Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **19** (2019)021303 (343-347)
AKU J. Sci. Eng. **19** (2019) 021303 (343-347)
DOI:10.35414/akufemubid.563187

Araştırma Makalesi / Research Article

Lorentz-Minkowski Düzleminde R-Ortogonalliği Üzerine

Nilgün SÖNMEZ[1*], Abdulaziz AÇIKGÖZ[2]
[1] *Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Afyonkarahisar.*
[2] *Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Afyonkarahisar.*

**Sorumlu Yazar, e-posta: nceylan@aku.edu.tr,ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-6764-3949*
aziz@aku.edu.tr, ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-4424-4870

Geliş Tarihi: 10.05.2019; Kabul Tarihi: 23.08.2019

Anahtar kelimeler
Lorentz- Minkowski düzlemi; Lorentz norm; Ortogonal vektör; R-Ortogonallik.

Öz

Lorentz - Minkowski düzlemi (L^2 düzlemi) bir Pseudo-Öklidyen düzlemdir. Bu düzlemdeki iç çarpım Öklid düzlemindeki iç çarpımdan farklı olduğundan iç çapımla ilgili konuları çalışmak oldukça ilginçtir. Ortogonallik bu konulardan birisidir. Ortogonalliklerle ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Normlu uzaylarda tanımlanan birden fazla ortogonallik vardır. Bunlardan bazıları Roberts ortogonalliği, Birkhoff ortogonalliği ve Isosceles ortogonalliğidir. Bu ortogonalliklerin temel özellikleri arasında sadeleştirme, homojenlik, simetri ve toplamsallık özellikleri bulunmaktadır. Bu çalışmada Lorentz-Minkowski düzleminde Roberts ortogonalliğine ait (R-Ortogonallik) bu temel özellikler incelenmiştir.

On R- Orthogonality in Lorentz-Minkowski Plane

Keywords
Lorentz- Minkowski plane;Lorentz norm; Orthogonal vector;R-Orthogonality.

Abstract

Lorent-Minkowski plane is a Pseudo-Euclidean plane. Studying on the inner product topics is interesting because inner product in this plane is differentt than inner product of Euclidean plane. Orthogonality is one of these topics. There are variety of studies on orthogonality and also there are many orthogonality defined in normed space such as Roberts orthogonality, Birkhoff orthogonality and Isosceles orthogonality. Simplification, homogeneity, symmetry and additivity are basic properties of these orthogonalities. In this paper, these properties belong to Roberts orthogonality in Lorentz-Minkowski plane are investigated.

1. Giriş

Normlu uzaylarda ortogonalliklerle ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Bunlardan bazıları; James (1945), Diminnie (1983), Alonso ve Benitez (1988), Alonso et al. (2012) tarafından yapılan çalışmalardır.

Normlu uzaylarda bilinen bazı ortogonallikler; Roberts ortogonalliği, Birkhoff ortogonalliği ve Isosceles ortogonalliğidir.

Alonso et al. (2012) çalışmalarında, normlu uzaylardaki Birkhoff ve Isosceles ortogonalliklerinin ortak özelliklerini incelemişlerdir.

Lorentz-Minkowski geometrisinde iç çarpım Öklid geometrisinden farklıdır. İç çarpıma bağlı olarak Lorentz-Minkowski düzlemi üç bölgeye ayrılır: Space-like (uzaysı), time-like (zamansı) ve light-like (ışıksı,null).

Lorentz-Minkowski düzlemindeki iç çarpım Öklid düzlemindeki iç çarpımdan farklı olduğundan iç çarpımla ilgili konuların çalışılması oldukça ilginçtir.

Bu çalışmada Lorentz-Minkowski düzleminde Roberts ortogonalliğine ait (R-Ortogonallik) temel özellikler incelenmiştir.

2. Lorentz-Minkowski Düzleminde Temel Kavramlar

Tanım 2.1 Lorentz-Minkowski düzleminde (L^2), $x = (x_1, x_2) \in L^2$, $y = (y_1, y_2) \in L^2$ iki vektör olmak üzere iç çarpım,

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2$$

biçiminde tanımlanır. Bu iç çarpım bi-lineer, simetrik ve non-dejeneredir.

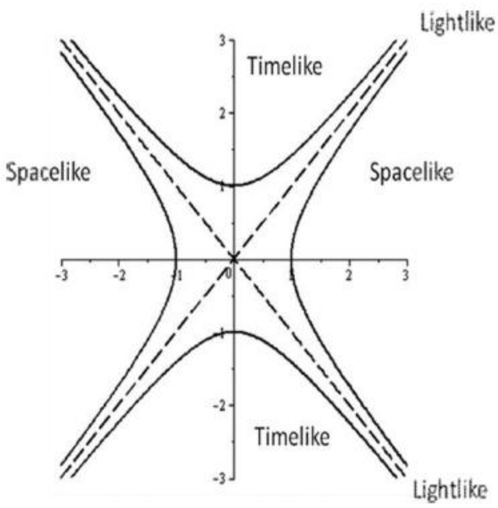
Tanım 2.2 $x = (x_1, x_2) \in L^2$ olsun . Eğer,

(i) $\langle x, x \rangle < 0$ ise x time-like vektör,

(ii) $\langle x, x \rangle > 0$ veya $x = 0$ ise x space-like vektör,

(iii) $\langle x, x \rangle = 0$ ve $x \neq 0$ ise x light-like (null) vektör,

olarak ifade edilir.



Şekil 1 : L^2 düzlemi.

Tanım 2.3 $\forall x, y \in L^2$ için, $\langle x, y \rangle = 0$ ise x ve y vektörleri Lorentz anlamında diktir (ortogonaldir) denir.

Lorentz anlamda diklik (ortogonallik) $\perp_L$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.4 $x = (x_1, x_2) \in L^2$ için x vektörünün Lorentz normu,

$$\|x\|_L = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.1 $x = (x_1, x_2) \neq 0 \in L^2$ olsun. Bu durumda,

(i) $\|x\|_L > 0$

(ii) $\|x\|_L = 0 \Leftrightarrow x$ bir null vektördür.

(iii) x bir time-like vektör $\Rightarrow$ $\|x\|_L{}^2 = -\langle x, x \rangle$ dir.

(iv) x bir space-like vektör $\Rightarrow$ $\|x\|_L{}^2 = \langle x, x \rangle$ dir (Tozak 2010).

3. Lorentz-Minkowski Düzleminde Roberts Ortogonalliğinin (R-Ortogonallik) Temel Özellikleri

Önerme 3.1 L^2 düzleminde R-ortogonalliği $\varpi \in R$, x_{LM} ve y_{LM} vektörler olmak üzere,

$$\|x_{LM} + \varpi y_{LM}\|_L = \|x_{LM} - \varpi y_{LM}\|_L$$

dir.

İspat: $x_{LM} \perp_L y_{LM}$ olduğundan $\langle x_{LM}, y_{LM} \rangle = 0$.

$$\|x_{LM} + \varpi y_{LM}\|_L{}^2 = |\langle x_{LM} + \varpi y_{LM}, x_{LM} + \varpi y_{LM} \rangle|$$
$$= |\langle x_{LM}, x_{LM} \rangle + 2\varpi \langle x_{LM}, y_{LM} \rangle + \varpi^2 \langle y_{LM}, y_{LM} \rangle|$$
$$= |\langle x_{LM}, x_{LM} \rangle + \varpi^2 \langle y_{LM}, y_{LM} \rangle| \quad (1)$$

ve

$$\|x_{LM} - \varpi y_{LM}\|_L{}^2 = |\langle x_{LM} - \varpi y_{LM}, x_{LM} - \varpi y_{LM} \rangle|$$
$$= |\langle x_{LM}, x_{LM} \rangle - 2\varpi \langle x_{LM}, y_{LM} \rangle + \varpi^2 \langle y_{LM}, y_{LM} \rangle|$$
$$= |\langle x_{LM}, x_{LM} \rangle + \varpi^2 \langle y_{LM}, y_{LM} \rangle| \quad (2)$$

olur. (1) ve (2) den,

$$\|x_{LM} + \varpi y_{LM}\|_L = \|x_{LM} - \varpi y_{LM}\|_L$$

bulunur.

Örnek 3.1 L^2 düzleminde $x_{LM}=(1,2)$, $y_{LM}=(2,1)$ vektörlerinin Lorentz anlamda dik olduğunu ve R-ortogonalliğinin sağlandığını gösteriniz.

$\langle x_{LM},y_{LM}\rangle=-2+2=0$ olduğundan bu iki vektör Lorentz anlamda diktir.

$$\begin{aligned}\|x_{LM}+\varpi y_{LM}\|_L^{\,2} &= |\langle x_{LM},x_{LM}\rangle+\varpi^2\langle y_{LM},y_{LM}\rangle| \\ &= |-1+4+\varpi^2(-4+1)| \\ &= |3-3\varpi^2| \\ &= \|x_{LM}-\varpi y_{LM}\|_L^{\,2}\end{aligned}$$

olup R-ortogonalliği sağlanır.

Aşağıda L^2 düzleminde Lorentz normu kullanılarak, R-ortogonalliğinin özellikleri incelenmiştir.

(i) **Sadeleştirme:** $x_{LM}\perp_L y_{LM}\Rightarrow \beta x_{LM}\perp_L \beta y_{LM}$, $(\beta\in R)$.

$$\begin{aligned}&\|\beta x_{LM}+\varpi\beta y_{LM}\|_L^{\,2} \\ &= |\langle \beta x_{LM}+\varpi\beta y_{LM},\beta x_{LM}+\varpi\beta y_{LM}\rangle| \\ &= |\beta^2||\langle x_{LM},x_{LM}\rangle+2\varpi\langle x_{LM},y_{LM}\rangle \\ &\qquad +\varpi^2\langle y_{LM},y_{LM}\rangle| \\ &= |\beta^2||\langle x_{LM},x_{LM}\rangle+\varpi^2\langle y_{LM},y_{LM}\rangle| \\ &= |\beta^2||\langle x_{LM},x_{LM}\rangle-2\varpi\langle x_{LM},y_{LM}\rangle \\ &\qquad +\varpi^2\langle y_{LM},y_{LM}\rangle| \\ &= |\beta^2\langle x_{LM},x_{LM}\rangle-2\beta^2\varpi\langle x_{LM},y_{LM}\rangle \\ &\qquad +\beta^2\varpi^2\langle y_{LM},y_{LM}\rangle| \\ &= |\langle \beta x_{LM}-\varpi\beta y_{LM},\beta x_{LM}-\varpi\beta y_{LM}\rangle| \\ &= \|\beta x_{LM}-\varpi\beta y_{LM}\|_L^{\,2}\end{aligned}$$

dir. Buradan, $\beta x_{LM}\perp_L \beta y_{LM}$ olup, sadeleştirme özelliği vardır.

(ii) **Homojenlik:** $x_{LM}\perp_L y_{LM}\Rightarrow \beta x_{LM}\perp_L \mu y_{LM}$ $(\beta,\mu\in R)$.

$$\begin{aligned}&\|\beta x_{LM}+\varpi\mu y_{LM}\|_L^{\,2} \\ &= |\langle \beta x_{LM}+\varpi\mu y_{LM},\beta x_{LM}+\varpi\mu y_{LM}\rangle| \\ &= |\beta^2\langle x_{LM},x_{LM}\rangle+2\varpi\beta\mu\langle x_{LM},y_{LM}\rangle \\ &\qquad +\varpi^2\mu^2\langle y_{LM},y_{LM}\rangle| \\ &= |\beta^2\langle x_{LM},x_{LM}\rangle+\varpi^2\mu^2\langle y_{LM},y_{LM}\rangle| \\ &= |\beta^2\langle x_{LM},x_{LM}\rangle-2\varpi\beta\mu\langle x_{LM},y_{LM}\rangle \\ &\qquad +\varpi^2\mu^2\langle y_{LM},y_{LM}\rangle| \\ &= |\langle \beta x_{LM}-\varpi\mu y_{LM},\beta x_{LM}-\varpi\mu y_{LM}\rangle| \\ &= \|\beta x_{LM}-\varpi\mu y_{LM}\|_L^{\,2}\end{aligned}$$

ve $\beta x_{LM}\perp_L \mu y_{LM}$ dir. Bu nedenle homojenlik özelliği sağlanır.

(iii) **Simetri :**

$x_{LM}\perp_L y_{LM}\Rightarrow y_{LM}\perp_L x_{LM}$.

$$\begin{aligned}&\|x_{LM}+\varpi y_{LM}\|_L^{\,2} \\ &= |\langle x_{LM}+\varpi y_{LM},x_{LM}+\varpi y_{LM}\rangle| \\ &= |\langle x_{LM},x_{LM}\rangle+2\varpi\langle x_{LM},y_{LM}\rangle \\ &\qquad +\varpi^2\langle y_{LM},y_{LM}\rangle| \\ &= |\langle x_{LM},x_{LM}\rangle+\varpi^2\langle y_{LM},y_{LM}\rangle| \\ &= |\varpi^2|\left|\frac{1}{\varpi^2}\langle x_{LM},x_{LM}\rangle+\langle y_{LM},y_{LM}\rangle\right|\end{aligned}$$

$\frac{1}{\varpi}=\varsigma\in R$ olsun.

$$\begin{aligned}&\|x_{LM}+\varpi y_{LM}\|_L^{\,2} \\ &= \left|\frac{1}{\varsigma^2}\right| |\langle y_{LM},y_{LM}\rangle+\varsigma^2\langle x_{LM},x_{LM}\rangle| \\ &= \left|\frac{1}{\varsigma^2}\right| \|y_{LM}+\varsigma x_{LM}\|_L^{\,2} \qquad (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\|x_{LM}-\varpi y_L\|_L^{\,2} \\ &= |\langle x_{LM}-\varpi y_{LM},x_{LM}-\varpi y_{LM}\rangle| \\ &= |\langle x_{LM},x_{LM}\rangle-2\varpi\langle x_{LM},y_{LM}\rangle \\ &\qquad +\varpi^2\langle y_{LM},y_{LM}\rangle| \\ &= |\langle x_{LM},x_{LM}\rangle+\varpi^2\langle y_{LM},y_{LM}\rangle| \\ &= |\varpi^2|\left|\frac{1}{\varpi^2}\langle x_{LM},x_{LM}\rangle+\langle y_{LM},y_{LM}\rangle\right|\end{aligned}$$

$$= \left|\frac{1}{ς^2}\right| |\langle y_{LM}, y_{LM}\rangle + ς^2\langle x_{LM}, x_{LM}\rangle|$$

$$= \left|\frac{1}{ς^2}\right| \|y_{LM} - ςx_{LM}\|_L{}^2 \qquad (4)$$

$x_{LM} \perp_L y_{LM}$ den dolayı,

$$\|x_{LM} + \varpi y_{LM}\|_L = \|x_{LM} - \varpi y_{LM}\|_L$$

dır.

Ayrıca (3) ve (4) den,

$$\left|\frac{1}{ς^2}\right| \|y_{LM} + ςx_{LM}\|_L = \left|\frac{1}{ς^2}\right| \|y_{LM} - ςx_{LM}\|_L ,$$

$$\|y_{LM} + ςx_{LM}\|_L = \|y_{LM} - ςx_{LM}\|_L$$

olur. O halde $y_{LM} \perp_L x_{LM}$ dir. Böylece simetri özelliği vardır.

(iv) **Toplamsallık:**

a) *Sağ Toplamsallık* : $x_{LM} \perp_L y_{LM}$ ve $x_{LM} \perp_L z_{LM} \Rightarrow x_{LM} \perp_L (y_{LM} + z_{LM})$ dir.

$x_{LM} \perp_L y_{LM} \Rightarrow$

$$\|x_{LM} + \varpi y_{LM}\|_L = \|x_{LM} - \varpi y_{LM}\|_L$$

ve

$x_{LM} \perp_L z_{LM} \Rightarrow$

$$\|x_{LM} + \varpi z_{LM}\|_L = \|x_{LM} - \varpi z_{LM}\|_L$$

dir.

Buradan,

$$\|x_{LM} + \varpi(y_{LM} + z_{LM})\|_L{}^2$$

$$= |\langle x_{LM} + \varpi(y_{LM} + z_{LM}), x_{LM} + \varpi(y_{LM} + z_{LM})\rangle|$$

$$= |\langle x_{LM}, x_{LM}\rangle + 2\varpi\langle x_{LM}, (y_{LM} + z_{LM})\rangle + \varpi^2\langle y_{LM} + z_{LM}, y_{LM} + z_{LM}\rangle|$$

$$= |\langle x_{LM}, x_{LM}\rangle + \varpi^2\langle y_{LM} + z_{LM}, y_{LM} + z_{LM}\rangle|$$

$$= |\langle x_{LM}, x_{LM}\rangle - 2\varpi\langle x_{LM}, (y_{LM} + z_{LM})\rangle + \varpi^2\langle y_{LM} + z_{LM}, y_{LM} + z_{LM}\rangle|$$

$$= \|x_{LM} - \varpi(y_{LM} + z_{LM})\|_L{}^2$$

dir. O halde $x_{LM} \perp_L y_{LM}$ ve $x_{LM} \perp_L z_{LM} \Rightarrow x_{LM} \perp_L (y_{LM} + z_{LM})$ olup, sağ toplamsallık sağlanmış olur.

b) *Sol Toplamsallık* : $y_{LM} \perp_L x_{LM}$ ve $z_{LM} \perp_L x_{LM} \Rightarrow (y_{LM} + z_{LM}) \perp_L x_{LM}$ dir.

$y_{LM} \perp_L x_{LM} \Rightarrow$

$$\|y_{LM} + \varpi x_{LM}\|_L = \|y_{LM} - \varpi x_{LM}\|_L$$

ve

$z_{LM} \perp_L x_{LM} \Rightarrow$

$$\|z_{LM} + \varpi x_{LM}\|_L = \|z_{LM} - \varpi x_{LM}\|_L$$

dir.

Buradan,

$$\|(y_{LM} + z_{LM}) + \varpi x_{LM}\|_L{}^2$$

$$= |\langle (y_{LM} + z_{LM}) + \varpi x_{LM}, (y_{LM} + z_{LM}) + \varpi x_{LM}\rangle|$$

$$= |\langle y_{LM} + z_{LM}, y_{LM} + z_{LM}\rangle + 2\varpi\langle y_{LM} + z_{LM}, x_{LM}\rangle + \varpi^2\langle x_{LM}, x_{LM}\rangle|$$

$$= |\langle y_{LM} + z_{LM}, y_{LM} + z_{LM}\rangle + \varpi^2\langle x_{LM}, x_{LM}\rangle|$$

$$= |\langle y_{LM} + z_{LM}, y_{LM} + z_{LM}\rangle - 2\varpi\langle y_{LM} + z_{LM}, x_{LM}\rangle + \varpi^2\langle x_{LM}, x_{LM}\rangle|$$

$$= \|(y_{LM} + z_{LM}) - \varpi x_{LM}\|_L{}^2.$$

$y_{LM} \perp_L x_{LM}$ve $z_{LM} \perp_L x_{LM} \Rightarrow$ $(y_{LM} + z_{LM}) \perp_L x_{LM}$ olup, sol toplamsallık sağlanmış olur.

4. Sonuç

Bu çalışmada Lorentz-Minkowski düzleminde Roberts ortogonalliğinin (R-Ortogonallik) sadeleştirme, homojenlik, simetri ve toplamsallık özelliklerinin sağlandığı gösterilmiştir.

5. Kaynaklar

Alonso, J., Martini, H., Wu, S. (2012). On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces. *Aequationes Mathematicae,* **83**, 153-189.

Alonso, J., Benitez, C. (1988). Orthogonality in normed linear spaces: A survey. Part I: Main Properties, *Extracta Mathematicae,* **3 (1)**, 1-15.

Diminnie, C. R. (1983). A new orthogonality relation for normed linear spaces. *Mathematische Nachrichten,* **114 (1)**,197-203.

James, R. C. (1945). Orthogonality in normed linear spaces. *Duke Mathematical journal,* **12 (2)**, 291-302.

Tozak, H. (2010). Minkowski 4-uzayında eğriler ve hareketlerin geometrisi. Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Denizli, 103.