)\\
&+\frac{3680h}{513}\mathrm{F3}(3h/8,\mathrm{Euler}(h,X_{t_n}),I_n)-\frac{845h}{4104}\mathrm{F4}(12h/13,\mathrm{Euler}(h,X_{t_n}),I_n)\\
&+\frac{439I_n}{216}\mathrm{Diffusion}(\mathrm{Euler}(h,X_{t_n}))-8I_n\mathrm{G2}(h/2,\mathrm{Euler}(h,X_{t_n}))\\
&+\frac{3680I_n}{513}G3(3h/4,\mathrm{Euler}(h,X_{t_n}),I_n)-\frac{845I_n}{4104}G4(24h/13,\mathrm{Euler}(h,X_{t_n}),I_n))\\
&=\mathrm{F5}(h,X_{t_n},I_n).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{G5}(\Delta,x,y)=\mathrm{Diffusion}(\mathrm{Euler}(\Delta,x)+\frac{439h}{108}\mathrm{Drift}(\mathrm{Euler}(\Delta,x))\\
&-16h\mathrm{F2}(h/4,\mathrm{Euler}(\Delta,x),y)+\frac{7360h}{513}\mathrm{F3}(3h/8,\mathrm{Euler}(\Delta,x),y)\\
&-\frac{845h}{2052}\mathrm{F4}(12h/13,\mathrm{Euler}(\Delta,x),y))\ \text{olmak üzere,}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&g(t_n+2h,G_5^{\,n})=\mathrm{Diffusion}(G_5^{\,n}(t_n+2h)) \qquad \text{(I.12)}\\
&=\mathrm{Diffusion}(\mathrm{Euler}(2h,X_{t_n})+\frac{439h}{108}\mathrm{Drift}(\mathrm{Euler}(2h,X_{t_n}))\\
&-16h\mathrm{F2}(h/4,\mathrm{Euler}(2h,X_{t_n}),I_n)+\frac{7360h}{513}\mathrm{F3}(3h/8,\mathrm{Euler}(2h,X_{t_n}),I_n)\\
&-\frac{845h}{2052}\mathrm{F4}(12h/13,\mathrm{Euler}(2h,X_{t_n}),I_n))=\mathrm{G5}(2h,X_{t_n},I_n).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_6^{\,n} &= Y_n + a_{61} f(t_n, F_1^{\,n})h + a_{62} f(t_n + h/4, F_2^{\,n})h + a_{63} f(t_n + 3h/8, F_3^{\,n})h \\
&+ a_{64} f(t_n + 12h/13, F_4^{\,n})h + a_{65} f(t_n + h, F_5^{\,n})h \\
&+ [b_{61} g(t_n, G_1^{\,n}) + b_{62} g(t_n + h/2, G_2^{\,n}) + b_{63} g(t_n + 3h/4, G_3^{\,n}) \\
&+ b_{64} g(t_n + 24h/13, G_4^{\,n}) + b_{65} g(t_n + 2h, G_5^{\,n})] \frac{I_{10}^{t_n, t_n+h}}{h} \\
&= X_{t_n} - \frac{8h}{27} \mathrm{Drift}(X_{t_n}) + 2h\mathrm{F2}(h/4, X_{t_n}, I_n) - \frac{3544h}{2565} \mathrm{F3}(3h/8, X_{t_n}, I_n) \\
&+ \frac{1859h}{4104} \mathrm{F4}(12h/13, X_{t_n}, I_n) - \frac{11h}{40} \mathrm{F5}(h, X_{t_n}, I_n) - \frac{8I_n}{27} \mathrm{Diffusion}(X_{t_n}) \\
&+ 2I_n \mathrm{G2}(h/2, X_{t_n}) - \frac{3544 I_n}{2565} G3(3h/4, X_{t_n}, I_n) + \frac{1859 I_n}{4104} G4(24h/13, X_{t_n}, I_n) \\
&- \frac{11 I_n}{40} G5(2h, X_{t_n}, I_n),
\end{aligned}
\tag{I.13}
$$

$$
\begin{aligned}
G_6^{\,n} &= Y_n + \hat{a}_{61} f(t_n, F_1^{\,n})h + \hat{a}_{62} f(t_n + h/4, F_2^{\,n})h + \hat{a}_{63} f(t_n + 3h/8, F_3^{\,n})h \\
&+ \hat{a}_{64} f(t_n + 12h/13, F_4^{\,n})h + \hat{a}_{65} f(t_n + h, F_5^{\,n})h \\
&= X_{t_n} - \frac{16h}{27} \mathrm{Drift}(X_{t_n}) + 4h\mathrm{F2}(h/4, X_{t_n}, I_n) - \frac{7088h}{2565} \mathrm{F3}(3h/8, X_{t_n}, I_n) \\
&+ \frac{1859h}{2052} \mathrm{F4}(12h/13, X_{t_n}, I_n) - \frac{11h}{20} \mathrm{F5}(h, X_{t_n}, I_n).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F6}(\Delta, x, y) &= \mathrm{Drift}(\mathrm{Euler}(\Delta, x) - \frac{8h}{27} \mathrm{Drift}(\mathrm{Euler}(\Delta, x)) + 2h\mathrm{F2}(h/4, \mathrm{Euler}(\Delta, x), y) \\
&- \frac{3544h}{2565} \mathrm{F3}(3h/8, \mathrm{Euler}(\Delta, x), y) + \frac{1859h}{4104} \mathrm{F4}(12h/13, \mathrm{Euler}(\Delta, x), y) \\
&- \frac{11h}{40} \mathrm{F5}(h, \mathrm{Euler}(\Delta, x), y) - \frac{8y}{27} \mathrm{Diffusion}(\mathrm{Euler}(\Delta, x)) \\
&+ 2y\mathrm{G2}(h/2, \mathrm{Euler}(\Delta, x)) - \frac{3544y}{2565} G3(3h/4, \mathrm{Euler}(\Delta, x), y) \\
&+ \frac{1859y}{4104} G4(24h/13, \mathrm{Euler}(\Delta, x), y) - \frac{11y}{40} G5(2h, \mathrm{Euler}(\Delta, x), y)) \text{ olmak üzere,}
\end{aligned}
\tag{I.14}
$$

$$f(t_n + h/2, F_6{}^n) = \mathrm{Drift}(F_6{}^n(t_n + h/2))$$
$$= \mathrm{Drift}(\mathrm{Euler}(h/2, X_{t_n}) - \frac{8h}{27}\mathrm{Drift}(\mathrm{Euler}(h/2, X_{t_n})) + 2h\mathrm{F2}(h/4, \mathrm{Euler}(h/2, X_{t_n}), I_n)$$
$$-\frac{3544h}{2565}\mathrm{F3}(3h/8, \mathrm{Euler}(h/2, X_{t_n}), I_n) + \frac{1859h}{4104}\mathrm{F4}(12h/13, \mathrm{Euler}(h/2, X_{t_n}), I_n)$$
$$-\frac{11h}{40}\mathrm{F5}(h, \mathrm{Euler}(h/2, X_{t_n}), I_n) - \frac{8I_n}{27}\mathrm{Diffusion}(\mathrm{Euler}(h/2, X_{t_n}))$$
$$+2I_n\mathrm{G2}(h/2, \mathrm{Euler}(h/2, X_{t_n})) - \frac{3544I_n}{2565}G3(3h/4, \mathrm{Euler}(h/2, X_{t_n}), I_n)$$
$$+\frac{1859I_n}{4104}G4(24h/13, \mathrm{Euler}(h/2, X_{t_n}), I_n) - \frac{11I_n}{40}G5(2h, \mathrm{Euler}(h/2, X_{t_n}), I_n))$$
$$= \mathrm{F6}(h/2, X_{t_n}, I_n).$$

$$\mathrm{G6}(\Delta, x, y) = \mathrm{Diffusion}(\mathrm{Euler}(\Delta, x) - \frac{16h}{27}\mathrm{Drift}(\mathrm{Euler}(\Delta, x))$$
$$+4h\mathrm{F2}(h/4, \mathrm{Euler}(\Delta, x), y) - \frac{7088h}{2565}\mathrm{F3}(3h/8, \mathrm{Euler}(\Delta, x), y)$$
$$+\frac{1859h}{2052}\mathrm{F4}(12h/13, \mathrm{Euler}(\Delta, x), y) - \frac{11h}{20}\mathrm{F5}(h, \mathrm{Euler}(\Delta, x), y)) \text{ olmak üzere,}$$

$$\text{(I.15)}$$

$$g(t_n + h, G_6{}^n) = \mathrm{Diffusion}(\mathrm{Euler}(h, X_{t_n}) - \frac{16h}{27}\mathrm{Drift}(\mathrm{Euler}(h, X_{t_n}))$$
$$+4h\mathrm{F2}(h/4, \mathrm{Euler}(h, X_{t_n}), I_n) - \frac{7088h}{2565}\mathrm{F3}(3h/8, \mathrm{Euler}(h, X_{t_n}), I_n)$$
$$+\frac{1859h}{2052}\mathrm{F4}(12h/13, \mathrm{Euler}(h, X_{t_n}), I_n) - \frac{11h}{20}\mathrm{F5}(h, \mathrm{Euler}(h, X_{t_n}), I_n)).$$