STOKASTİK DOĞRUSAL PROGRAMLAMADA PARAMETRİK OLMAYAN İSTATİSTİKLERİN KULLANIMI ÜZERİNE *

G. TINTNER Çeviren:

M. V. Rama SASTRY **Ass.** İmdat KARA

Genel bir doğrusal programlama problemi

$$Ax \leqslant b$$

$$x \geqslant 0$$

kısıtlayıcılarına göre

$$Z=cx$$

fonksiyonun maksimum yapılması olarak formule edilmektedir. Burada, A m-satır n-sütunlu bir matris, x , c ve b n-öğeli (elemanlı) sütun vektörleridir. İlk kez **TINTNER** [6] tarafından önerilen stokastik doğrusal programlama kuramında (teorisinde) A matrisi ile b ve c vektörlerinin öğeleri olasılık dağılımları bilinen tesadüfi değişkenler olarak ele alınmaktadır. Dolaylı ve dolaysız yöntem olarak isimlendirilen iki farklı şekilde Z'nin dağılımı bulunabilmektedir.

(*) G. TINTNER and M.V. RAMA SASTRY, «A Note on the Use of Nonparametric Statistics in Stochastic Linear Programmingâ, **Management Science,** C. 19, No. 2, (Ekim 1972), s. 205-210.

Bu makalede, iki yöntemle bulunan dağılımlar arası farklılaşmalara parametrik olmayan testler uygulanmıştır. Kullanılan testler **Kolmogorov-smirnov** istatistiği ile **Alfred RENYİ**'nin istatistiklerini içermektedir.

1- Stotastik Doğrusal Programlama: Pasif yaklaşım

Dolaylı Yöntem

Bu yöntemde, doğrusal programlama probleminin kısıtlayıcılarındaki a_{ij} katsayılarına farklı örnek (sample) değerleri verilerek amaç fonksiyonunun dağılımı deneysel olarak bulunmaktadır. Yöntemin ayrıntıları aşağıdaki örnek yardımıyla açıklanmıştır.

Örnek

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant 104 \text{ (kapital)}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant 0{,}014 \text{ (emek)}$$

$$x_1 \geqslant 0$$

$$x_2 \geqslant 0$$

kısıtlayıcılarına göre

$$\text{MaxZ} = x_1 + x_2$$

Amaç fonksiyonu milli gelirin iki bileşenden, x_1-yatırım malları ile x_2-tüketim mallarından oluştuğunu göstermektedir.

a_{ij} değerleri, Leontief'in sektörlerarası girdi-çıktı analiziyle elde edilebilinir. Halbuki bu değerler genellikle ölçüm hatalarını içerir ve daima bazı belirsizlikler söz konusudur. Girdi-çıktı katsayılarının kabul edilebilen bir değerler aralığında değişimleriyle, belirsizliğin amaç fonksiyonu üzerindeki etkilerinin analizi olurludur. Yukarıdaki problemde a_{11} ve a_{12} için seçilen örnek (sample) değerleri aşağıdaki gibidir.

a_{11}	a_{12}
7,1428	0,5701
1,0905	0,4801
3,0959	0,7003
6,4102	3,2467
2,3981	0,4801
2,0000	1,9011
5,0000	3,4722
2,3474	3,3333
3,5842	3,0395
5,4644	3,7450
3,6364	4,3290
2,5445	4,1152

3,4722	4,6511
3,7735	4,3668
3,1746	3,0675
3,4965	1,4641

Yukarıda verilen 16 değer-ikilileri, Hindistan Hükümeti ve diğer planlama uzmanları tarafından kullanılan gerçek örnek katsayılarıdır.

Dolaylı yöntemde, doğrusal programlama modeli 16 değer-ikilisinin herbiri için çözümlenir. Örneğin, birinci doğrusal programlama problemi

$$7,1428x_1 + 0,5701x_2 \leqslant 104 \text{ (kapital)}$$

$$0,00025x_1 + 0,00041x_2 \leqslant 0,014 \text{ (emek)}$$

$$x_1 \geqslant 0$$

$$x_2 \geqslant 0$$

kısıtlayıcılarına göre

$$Z = x_1 + x_2$$

fonksifonunun maksimum yapılmasıdır. Simpleks yöntemi optimum çözümü verir; örneğimizde mak$Z = 38,8144$ dir. Aynı şekilde diğer 15 doğrusal programlama problemi çözümlenmiş ve sonuçlar Tablo-1 de verilmiştir.

Dolaysız Yöntem

Bu yöntemde, girdi-çıktı katsayılarına deneysel olasılık dağılım fonksiyonları uydurularak, amaç fonksiyonunun olasılık dağılımı tahmin edilir. Yöntemin uygulanışı aynı örnek yardımıyla gösterilecektir.

a_{11} ve a_{12} tesadüfi katsayıları için bulunan 16 örnek değerinin kullanımıyla a_{11} ve a_{12} nin olasılık dağılımları bulunur. Verilere dağılımın uydurulması hakkında geniş bilgi için **SENGUPTA TINTNER** ve **MILLHAM** [4] bakınız.

Eğer,

$f(a_{11})$: a_{11}'in olasılık dağılımı

$f(a_{12})$: a_{12}'nin olasılık dağılımı

olarak tanımlanır ise,

$$f(a_{11}) = 6,0930\left(1 + \frac{a_{11}}{1,6904}\right)^{-0,3887}\left(1 - \frac{a_{11}}{2,5645}\right)^{-0,5897}$$

$$f(a_{12}) = 47,8227\left(1 + \frac{a_{12}}{7,3612}\right)^{2,1789}\left(1 - \frac{a_{12}}{0,7676}\right)^{0.2272}$$

olur. Her iki dağılım da istatistik literatüründe «Beta Dağılımları» olarak isimlendirilir. $f(a_{11})$ ve $f(a_{12})$'nin birikimli olasılık dağılımlarının kullanımıyle amaç fonksiyonuna uygun dağılımın bulunması için M.M. Babbar [1] kullanışlı yöntemler önermektedir. Örneğimiz için bulunan sonuçlar şöyledir (Bkz. **TINTNER, SENGUPTA** ve **MORRISON** [7]).

Birikimli Olasılık	a_{11}	Birikimli Olasılık	a_{12}
0,05	0,00098	0,05	0,61088
0,6589	2,32377	0,3152	1,62194
0,8310	4,64656	0,6848	2,63300
0,95	6,96935	0,95	3,64406

Yukarıdaki işlemde olasılık dağılımının toplam aralığı, alt ve üst ucların % 5'i hariç, üç eşit kısma bölünerek a_{11} ve a_{12}'nin değerleri hesaplanmıştır. Bu veriler (0,0010 , 0,6109) , (0,0010 , 1,6219).......(6,9696 , 0,6109), ... (6,9696 , 3,6441) gibi 16 ikili değerleri verir.

Birinci doğrusal programlama problemi,

$$
\begin{aligned}
0{,}0010x_1 + 0{,}6109x_2 &\leqslant 104 \text{ (kapital)} \\
0{,}00025x_1 + 0{,}000413x_2 &\leqslant 0{,}014 \text{ (emek)} \\
x_1 &\geqslant 0 \\
x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

kısıtlayıcılarına göre

$$Z = x_1 + x_2$$

fonksiyonunun maksimum kılınmasıdır. Simpleks yöntemi ile bulunan çözümde maksimum milli gelir = 33, 898 olmuştur. Benzer şekilde 16 doğrusal programlama problemi çözümlenmiş ve sonuçlar Tablo-1 de yer aldığı gibi, aşağıda da gösterilmiştir.

Optimal Z Değerleri

a_{11}	a_{12}			
	0,61088	1,62194	2,63300	3,64406
0,00098	33,898	33,898	33,898	37,384
2,32377	50,722	48,315	41,871	28,540
4,64656	41,585	39,177	35,805	28,540
6,96935	38,879	37,129	34,981	28,540

2- Parametrik Olmayan Testler

Tablo-1 deki değerler, birikimli dağılımların elde edilmesi için gruplandırlmış ve sonuçlar Tablo-2 de göster lmiştir. İlk kez Kolmogorov-Smirnov testinin kullanıma açıklanacaktır.

TABLO 1

16 Örneğe İlişkin Sıralanmış Maksimum Değerler

Dolaysız Yöntem	**Dolaylı Yöntem**
28,5396	22,3600
28,5396	23,8160
28,5396	24,0240
33,8983	25,2720
33,8983	27,7680
33,8983	29,9520
34,9809	32,0320
35,8047	33,9035
37,1294	34,1168
37,3840	34,6492
38,8794	38,8144
39,1774	42,1190
41,5847	45,7532
41,8712	50,3270
48,3148	52,2819
50,7219	56,0000
Ortalama 38,0558	**Ortalama** 35,8243

Tablo 2 deki iki seri arasında en büyük mutlak fark $\frac{4}{16}$ dır. Bu farkın payı, K_D ile gösterilir, $K_D = 4$ dür. Sigeel [5]'e bakınız. Siegel'in kitabındaki Tablo-L'den; $N = 16, \alpha = 0{,}01$ (güvenirlik) için $K_D = 16$ dır. Bu nedenle, her iki yöntemle bulunan dağılımların aynı ana küleden geldiği yargısına varılır.

Yukarıda uygulanan genyöntem küçük örnek testleri içindir. Büyük örnek testi belki aynı sonuçları verir. Ancak N=16 olduğu için küçük örnek testi kullanılmıştır.

TABLO 2

Dolaylı ve Dolaysız Yöntemlerin Birikimli Dağılımları

Optimal Değerler	Frekanslar		Birikimli Dağılımlar		Mutlak Farklar
	Dolaysız Yöntem	Dolaylı Yöntem	Dolaysız Yöntem	Dolaylı Yöntem	
22-24	0	3	0	0,1875	0,1875
25-27	0	1	0	0,25	$\frac{4}{16}=0,25$
28-30	3	2	0,1875	0,375	0,1875
31-33	0	1	0,1875	0,4375	0,1875
34-36	5	3	0,5	0,625	0,125
37-39	4	1	0,75	0,6875	0,0625
40-42	2	1	0,875	0,75	0,125
43-45	0	0	0,875	0,75	0,125
46-48	1	1	0,9375	0,8125	0,125
49-51	1	1	1	0,875	0,125
52-54	0	1	1	0,9275	0,0625
55-57	0	1	1	1	1

3- Renyi'nin İstatistikleri

x_1 , x_2 ,..... x_n , dağılımı F olan tesadüfi değişkenin n-birimli bir örneğinin değerleri ve F_n örneğin deneysel dağılım fonksiyonu olsun. Bunlara bağlı olarak A. Renyi [3] aşağıdaki üç istatistiği önermiştir.

$$\text{(2)} \quad \operatorname{Sup}_{F_n(x) \geqslant a} \left[F_n(x) - F(x) \right]$$

$$\text{(3)} \quad \operatorname{Sup}_{F_n(x) \geqslant a} \left\{ \left[F_n(x) - F(x) \right] / F_n(x) \right\}$$

$$\text{(4)} \quad \operatorname{Sup}_{F_n(x) \leqslant b} \left[F_n(x) - F(x) \right]$$

Kolmogorov-Smirnov testinde $[F_n(x) - F(x)]$ farkı, F(x)'in değerine bakılmaksızın aynı tartı ile ele alınmıştır. Başka bir deyişle, nisbi farklar değil, mutlak farklar sözkonusudur. (3) nolu Renyi istatistiğinde, $F_n(x)$'e göre nisbi farklar gözönüne alınmaktadır. butür bir istatistik, dolaylı ve dolaysız yöntemle elde edilen dağılımlar arasındaki farkların dağılımların alt ve üst uclarında değerlendirilmesinin söz konusu olduğu stokastik doğrusal programlamada özellikle faydalıdır.

TABLO 3

Renyi İstatistiğinin Değeri

	$[\,F_n(x) - F(x)\,] \,/\, F_n(x)$
	∞
	∞
	—1
	—1,33
	0,25
	0,0833
	0,1666
1/6 =	0,1666
	0,1333
	0,125
	0,0625
	0

Renyi-tür istatistiklerin gerçek dağılımları Z. Birnbaum ve B.P.Lientz [2] tarafından elde edilmiştir. Kendi gösterimleriyle,

(5) $P_1\ (n,a,c) = P\ [EQ\ (2) < c]$
(6) $P_2\ (n,a,c) = P\ [EQ\ (3) < c]$
(7) $P_3\ (n,b,c) = P\ [EQ\ (4) < c]$

Belirli örnek hacimleri, a ve b'nin değeriyle, belirli bir güvenirlik seviyesinde, 5 veya 6 veya 7 nolu eşitsizlikleri sağlayan en küçük c değerini ve aynı zamanda P_1, P_2 veya P_3 olasılıklarını veren tablolar bulmak olanaklıdır.

Örneğimizde, $F_n(x)$ dolaysız yöntemle, F(x) dolaylı yöntemle bulunan dağılımlar olarak ele alındığında, Tablo-2 nin kullanımı ile (3) nolu Renyi istatistiği bulunabilir.

İhtiyari seçilmiş bir a=0,8 değeri için Tablo-3 den,

$$\mathrm{Sup}_{F_n(x) > 0,8} \left\{ [F_n(x) - F(x)] \,/\, F_n(x) \right\} = \frac{1}{6} = 0,1666$$

bulunur. Birnbaum ve Lientz [2] tarafından verilen tabloda, $\alpha = 0,05$ için c=0,30 ve $P_2 = 0,964953$ dür. Bu da, heriki yöntemle bulunan dağılımların aynı ana kütleden geldiği sonucuna götürür.

KAYNAKLAR:

1- BABBAR, M.M., «Distribution of Solutions of a Set of Linear Equations with Applications to Linear Programming,» **Journal of American Statistical Association,** Vol. 50(1955), s.155-164.

2- BIRNBAUM-Z.W. ve LIENTZ, B.P., «Tabulations of the Exact Distributions of Some Renyi-Type Statistics,» Technical Report No. 53, University of Washington, 1968; **Journal of American Statistical Association,** Vol. 64 (Eylül 1969), s. 870-877 de de yayımlanmıştır.

3- RENYI, A., «On the Theory of Order Statistics.» **Acta Math. Acad. Sci. Hungarian,** Vol. 4 (1953) s. 191-231.

4- SENGUPTA, J.K., TINTNER, G. ve MILLHAM, C., «On Some Theorems of Stochastic Linear Programming with Applications,» **Management Science,** Vol. 10, No. 1 (Ekim 1963), s. 143-159.

5- SIEGEL, SINDNEY, *NonParametric Statistics.* McGraw-Hill Book Co., 1956 s. 128-130.

6- TINTNER, GERHARD, Stochastic Linear Programming with Applications to Agricultural Economics, » **Symposium on Linear Programmigng,** National Bureau of Standarts, Washington, D.C., Vol. J (1955), s. 197 vd.

7- -------, SENGUPTA, J. K. ve MORRISON, B. «Stochastic Linear Programming with Applications to Economic Models,» **Economica,** Vol. 30 (1963), s. 262-276.