NAKLİYE PROBLEMİ
(Minimum Toplam Giderle Nakliye)

Doç. Dr. Suat MİRZA

Son 15-20 yıldır, işletmelerin karşılaştıkları çeşitli ve önemli problemlerin daha çabuk, daha kolay ve daha sıhhatli olarak çözümlenmesi için matematikçi ve istatistikçilerin yaptıkları çalışmalar, ortaya çok sayıda çözüm şekilleri çıkarmıştır. Bu çözüm şekilleri genellikle lineer programlama olarak bilinirler.

Lineer programlamanın özel bir çeşidi olan nakliye problemi, belirli arz noktalarındaki eşyaların, belirli talep noktalarına gönderilmesinde toplam nakliye gideri, toplam yol veya toplam zaman bakımından minimum (optimal) çözümlemeyi sağlayan bir metotdur.

Nakliye problemi II. Dünya Harbinde askeri kuvvetlerce geniş bir şekilde uygulanarak geliştirilmiş ve bundan sonra da diğer sahalarda da geniş uygulama bulmuştur.

I. NAKLİYE PROBLERİNİN ESASLARI

Nakliye probleminde çözüme esas olan veriler şunlardır :

1. Belirli sayıda arz noktaları ve her arz noktasında belirli sayıda eşya miktarı bulunmaktadır :

Arz noktaları	Arz miktarları
I	a_1
II	a_2
.	.
.	.
.	.
m	a_m

2. Belirli sayıda ,talep noktaları ve her talep noktasında belirli sayıda talep miktarı vardır :

Talep noktaları	**Talep miktarları**
1	b_1
2	b_2
.	.
.	.
.	.
n	b_n

3. Her arz noktası ile her talep noktasını birleştiren bir yol şebekesi ve bununla ilgili olarak arz ve talep noktalarını birleştiren yollar için gider, zaman, veya uzunluk değerleri (c_{ij}) vardır (Tablo I).

Talep noktaları

Arz noktaları	1	2	3	....	n
I	C_{11}	C_{12}	C_{13}	....	C_{1n}
II	C_{21}	C_{22}	C_{23}	....	C_{2n}
III	C_{31}	C_{32}	C_{33}	....	C_{3n}
⋮	⋮	⋮	⋮	C_{ij}	⋮
m	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}		C_{mn}

TABLO I. Arz ve talep noktaları arası gider, zaman veya uzunluk değerleri.

Tablo I bir birim eşyanın arz noktalarından talep noktalarına nakli için gerekli gider, zaman veya yol uzunluğunu (c_{ij}) göstermektedir. m sayıda arz ve n sayıda talep noktaları bulunduğuna göre, mxn sayıda c_{ij} değeri vardır.

Nakliye probleminin uygulanabilmesi için, şu iki şartın varolması gereklidir :

1. $a_i \geqq O$, $b_j \geqq O$, $c_{ij} \geqq O$

Bu şart, işleme giren, her arz noktasında arza hazır eşya bulunmasını, her talep noktasının talepte bulunmasını ve arz ve talep noktaları arası c_{ij} değerinin sıfır veya daha büyük olmasının gerekli olduğunu gösterir.

2. Herhangi bir yolla bulunacak çözüme göre, her arz noktalarından talep noktalarına gönderilecek eşya sayıları x_{ij} ile gösterildiğinde;

$$(1) \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad j = 1, \ldots\ldots, n$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j . \qquad i = 1, \ldots\ldots, m$$

olmalıdır. Bu şart da, herhangi bir arz noktasınca gönderilen eşya sayısının o noktadaki eşya sayısından (a_i) ve herhangi bir talep noktasına gönderilen eşya sayısının da o noktanın talep sayısından (b_j) fazla olamıyacağını gösterir.

Yukarıdaki iki şart dışında, toplam arzın toplam talebe eşit olması gereklidir yani,

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{m} a_j = \sum_{j=1}^{n} b_i$$

olmalıdır. Bu durum gerçekleşmediğinde işleme suni bir arz veya talep noktası eklenmelidir. Eklenecek suni arz veya talep noktasına uygulanacak c_{ij} değerleri gerçek c_{ij} değerlerinden daha büyük olmalıdır. Bulunacak optimal çözümden sonra, suni arz vefa talep noktası işlem dışı bırakılarak netice elde olunur.

Nakiye problemlerinden arzulanan gaye, bulunacak çözümün minimum (optimal) olması yani,

$$(4) \quad H(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \, x_{ij}$$

ifadesinin minimum olmasıdır.

II. NAKLİYE PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Az sayıda arz ve talep noktalarının bulunduğunda problem deneme yolu ile çözümlenebilir. Çok sayıda arz ve talep noktalarının bulunduğu bir problemde ise, deneme yolu ile sonuca ulaşmak (optimal çözümü bulmak) çok güçtür ve çok zaman kaybını gerektirir. Böyle problemlerin çözümlenmesinde kullanılan çeşitli metotlar vardır. Bu metotlardan biri de, «Dantzig Metodu» dur. Burada bu metodun nasıl uygulandığı bir örnekle beraber ele alınarak yürütülecektir. Örnek olarak Tablo II alınacaktır.

Talep noktaları

Arz noktaları	1	2	3	4	5	6	7	Arz
I	6	8	11	7	8	10	11	178
II	8	9	7	6	9	12	11	105
III	12	10	10	8	6	9	9	122
IV	7	9	11	12	10	9	10	95
Talep	88	60	77	80	75	90	30	

TABLO II. Noktalar, noktalar arası gider ile arz ve talep miktarları.

Metodun uygulanmasına önce arz ve talep noktalarını gösteren bir tablodan *1,2 ve 3 numaralı eşitlikleri bozmaksızın bulunacak bir çözümle başlanır.* (Tablo II) Bulunan bu çözüme «uygun çözüm - feasible solution» denir (Tablo III).

Bir uygun çözüm en basit olarak şu şekilde elde olunabilir. a_i ve b_j değerlerini ihtiva eden mxn'lik bir tablo çizilir. Tablonun sol üst köşesinden başlanarak (I,1) hücresine azami sayıda eşya

Talep noktaları

Arz noktaları	1	2	3	4	5	9	7	Arz
I	88	60	30					178
II			47	58				105
III				22	75	25		122
IV						65	30	95
Talep	88	60	77	80	75	90	88	

TABLO III. Uygun çözüm.

gönderilmesi (x_{11}) yapılır. Bu yolda devam olunarak sırasiyle her satırdaki arz miktarlarının gönderilmesi sağlanır. Böylece taleplerin karşılanmasıyla uygun çözüme ulaşılmış olur (Tablo III).

Uygun bir çözümün elde olunmasında daha iyi bir yol da şudur (1) : c_{ij}, a_i ve b_j değerlerini ihtiva eden bir tablo düzenlenir ve bu tablodaki her satır ve sütun ayrı ayrı ele alınarak en küçük c_{ij} ve ondan sonraki en küçük c_{ij} değerleri arasındaki farklar (e_{ai} veya e_{bi}) bulunarak ilgili bulunduğu satır veya sütunun sonuna yazılır. İlk eşya gönderilmesi en yüksek e_{ai} veya en yüksek e_{bi} değerinin bulunduğu satır veya sütundaki en düşük c_{ij} değerinin bulunduğu hücreye azami sayıda yapılır (2). Bu işlem yapıldıktan sonra arzı veya talebi sıfır olan satır ve sütun (satır veya sütun) işlem dışı bırakılarak yeniden, e_{ai} ve e_{bj} değerlerinin hesaplanmasına geçilir. Bu yoldaki işleme uygun bir çözüme ulaşılıncaya kadar devam olunur.

Hangi yolla elde olunursa olunsun bulunacak bir uygun çözümün en düşük değer olup olmadığının araştırılması gereklidir. Bunun için aşağıdaki test yapılır.

(1) Bu yol optimum çözüme daha kısa yoldan ulaşmayı sağlar.

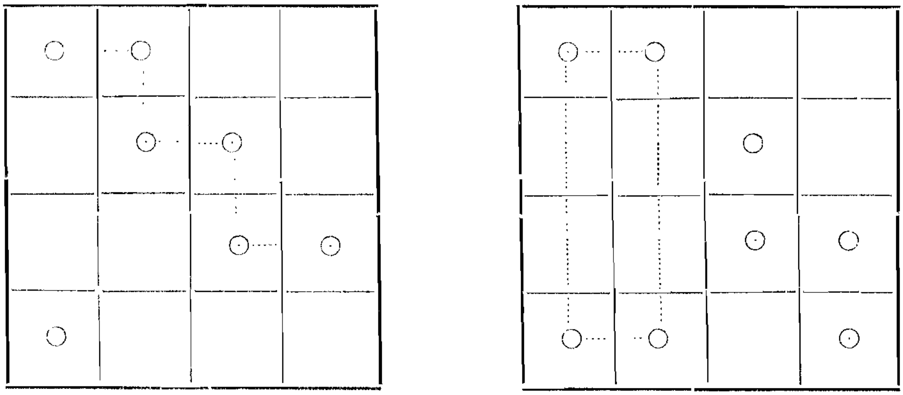
(2) Birden fazla sayıda en düşük c_{ij} değeri bulunursa, çok sayıda eşya gönderilmesine imkân sağlıyanı seçilir.

III. UYGUN ÇÖZÜME TEST UYGULANMASI VE MİNİMUM (OPTİMUM) ÇÖZÜMÜN BULUNMASI

Testin uygulanabilmesi için ele alınan bir uygun ççözümde şu iki şartın var olması gereklidir :

1. Uygun çözüm tablosunda m + n — 1 sayıda hücre işgal edilmiş olmalıdır.
2. İşgal edilmiş hücreler açık devre durumunda olmalıdır.

Eğer uygun bir çözümde m + n — 1 sayıda hücre işgal edilmemişse, testin uygulanabilmesi için dolu hücrelerden boş hücrelere aktarmalar yapmak suretile m + n — 1 sayıda hücrenin işgal edilmiş olması sağlanabilir. Diğer taraftan m + n — 1 tane dolu hücrenin açık devre durumunda bulunması gereklidir. Açık ve kapalı devre durumları Şekil I'de gösterilmiştir. m + n — 1 sayıda



a) Açık devre b) Kapalı devre

ŞEKİL I. Açık ve kapalı devre durumları.

dolu hücreli bir uygun çözüm kapalı devre durumunda ise, dolu hücrelerden boş hücrelere aktarmalar yapmak sureti ile bir açık devre durumu elde olunabilir.

Teste elverişli bir uygun çözüme test şu şekilde uygulanılır. Tablo III teste elverişli bir uygun çözümdür ve toplam gider 3751 dir.

1. Uygun çözüm tablosunun sağına bir u_i sütunu ve altına bir v_j satırı eklenir.

2. Herhangi bir u_i veya v_j değeri sıfır kabul olunur. Sıfır kabul edilen satır veya sütundan başlamak üzere ve dolu hücreleri nazarı itibare alarak

(5) $c_{rs} = u_r + v_s$

şartını gerçekleyen m + n sayıda u_i ve v_j değerleri hesaplanır. Örneğimiz için bu değerler Tablo IV'de görülmektedir.

								U_i
	6	8	11					0
			7	6				— 4
				8	6	9		— 2
						9	10	— 2
V_j	6	8	11	10	8	11	12	

TABLO IV. u_i ve v_j değerlerinin bulunması.

3. Bulunan u_i ve v_j değerlerinden yararlanarak her boş hücre

(6) $u_i + v_j$

değerleri ile doldurulur (Örneğimiz için Tablo V.).

								U_i
	•	•	•	10	8	11	12	0
	2	4	•	•	4	7	8	— 4
	4	6	9	•	•	•	10	— 2
	4	6	9	8	6	•	•	— 2
v_j	6	8	11	10	8	11	12	

TABLO V. u_i + v_j değerleri.

4. Boş hücreler için

(7) $\Delta_{rs} = c_{rs} - (u_r \; v_s) \quad)$

değerleri hesaplanır. (Tablo VI)

•	•	•	— 3	0	— 1	— 1
6	5	•	•	5	5	3
8	4	1	•	•	•	— 1
3	3	2	4	4	•	•

TABLO VI. $\Delta_{rs} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ **değerleri.**

5. Δ_{rs} değerleri içinde negatif veya sıfır olan hücre olup olmadığı araştırılır. Hiçbir negatif veya sıfır değeri ile karşılaşılmazsa çözüm optimaldir. Eğer negatif değer bulunmayıp sıfır değeri var ise, çözüm optimal olmakla beraber değişik tertipte optimal çözümler de vardır. Negatif değer veya değerler var ise çözüm optimal değildir. Tablo VI'da görüldüğü gibi örneğimiz için (I, 4), (I, 6), (I, 7) ve (III, 7) hücrelerinde negatif Δ_{rs} bulunmaktadır. Böyle durumda optimal çözümü bulmak için şu şekilde işleme devam olunur [(3)] :

En büyük negatif Δ_{rs} değerinin bulunduğu hücreye (örneğimiz için Tablo VI'deki (I,4) hücresidir), bu hücrenin teşkil edeceği kapalı devre içinde ve hücreler arası azami sayıda eşya nakli yapılır (Örneğimiz için negatif Δ_{rs} değerinin bulunduğu (I,4 hücresi, (I,3), (II,3) ve (II,4) hücreleri ile kapalı devre teşkil etmektedir ve bu hücreler arası kaydırılabilecek eşya sayısı 30 birimdir (Tablo VII).

---

(3) Herhangi bir hücre için Δ_{rs} değerinin negatif olması o hücreden eşya gönderilmemesi sebebi ile bir birim eşya için karşılaşılan zararı gösterir.

88	60	30—X	X			
		47+X	58—X			
			22	75	25	
					65	30

TABLO VII. Negatif Δ_{rs} hücresi ile kapalı devre ve eşya kaydırması.

Kapalı devreyi teşkil eden hücreler arasında gerekli eşya kaydırılmaları yapıldıktan sonra, Tablo VIII'de görülen yeni bir uygun çözüm elde olunur. Bu yeni çözüm için toplam gider 3661 dir.

88	60		30				178
		77	28				105
			22	75	25		122
					65	30	95
88	60	77	80	75	90	30	

TABLO VIII. Yeni bir uygun çözüm.

Tablo VIII'e de test uygulanırsa, Δ_{rs} değerleri olarak Tablo IX elde olunur. Bu tabloda da (III,7) hücresinde negatif değer bulunmaktadır. Demek ki, çözüm gene optimal değildir.

•	•	5	•	3	2	2
1	0	•	•	3	3	1
5	1	3	•	•	•	$\langle -1 \rangle$
0	0	4	4	4	•	•

TABLO IX. $\Delta_{rs} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ **değerleri.**

Negatif değer bulunan (III,7) hücresine teşkil ettiği kapalı devre içinde azami kaydırma yapılarak, yeni bir uygun çözüm elde olunur (Tablo X). Bu yeni uygun çözüme test uygulanırsa, negatif Δ_{rs} değeri ile karşılaşılmaz. Bu durum çözümün optimal olduğunu gösterir ve minimum toplam gider 3636 dır.

	1	2	3	4	5	6	7	Arz
I	88	60		30				178
II			77	28				105
III				22	75		25	122
IV						90	5	95
Talep	88	60	77	80	75	90	30	

TABLO X. Optimal çözüm.