



Öbek Eşzamanlılığın Nedensellik Entropisi ile Belirlenmesi Detection of Cluster Synchronization via Causation Entropy

Özge Canlı^{1*}, Serkan Günel¹

¹ Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği, İzmir, TÜRKİYE
Sorumlu Yazar / Corresponding Author *: ozge.canli@deu.edu.tr

Geliş Tarihi / Received: 26.02.2019

Kabul Tarihi / Accepted: 22.07.2019

Araştırma Makalesi/Research Article

DOI:10.21205/deufmd.2019216330

Atıf şekli/How to cite: CANLI, O., GUNEL, S., (2019), Öbek Eşzamanlılığın Nedensellik Entropisi ile Belirlenmesi, DEUFMD, 21(63), 1027-1036.

Öz

Kaotik sistemler birbirine durum değişkenleri üzerinden bağlandığında uygun şartlarda öbek eşzamanlılığı gerçekleştirebileceği bilinmektedir. Bu çalışmada, sürekli zamanlı sistemlerden oluşan böyle bir ağda örneklenmiş gözlem vektörleri kullanılarak ağın içindeki öbeklerin belirlenmesi problemi ele alınmıştır. Ek olarak; ağ içerisinde bağlantı şiddetinin değişmesi sonucu yeni öbekler oluşsa bile öbeklerin doğru şekilde belirlenebileceği gösterilmiştir. Öbek eşzamanlılığın belirlenmesi için ağı oluşturan düğümlerin çıkışlarından alınan gözlemler kullanılarak nedensellik entropisi ölçüsü kestirimi yapılmıştır. Bu ölçünün eşzamanlı öbekler oluşturan sistemleri etkin olarak ayırtılabildiği gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Eşzamanlılık, Bilgi kuramı, Nedensellik entropisi, Öbek eşzamanlılığı

Abstract

When chaotic systems are coupled to each other through state variables, the cluster synchronization can occur under suitable conditions. In this study, the problem of detection of cluster synchronization by using observation samples has been investigated in a coupled continuous time chaotic network. Additionally, it has been shown that the clusters can be determined even if the network forms new clusters in case of the changing coupling strengths. To detect cluster synchronization, the causation entropy has been estimated by using observation vectors obtained from the outputs of the nodes of the network. It has been observed that this measure can effectively distinguish the systems forming clusters of synchronization in the network.

Keywords: Synchronization, Information theory, Causation entropy, Cluster synchronization

1. Giriş

Kaotik sistemlerin karakteristik özelliği başlangıç koşullarına hassas bağımlılıktır. Bunun sonucu olarak özdeş kaotik sistemlerin kararlı olan çözümleri yeterince uzun süre sonra birbirine çok yakın başlangıç koşulları için bile ayrışır [1]. Öte yandan, birbirine bağlanan özdeş kaotik sistemlerin farklı başlangıç koşulları için sisteme özel koşullar altında aynı anda aynı davranışı gösterebildiği bilinmektedir [2].

Kaotik sistemlerde eşzamanlılık son çeyrek yüzyılda detaylı olarak çalışılmıştır [3], [4]. Kaotik sistemlerin eşzamanlılığı güvenli iletişim sistemlerinin tasarımı [5], karmaşık biyolojik sistemleri modellenmesi [6] gibi alanlarda kullanılmıştır. Eşzamanlılık kavramı; enerji iletişim şebekelerini, sosyal ağları, hüresel ve metabolik yapılardan oluşan karmaşık ağları modellemek için kullanılabilir [29]. Eşzamanlılık gösteren biyolojik sinir ağlarından esinlenerek tasarlanan dinamik yapay ağların davranışlarını

inceleyebilmek de önem arz etmektedir. Ağ içerisindeki eşzamanlı sistemlerin birbiriyle bağlı olup olmadıklarını, bağlular ise aralarındaki bağlantı şiddetlerini, nasıl etkileşim gösterdiklerini ve ağıın öbeklerini tespit etmek bu nedenle önemli bir problemdir.

Literatürde, farklı eşzamanlılık çeşitleri incelenmiştir. Birbirine bağlanmış kaotik sistemlerden oluşan bir ağda, ağıın içindeki tüm sistemlerin başlangıç koşullarından bağımsız olacak şekilde asimptotik olarak aynı kaotik yörüngeyi takip etmesi durumuna tam eşzamanlılık denir [2]. Faz eşzamanlılığında, ağdaki düğümlerin fazları arasında kesirsel bir ilişki vardır [7]. Ağıın içindeki bir düğüm diğer düğüm ile genlik ve faz olarak eşzamanlı ise ancak aralarında bir gecikme varsa gecikmeli eşzamanlılık söz konusudur [8]. Ağ içerisinde birden fazla öbek varsa ve bir grup içindeki sistemler aynı davranışı gösterirken diğer gruplar farklı davranışa sahip ise öbek (küme, grup) eşzamanlılığı gerçekleşir [9]. Tüm bu durumlarda ağların hangi koşullarda eşzamanlı olacağı güncel inceleme konusudur [10]-[13].

Seçilen bir kaotik ağıın eşzamanlılık şartları, genellikle Lyapunov yöntemi kullanılarak saptanır[14]-[19]. Birbirine bağlanmış özdeş sistemlerin eşzamanlılığı [14], öbek eşzamanlılığı [15] ve birbirine çift yönlü asimmetrik şiddette bağlanmış sistemlerin kararlılığı ve eşzamanlılığı literatürde incelenmiştir [16]. Ayrıca, iki ve üç boyutlu sistemlerin öbek eşzamanlılığı sağlama koşulları Belykh ve arkadaşları tarafından detaylıca çalışılmıştır [17]. Rasgele bağlantılı ağlarda öbek eşzamanlılığın hangi şartlarda gerçekleşeceği tartışılmıştır [18]. Lu ve arkadaşları ise, özdeş olmayan sistemlerin eşzamanlılığına odaklanmıştır [19].

Farklı ölçüler kullanılarak kaotik ağların tam eşzamanlılığın tespit edilmesi daha önce incelenmiştir. Çapraz ilinti, ortak bilgi ölçüsü, sistemlerin faz bilgisi yardımıyla elde edilen Hilbert fazı dairesel varyansı ve dalgacık dönüşümü fazı dairesel varyansı gibi ölçüler kestirilmiştir. Bu ölçülerin farklı gürültü ve bağlantı şiddetlerinde iki düğümünden oluşmuş tek yönlü birbirini süren üç farklı ağda, eşzamanlılığı tespit edip edemeyeceği incelenmiştir [20]. Yapılan bir diğer çalışmada, Palus ve arkadaşları kaba bilgi hızı ölçüsünü önermiştir. İki sistemden oluşan tek yönlü birbirini süren ayrık zamanlı kaotik bir ağda ve EEG sinyallerinde bu

ölçünün tam eşzamanlılığı tespit ettiği gösterilmiştir [21].

Eşzamanlılığın bilgi kuramı ölçülerini kestirerek saptanması, Bollt ve arkadaşlarının çalışmasında öne sürülmüştür ve ayrık zamanlı birbirine bağlanmış iki kaotik sistem tam eşzamanlı olduğunda bilgi ölçülerinin nasıl değiştiği incelenmiştir. Sistemler tam eşzamanlı olduğunda, ortak bilgi ölçüsünün sistemlerden birinin entropisine eşit olacağı, iki sistem birbirinden bağımsız olduğunda ise ortak bilgi ölçüsünün sıfır olacağı gösterilmiştir [22]. Ayrıca aktarım entropisi ölçüsünün sistemler tam eşzamanlı ise sıfır olacağı gözlenmiştir. Birbirine bağlanmış ayrık zamanlı ikiden fazla düğümünden oluşan bir ağda bilgi akışını ölçmek için nedensellik entropisi kavramı ortaya atılmıştır. Tam eşzamanlı olmayan bir ağdaki düğümlerin doğrudan bağlı olup olmadığı tespit edilmeye çalışılmıştır [23]. Literatürde var olan çalışmalarda, az sayıda düğüm içeren ayrık zamanlı tam eşzamanlılık gösteren ağlarda eşzamanlılığın tespiti bilgi kuramı ölçüleri kestirilerek saptanmıştır. Nedensellik entropisi kestirilerek yapılan çalışmada ise, sadece tam eşzamanlılık gösteren ağlarda düğümlerin doğrudan ya da dolaylı olarak bağlantılı olmasının bilgi ölçüsü kestirilerek saptanması incelenmiştir. Ancak, sürekli zamanlı sistemlerden oluşan bir ağda öbek eşzamanlılığın bilgi ölçüleri ile saptanması şimdiye dek araştırılmamıştır.

Bu makalede, kaotik bir ağa ait sürekli hal sistemlerin oluşturduğu eşzamanlı öbeklerin tespiti problemi, nedensellik entropisi kestirimi ile incelenmiştir. Ayrıca ağdaki sistemlerin öbeklerinin değişmesi anının nedensellik entropisi ile tespit edilebileceği ilk kez gösterilmiştir. Sürekli zamanlı sistemlerde entropi kestirimi için, genellikle sonlu sayıdaki ardışıl gözlem vektörleri kullanılarak kestirilen k-en yakın komşuluklu entropi yöntemi kullanılır [24]. Sürekli zamanlı kaotik sistemlerde ise, ardışıl gözlem vektörleri önce Takens gömme teoremine göre örneklerin [25]. Örneklenen çıkışlardan oluşturulan yeni durum uzayında entropi ve benzeri ölçüler kestirilir. Bu çalışmada nedensellik entropisi k-en yakın komşuluklu entropi yöntemiyle kestirilecektir. Ağdaki özdeş sürekli sistemlerin tek bir çıkış üzerinden gözlemlendiği varsayılmaktadır. Ağ bağlantı şiddetlerinin değişmesi sonucu eşzamanlı öbeklerin yeniden gruplanmasının bu ölçünün kestirimi ile takip edilebileceği gösterilmiştir.

2. Öbek Eşzamanlılığın Belirlenmesi

N düğümlü özdeş sistemlerden oluşan kaotik bir ağ,

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = f(\mathbf{x}_i(t)) + \sum_{j=1}^N \epsilon_{ij}(t) \mathbf{P} \mathbf{x}_j(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = \phi_i(\mathbf{x}_i(t), \eta) \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

denklem takımı ile tanımlansın. $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$ i . durumun durum değişkenlerini, f her bir düğümün dinamiğini, $\epsilon_{ij}(t)$, j . düğümden i . düğüme olan zamanla değişen katsayıyı, \mathbf{P} iç bağlantı matrisini, $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^m$ i . düğümün çıkışını, ϕ_i gözlem fonksiyonunu ve η bilinmeyen parametreleri ifade eder.

$\mathbf{x}_i(t) = f(\mathbf{x}_i(t))$ dinamik sistemlerinin kaotik olduğunu varsayalım [26]. Böyle sistemlerin (1)'deki gibi birbirine bağlanması ile oluşan kaotik bir ağda, tam eşzamanlılık durumunda ağın tüm üyeleri uygun koşullarda asimptotik olarak aynı yörüngeyi takip eder [2], [27], [28]. Ağdaki düğümler öbekler halinde eşzamanlılık gösterirse bu durum öbek eşzamanlılığı olarak nitelendirilir [11], [12], [29]. N düğümlü ℓ adet öbeğe sahip böyle bir ağ verilsin ve ağdaki düğümler i ve j aynı öbekte ise $i \sim j$ sembolü ile gösterilsin. Bu durumda düğümlerin durumları,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\| &= 0 \quad \forall \quad i \sim j, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\| &\neq 0 \quad \forall \quad i \not\sim j, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\mathbf{x}_i(t)}{dt} \neq 0 \quad \forall \quad t \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2, \dots, N.$$

şartlarını sağlamalıdır. G_{k_1} en az sayıda düğüm içeren öbek öncelikli olarak indislenmek üzere k_1 . öbekleri düğümlerin indislerinden oluşan kümeyi gösterebilir. Böylece, $G_1 = \sum_{i=1}^{m_1} i$ $G_2 = \sum_{i=1}^{m_2} m_1 + i$ ve $G_\ell = \sum_{i=1}^{m_\ell} m_1 + m_2 + i$, $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_\ell$, $N = m_1 + m_2 + \dots + m_\ell$ yazılabilir.

Amacımız, her bir düğümün önceden verilmiş tek bir çıkışı, $\mathbf{y}_{i1}(t)$ $i = 1, 2, \dots, N$, örneklenerek elde edilen gözlemlerden öbekler oluşturup oluşturmamaklarının ve ilgili çıkışın hangi öbeğe ait olduğunun sonlu sayıda gözlem ile belirlenmesidir. Sistemlerin kaotik oluşu nedeniyle başlangıç koşullarına hassas bağımlılık ve gözlem vektörlerindeki olası belirsizlikler ilk bakışta problemin çözümünü

güçlendirmektedir. Öte yandan Shannon bilgi kuramı eldeki gözlemlerden sistemlerin birbirleri ile olan nedensel ilişkilerini kestirmeye yarayacak matematiksel araç gereci sağlamaktadır. Denklem 1 dinamik ağındaki $\mathbf{y}_{i1}(t)$ çıkışlarından τ_s örnekleme periyodu ile alınan n. örneğini $\mathbf{y}_{i1}[n] = \mathbf{y}(t_o + n\tau_s)$, $n \in \mathbb{Z}^+$ ile gösterelim. Takens gömme teoremine göre n. ve daha önceki gözlemler kullanılarak sistemlerin durumları

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_{i1}^{(d_e)}[n] & \quad (3) \\ &= [\mathbf{y}_{i1}[n], \mathbf{y}_{i1}[n - \tau], \dots, \mathbf{y}_{i1}[n - (d_e - 1)\tau]] \end{aligned}$$

ile verilen durum vektörleri aracılığı ile geri çatılabilir. Bu denklemde τ ardışıl gözlemler arasındaki gecikme indisini ve d_e gömme boyutunu temsil eder. τ gecikme indisi gözlem vektörü ve gecikmeli gözlem vektörü arasındaki ortak bilgi ölçüsünün τ 'ya göre ilk minimum yaptığı indistir [30]. d_e gömme boyutu ise gözlem vektörlerinin yanlış komşuluk oranının ilk sıfıra düştüğü boyuttur [30]. Uygun koşullarda geri çatılan durum uzayındaki durumlar ile orijinal uzayın durumları arasında diffeomorfik bir ilişki vardır. Başka bir deyişle yörüngelerine ilişkin topolojik değişmezler korunur. $p(\mathbf{y}[n])$ sistem durumunun n anında $\mathbf{y}[n]$ olması olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermek üzere

$$h(\mathbf{y}) = - \int_{\Omega} p(\mathbf{y}) \log p(\mathbf{y}) d\Omega \quad (4)$$

ile verilen entropi $\mathbf{y}[n]$ vektörünün gözlenmesi ile ortadan kaldırılan belirsizliği veya bilgi miktarını ifade eder. Burada $\Omega \in \mathbb{R}^m$ çıkış uzayını temsil eder. Geri çatılan durum uzayındaki gözlem vektörleri için entropi aşağıdaki denklemde verilmiştir:

$$h(\tilde{\mathbf{y}}_{i1}^{(d_e)}) = - \int_{\tilde{\Omega}} p(\tilde{\mathbf{y}}_{i1}^{(d_e)}) \log p(\tilde{\mathbf{y}}_{i1}^{(d_e)}) d\tilde{\Omega} \quad (5)$$

$\tilde{\Omega} \in \mathbb{R}^{d_e}$ geri çatılan durum uzayını ve p olasılık yoğunluk fonksiyonunu temsil eder. Bu çalışmada gözlem vektörlerinin tek bir çıkışı alınarak geri çatılan durum uzayı üzerinden bilgi kuramı ölçüleri kestirilmiştir. Takens gömme teoremine göre orijinal sistemin çıkış vektörü ve geri çatılan uzayın durum vektörü arasında diffeomorfik bir ilişki olduğundan, geri çatılan uzayın durum vektörünün entropisi orijinal durumlardan elde edilen gözlem vektörünün

entropisine eşittir [31]. Entropi bilgi ölçüsü, ağın tek bir düğümü hakkındaki belirsizliği ölçmemize yarararken, iki düğüm arasındaki bilgi akışını ölçmez. $y_2[n]$ durumu gözlemlendiğinde, $y_1[n]$ vektörünün ortadan kaldırılan belirsizliğini ölçen koşullu entropi tanımı aşağıda verilmiştir:

$$h(y_1|y_2) = - \int_{\Omega} p(y_1, y_2) \log p(y_1|y_2) d\Omega \quad (6)$$

Burada $p(y_1, y_2)$, $y_1[n]$ ve $y_2[n]$ 'in n anındaki bileşik yoğunluk fonksiyonunu gösterir. Burada, ağdaki düğümlerin dinamik olasılık yoğunluk fonksiyonlarını da ortaya katarak iki düğüm arasındaki bilgi akışını ölçen bilgi kuramı ölçülerinden biri olan nedensellik entropisi ölçüsü kullanılmıştır. Nedensellik entropisi bir düğümden diğer bir düğüme olan veri akışını üçüncü bir düğümün de etkisini katarak kestirimimizi sağlayan bilgi ölçüsüdür. $y_k[n]$ durumu gözlemlendiğinde, $y_i[n]$ durumundan $y_j[n]$ durumuna aktarılan düzensizliği ölçen nedensellik entropisi, koşullu entropi terimleri cinsinden,

$$CE_{i \rightarrow j|k} = h(y_j[n+1] | y_k[n]) - h(y_j[n+1] | y_k[n], y_i[n]) \quad (7)$$

şeklinde yazılabilir. Geri çatılan durum uzayında, i . düğümden j . düğüme olan bilgi akışını k . düğümün etkisini katarak ölçen nedensellik entropisi,

$$CE_{i \rightarrow j|k} = h(\tilde{y}_{j1}^{(de)}[n+1] | \tilde{y}_{k1}^{(de)}[n]) - h(\tilde{y}_{j1}^{(de)}[n+1] | \tilde{y}_{k1}^{(de)}[n], \tilde{y}_{i1}^{(de)}[n]) \quad (8)$$

olarak tanımlanır. Nedensellik entropisi kestirim yöntemi olarak k -en yakın komşuluklar yöntemi kullanılmıştır [32], [33]:

$$CE_{\tilde{y}_i \rightarrow \tilde{y}_j | \tilde{y}_k} \approx \psi(k) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\psi(\eta_{\tilde{y}_k[n]}(i) + 1) - \psi(\eta_{(\tilde{y}_k[n], \tilde{y}_i[n])}(i) + 1) - \psi(\eta_{(\tilde{y}_k[n], \tilde{y}_j[n+1])}(i) + 1)] \quad (9)$$

Burada $\psi(\cdot)$ digamma fonksiyonunu, k komşuluk sayısını, N gözlem sayısını, $\eta_{\tilde{y}_k[n]}$, $\eta_{(\tilde{y}_k[n], \tilde{y}_i[n])}$, $\eta_{(\tilde{y}_k[n], \tilde{y}_j[n+1])}$ sırasıyla, $\tilde{y}_k[n]$, $(\tilde{y}_k[n], \tilde{y}_i[n])$,

$(\tilde{y}_k[n], \tilde{y}_j[n+1])$ merkezli $\varepsilon_{\tilde{y}_k[n]}$, $\varepsilon_{(\tilde{y}_k[n], \tilde{y}_i[n])}$, $\varepsilon_{(\tilde{y}_k[n], \tilde{y}_j[n+1])}$ yarıçaplı küreler içindeki nokta sayısını ifade eder. Kürelerin yarıçapları her i . noktanın k . komşusuna olan uzaklığın saptanmasıyla elde edilir [33].

Öbek eşzamanlılığı gösteren kaotik bir ağda nedensellik entropisi kestirimi yapıldığında eğer i . ve k . düğüm aynı öbekte ise nedensellik entropisinin sıfır, farklı öbekte ise sıfırdan farklı pozitif bir değer alması beklenir. Dolayısı ile ağdaki düğümlerden üçlü gruplar halinde alınan gözlemlerden hangi düğümlerin hangi gruba dahil olduğu kestirilebilir.

3. Bulgular

Kaotik bir sürekli zaman ağından sonlu sayıda gözlem vektörü alınarak yukarıda açıklanan yaklaşımla ağın düğümlerinin hangi öbekte olduğunun tespit edilebileceğini göstermek için, öbek eşzamanlılığı gösteren bir ağ seçilmiştir ve bu ağ üzerinde nedensellik entropisi kestirimleri yapılmıştır.

Özdeş kaotik Lorenz sistemlerinden oluşan 5 düğümlü bir ağ ele alalım. Şekil 1 ve Şekil 2'de gösterilen bu ağdaki düğümler x_{i1} -durum değişkenleri üzerinden birbirine bağlanmıştır. Her bir düğümün dinamiği aşağıda ifade edilmiştir:

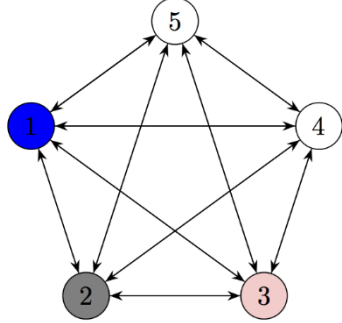
$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1} &= \sigma(x_{i2} - x_{i1}) + \epsilon_{ij}(x_{j1} - x_{i1}) \\ \dot{x}_{i2} &= -x_{i1}x_{i3} + rx_{i1} - x_{i2} \\ \dot{x}_{i3} &= -x_{i1}x_{i2} - bx_{i3} \quad i, j = 1, 2, \dots, 5. \\ y_i &= x_{i1} \end{aligned} \quad (10)$$

Burada Lorenz sisteminin parametreleri $\sigma = 10.0$, $b = 8/3$, $r = 28.0$ seçildiğinde sistem kaotik bir davranış gösterir [34]. Kullanılan ağ için bağlantı matrisi aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} -2\alpha_{11} & \alpha_{11} & \alpha_{11} & 2\alpha_{12} & 3\alpha_{12} \\ \alpha_{11} & -2\alpha_{11} & \alpha_{11} & 2\alpha_{12} & 3\alpha_{12} \\ \alpha_{11} & \alpha_{11} & -2\alpha_{11} & \alpha_{12} & 4\alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 2\alpha_{21} & 3\alpha_{21} & -2\alpha_{22} & 2\alpha_{22} \\ 3\alpha_{21} & 2\alpha_{21} & \alpha_{21} & 2\alpha_{22} & -2\alpha_{22} \end{bmatrix} \quad (11)$$

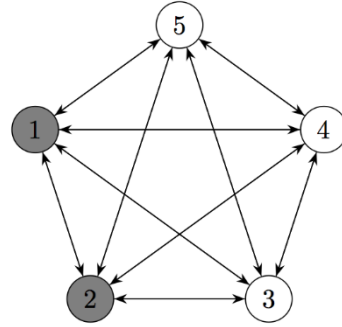
Burada $\alpha_{11} = 2.5$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0.5$ alınmıştır. Bu ağ için α_{22} bağlantı şiddeti değiştiğinde farklı öbeklerin oluşacağı bilinmektedir [15]. $\alpha_{22} = 0.5$ seçilirse ağda dört farklı öbek oluşurken

$\alpha_{22} = 3.0$ seçilirse ağda iki farklı öbek vardır (Şekil 1 ve Şekil 2).



Şekil 1. Öbek eşzamanlılığı ağı. Denklem 10'da verilen her bir sistem bir daire ile gösterilmiştir. Bu denklemdeki ϵ_{ij} terimleri oklarla gösterilmiştir. Bağlantı matrisinde $\alpha_{11} = 2.5$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0.5$ ve $\alpha_{22} = 0.5$ seçilirse, ağda dört adet öbek oluşur. $G_1 = \{1\}$, $G_2 = \{2\}$, $G_3 = \{3\}$ ve $G_4 = \{4,5\}$.

Başlangıçta denklem 10'daki özdeş 5 sistemden oluşan kaotik ağın düğümlerin çıkışları rasgele olacak şekilde $\{a, b, c, d, f\}$ harfleriyle adlandırılmıştır. Ağın belirli bir başlangıç koşulundan başlayarak yeterince uzun bir süre çözümlendiği, kısacası kaotik çekerin olduğu varsayılmaktadır. Çözümlemeler Runge Kutta differansiyel denklem çözücüsüyle örnekleme periyodu $t_s = 0.01$ alınarak gerçekleştirilmiştir. Bağımsız bir düğüm için minimum ortak bilgi ölçüsü kriteri kullanılarak $\tau = 16$ ve yanlış komşuluklar oranının sıfıra düştüğü boyut $d_e = 3$ kestirilmiştir. Ağdaki her düğümden sırasıyla birer adet çıkış vektörü gözlemlenerek, yeni durum uzayı geri çatılmıştır. Gecici hallerin ölmesi için yeterince uzun bir süre beklendikten sonra (325 sn.), α_{22} bağlantı şiddeti değiştirilerek gözlem vektörleri için geri çatma işlemi tekrarlanmıştır. Geri çatılan gözlem vektörlerinden her bir düğüm için 40 sn'lik pencereler alınarak, her bir pencere için nedensellik entropisi kestirilmiştir. Benzetimler 1000 kez tekrarlanmıştır. Ortalama nedensellik entropisi kestirim değerleri b, c ve d düğümleri için Şekil 3, 4 ve 5'de sunulmuştur.



Şekil 2. Öbek eşzamanlılığı ağı. Bağlantı matrisinde $\alpha_{11} = 2.5$, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0.5$ ve $\alpha_{22} = 3.0$ seçilirse, ağda iki adet öbek oluşur. $G_1 = \{1, 2\}$ ve $G_2 = \{3, 4, 5\}$.

4. Tartışma

Ağdaki düğümler rasgele $\{a, b, c, d, f\}$ harfleriyle adlandırıldığında hangi düğüm hangi düğümle öbek eşzamanlılığı oluşturacağı bilinmemektedir. b düğümü için nedensellik entropisi kestirimleri incelendiğinde değişen α_{22} bağlantı şiddeti için her durumda $CE_{b \rightarrow j|f} \approx 0 \forall j = \{a, b, c, d, f\}$ dır. Kısacası, b ve f düğümlerinin aynı öbekte olduğu söylenir. b düğümü için, $\alpha_{22} = 1.2$ olduğunda diğer düğümlerle öbek oluşturmaz. Ancak α_{22} arttıkça $CE_{b \rightarrow j|c} \forall j = \{a, b, c, d, f\}$ kestirimleri de sıfıra yaklaşıyor. Bu durumda b, c ve f düğümleri öbek oluşturur. Şekil 4'deki nedensellik entropisi kestirimleri incelendiğinde başlangıçta c düğümü için $CE_{c \rightarrow j|k} \forall j, k = \{a, b, c, d, f\}, k \neq c$ sıfırdan farklı bir değer alır. c düğümü hiçbir düğüm ile aynı öbekte değildir. α_{22} bağlantı şiddeti arttıkça $CE_{c \rightarrow j|b} \approx CE_{c \rightarrow j|f} \approx 0 \forall j = \{a, b, c, d, f\}$ olur. c düğümü a ve d ile hiçbir zaman öbek oluşturmazken b ve f düğümü ile öbek oluşturur. Şekil 5'e bakılarak d düğümü için nedensellik entropisi kestirimleri $\alpha_{22} = 1.2$ için $CE_{d \rightarrow j|k} \forall j, k = \{a, b, c, d, f\}, k \neq d$ sıfırdan farklı bir değer alır. $\alpha_{22} \geq 2$ olduğunda ise $CE_{d \rightarrow j|a} = 0 \forall j = \{a, b, c, d, f\}$ sıfıra eşit olduğundan d düğümü sadece a düğümü ile öbek eşzamanlılığı oluşturduğu gözlenir. Düğüm a ve f'nin nedensellik entropisi kestirimleri yapılmıştır. Düğüm a için başlangıçta $CE_{a \rightarrow j|k} \neq 0 \forall j, k = \{a, b, c, d, f\}, k \neq a$ olduğundan hiç bir ağ ile öbek oluşturmadığı α_{22} bağlantı şiddeti arttıkça yalnızca d ile öbek oluşturduğu gözlenmiştir. Düğüm f için $\alpha_{22} = 1.2$ iken sadece b düğümü ile öbek oluşturduğu, $\alpha_{22} \geq 2$ olduğunda ise b, c düğümü ile öbek oluşturduğu gözlenmiştir. f düğümü hiçbir zaman a ve d

düğümü ile öbek oluşturmaz. Bu durumda $1.2 \leq \alpha_{22} < 2$ arasında b ve f düğümleri öbek oluşturken $G_1 = \{a\}$, $G_2 = \{c\}$, $G_3 = \{d\}$ ve $G_4 = \{b, f\}$, $\alpha_{22} \geq 2$ olduğu zaman $G_1 = \{a, d\}$ ve $G_2 = \{b, c, f\}$ öbeklerinin olduğu saptanır. Şekil 3, 4, ve 5'te başlangıçta gözlemcinin elinde olmadığı varsayılan sürekli hal eşzamanlılık hatasının nasıl değiştiği de gösterilmiştir. Şekil 3, 4 ve 5 incelendiğinde sürekli hal sistemlerinde hata grafiğine bakılarak $1.2 \leq \alpha_{22} < 2$ için $G_1 = \{a\}$, $G_2 = \{c\}$, $G_3 = \{d\}$ ve $G_4 = \{b, f\}$ ve $\alpha_{22} \geq 2$ için $G_1 = \{a, d\}$ ve $G_2 = \{b, c, f\}$ olduğu görülür. Sonuç olarak, düğümlerin oluşturduğu öbekler nedensellik entropisi ile tespit edilmiştir.

Buna ek olarak, minimum bilgi ölçüsü kriterine (τ) ve yanlış komşuluklar oranının sıfıra düştüğü boyuta (d_e) göre örneklenen gözlem vektörlerinin Takens gömme teoremi kullanılarak geri çatılmasıyla elde edilen yeni durum uzayının τ ve d_e 'ya göre duyarlı olmadığı gözlenmiştir.

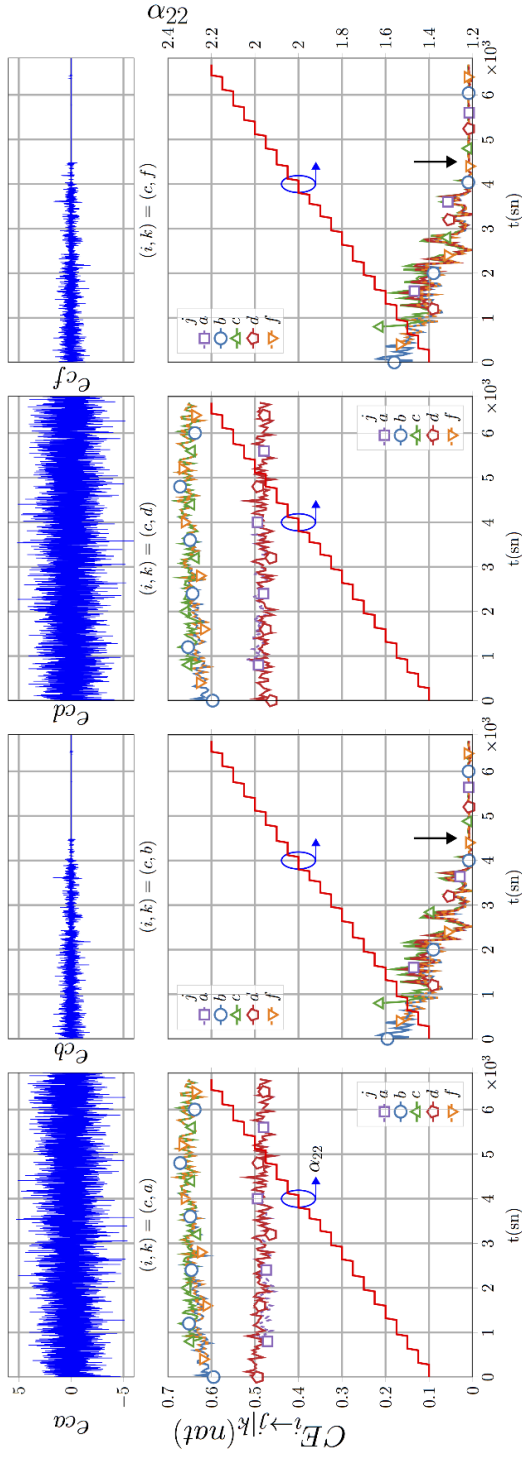
4. Sonuç

Sürekli zamanlı kaotik sistemlerden oluşmuş öbek eşzamanlı bir ağın düğümleri rasgele adlandırılarak öbeklerin saptanması ve ağın içindeki bağlantı şiddetlerinin değişmesi sonucu oluşan yeni öbeklerin belirlenmesi problemi incelenmiştir. Ayrıca öbekleri eşzamanlama anının tespit edilip edilemeyeceğine bakılmıştır. Ağdaki gözlem vektörleri kullanılarak oluşturulan yeni durum uzayında nedensellik entropisi kestirimi yapıldığında bu ölçünün birbirinden aynı ve farklı öbekte olan düğümleri kestirim parametrelerine duyarlı olmaksızın ayırt ettiği gösterilmiştir. Çalışmada istenen yöntem, öbek eşzamanlılığını belirlemede başarılı iken, ağ bağlantılarının belirlenmesi için doğrudan bir yol sunmaz. Bilgi ölçüleri kullanılarak ağ topolojisinin de belirlenmesi, öbek eşzamanlılık uygulamaları için önemlidir ve açık bir problemdir.

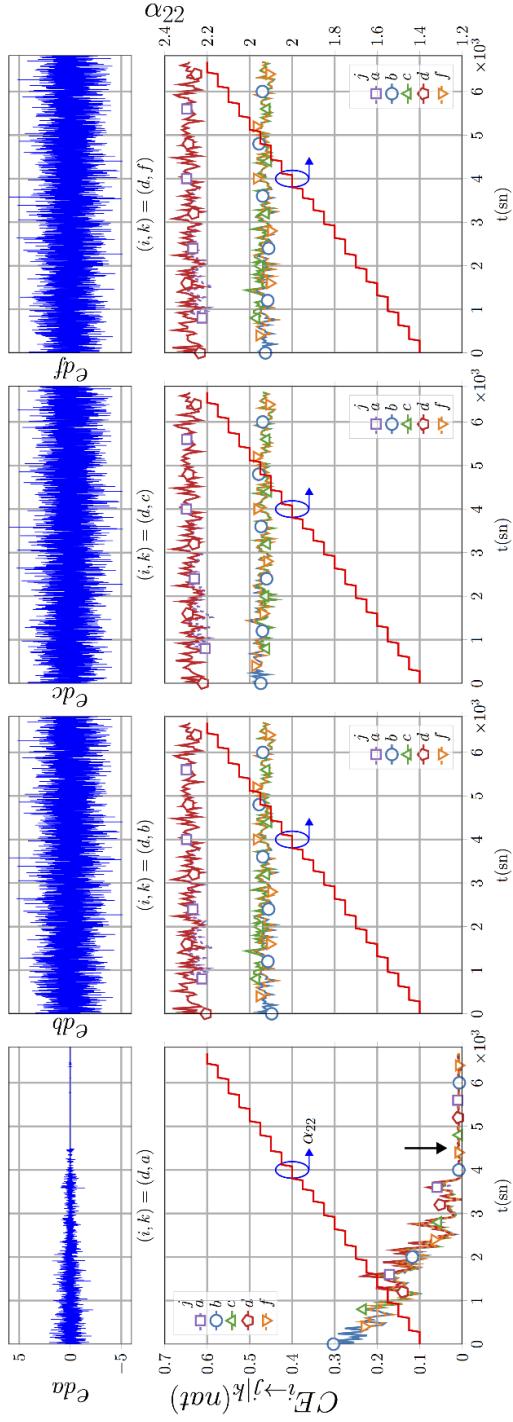
Kaynakça

- [1] Strogatz, S. H. 2015. Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. 2nd edition. CRC Press, 532 s. DOI: 10.1201/9780429492563

- [2] Pecora L. M., Carroll T. L. 1990. Synchronization in chaotic systems Phys. Rev. Lett., Cilt. 64 (8), s. 821-824. DOI: 10.1103/PhysRevLett.64.821
- [3] Pecora, L. M., Carroll, T. L., Johnson, G. A., Mar, D. J., Heagy, J. F. 1997. Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, Cilt. 7(4), s. 520-543. DOI: 10.1063/1.166278
- [4] Boccaletti, S., Kurths, J., Osipov, G., Valladares, D. L., Zhou, C. S. 2002. The synchronization of chaotic systems. Physics reports, Cilt. 366(1-2), s. 1-101. DOI: 10.1016/S0370-1573(02)00137-0
- [5] Hasler, M. 1995. Engineering chaos for encryption and broadband communication. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, Cilt. 353(1701), s. 115-126. DOI:10.1098/rsta.1995.0094
- [6] Li, C., Chen, L., Aihara, K. 2007. Stochastic synchronization of genetic oscillator networks. BMC Systems Biology, Cilt. 1(1), s. 1-6. DOI: 10.1186/1752-0509-1-6
- [7] Rosenblum, M. G., Pikovsky, A. S., Kurths, J. 1996. Phase synchronization of chaotic oscillators. Physical review letters, Cilt. 76(11), s. 1804-1807. DOI: /10.1103/PhysRevLett.76.1804
- [8] Rosenblum, M. G., Pikovsky, A. S., Kurths, J. 1997. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. Physical Review Letters, Cilt. 78(22), s. 4193-4196. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4193
- [9] Hasler, M., Maistrenko, Y., Popovych, O. 1998. Simple example of partial synchronization of chaotic systems. Physical Review E, Cilt. 58(5), s. 6843-6846. DOI: 10.1103/PhysRevE.58.6843
- [10] Belykh, I., Belykh, V., Nevidin, K., Hasler, M. 2003. Persistent clusters in lattices of coupled nonidentical chaotic systems. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, Cilt. 13(1), s. 165-178. DOI: 10.1063/1.1514202
- [11] Pecora, L. M., Sorrentino, F., Hagerstrom, A. M., Murphy, T. E., Roy, R. 2014. Cluster synchronization and isolated desynchronization in complex networks with symmetries. Nature communications, Cilt. 5, s. 1-8. DOI: 10.1038/ncomms5079
- [12] Sorrentino, F., Pecora, L. M., Hagerstrom, A. M., Murphy, T. E., Roy, R. 2016. Complete characterization of the stability of cluster synchronization in complex dynamical networks.



Şekil 4. Alt satırda zamana göre nedensellik entropisi ölçüsü değişen α_{22} bağlantı şiddeti için kestirimiştir. Alt satırın sağ ekseninde zamanla değişen α_{22} değeri gösterilmektedir. Alt satırın sol ekseninde ise $i = c$ düğümünden diğer düğümlere olan nedensellik entropisi kestirimleri her bir sütun farklı k değerini gösterecek şekilde ($k = \{a, b, d, f\}$) tüm $j = \{a, b, c, d, f\}$ için sunulmuştur. α_{22} değeri arttıkça c düğümü için nedensellik entropisi kestirimlerine bakıldığında $(i,k) = (c,b)$ ve $(i,k) = (c,f)$ indisinde tüm j değerleri için nedensellik entropisi sıfıra doğru gider. Fakat, $k = \{a, d\}$ için nedensellik entropisi kestirimleri her zaman sıfırdan farklı bir değer alır. Bu sonuçlara bakarak $\alpha_{22} = 1.2$ olduğunda c düğümü hiçbir ağla öbek oluşturmazken, α_{22} arttıkça b ve f düğümleri ile öbek oluşturur.



Şekil 5. Alt satırda zamana göre nedensellik entropisi ölçüsü değişen α_{22} bağlantı şiddeti için kestirilmiştir. Alt satırın sağ ekseninde zamanla değişen α_{22} değeri gösterilmektedir. Alt satırın sol ekseninde ise $l = d$ düğümünden diğer düğümlere olan nedensellik entropisi kestirimleri her bir sütun farklı k değerini gösterecek şekilde ($k = \{a, b, c, d, f\}$) tüm $j = \{a, b, c, d, f\}$ için sunulmuştur. α_{22} değeri arttıkça d düğümü için nedensellik entropisi kestirimlerine bakıldığında $(i, k) = (d, a)$ indisinde tüm j değerleri için nedensellik entropisi sıfıra doğru gider. Fakat, $k = \{b, c, f\}$ için nedensellik entropisi kestirimleri her zaman sıfırdan farklı bir değer alır. Bu sonuçlara bakarak $\alpha_{22} = 1.2$ olduğunda d düğümü hiçbir ağla öbek oluşturmazken, α_{22} arttıkça sadece a düğümü ile öbek oluşturur.

- Science advances, Cilt. 2(4), s. 1-8. DOI: 10.1126/sciadv.1501737
- [13] Qin, J., Ma, Q., Gao, H., Shi, Y., Kang, Y. 2017. On group synchronization for interacting clusters of heterogeneous systems. IEEE transactions on cybernetics, Cilt. 47(12), s. 4122-4133. DOI: 10.1109/TIE.2017.2711573
- [14] Belykh, V. N., Belykh, I. V., Hasler, M. 2000. Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems. Physical Review E, Cilt. 62(5), s. 6332-6344. DOI: 10.1103/PhysRevE.62.6332
- [15] Belykh, V. N., Osipov, G. V., Petrov, V. S., Suykens, J. A., Vandewalle, J. 2008. Cluster synchronization in oscillatory networks. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, Cilt. 18(3), 037106. DOI: 10.1063/1.2956986
- [16] Belykh, I., Belykh, V., Hasler, M. 2006. Generalized connection graph method for synchronization in asymmetrical networks. Physica D: Nonlinear Phenomena, Cilt. 224(1-2), s. 42-51. DOI: 10.1016/j.physd.2006.09.014
- [17] Belykh, V. N., Belykh, I. V., Hasler, M., Nevidin, K. V. 2003. Cluster synchronization in three-dimensional lattices of diffusively coupled oscillators. International Journal of Bifurcation and Chaos, Cilt. 13(04), s. 755-779. DOI: 10.1142/S0218127403006923
- [18] Ma, Z., Liu, Z., Zhang, G. 2006. A new method to realize cluster synchronization in connected chaotic networks. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, Cilt. 16(2), 023103. DOI: 10.1063/1.2184948
- [19] Lu, W., Liu, B., Chen, T. 2010. Cluster synchronization in networks of coupled nonidentical dynamical systems. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, Cilt. 20(1), 013120. DOI:10.1063/1.3329367
- [20] Kreuz, T., Mormann, F., Andrzejak, R. G., Kraskov, A., Lehnertz, K., Grassberger, P. (2007). Measuring synchronization in coupled model systems: A comparison of different approaches. Physica D: Nonlinear Phenomena, Cilt. 225(1), s. 29-42. DOI: 10.1016/j.physd.2006.09.039
- [21] Paluš, M., Komárek, V., Hrnčíř, Z., Štěrbová, K. 2001. Synchronization as adjustment of information rates: detection from bivariate time series. Physical Review E, Cilt. 63(4), 046211. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.046211
- [22] Bollt, E. M. 2012. Synchronization as a process of sharing and transferring information. International Journal of Bifurcation and Chaos, Cilt. 22(11), 1250261. DOI: 10.1142/S0218127412502616
- [23] Sun, J., Bollt, E. M. (2014). Causation entropy identifies indirect influences, dominance of neighbors and anticipatory couplings. Physica D: Nonlinear Phenomena, Cilt. 267, s. 49-57. DOI: 10.1016/j.physd.2013.07.001
- [24] Singh, H., Misra, N., Hnizdo, V., Fedorowicz, A., Demchuk, E. 2003. Nearest neighbor estimates of entropy. American journal of mathematical and management sciences, Cilt. 23(3-4), s. 301-321. DOI: 10.1080/01966324.2003.10737616
- [25] Takens, F. 1981. Detecting strange attractors in turbulence. ss 366-381. Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [26] Shilnikov, L. P. (2001). Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics Cilt. 5, s. 403, World Scientific. DOI: 10.1142/4221
- [27] Belykh, I., Hasler, M., Lauret, M., Nijmeijer, H., 2005. Synchronization and graph topology. International Journal of Bifurcation and Chaos, Cilt. 15(11), s. 3423-3433. DOI: 10.1142/S0218127405014143
- [28] Belykh, V. N., Belykh, I. V., Hasler, M., 2004. Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems. Physica D: nonlinear phenomena, Cilt. 195(1-2), s. 159-187. DOI: 10.1016/j.physd.2004.03.012
- [29] Strogatz, S. H. 2001. Exploring complex networks. Nature, Cilt. 410(6825), s. 268-276. DOI: 10.1038/35065725
- [30] Abarbanel, H. 2012. Analysis of observed chaotic data. Springer Science and Business Media. 272 s.
- [31] Cover, T. M., & Thomas, J. A., 2012. Elements of information theory. John Wiley & Sons. 2nd edition, 748 s.
- [32] Kraskov, A., Stögbauer, H., Grassberger, P. (2004). Estimating mutual information. Physical review E, Cilt. 69(6), 066138. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.066138
- [33] Zhu, J., Bellanger, J. J., Shu, H., Le Bouquin Jeannès, R. 2015. Contribution to transfer entropy estimation via the k-nearest-neighbors approach. Entropy, Cilt. 17(6), s. 4173-4201. DOI: 10.3390/e17064173
- [34] Lorenz, E. N., 1963. Deterministic nonperiodic flow. Journal of the atmospheric sciences, Cilt. 20(2), s. 130-141. DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2