

CEBİRDEKİ KAVRAMLARA YÖNELİK ÖĞRENME GÜÇLÜKLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Tuğrul KAR, Alper ÇİLTAŞ, Ahmet İŞİK

*Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü,
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Erzurum.*

Özet

Bu çalışmada, öğrencilerin matematik derslerinde karşılaştıkları “fonksiyon”, “birebir fonksiyon”, “örten fonksiyon”, “bağıntı”, “denklik sınıfı”, “kartezyen çarpım kümesi” ve “alt cisim” kavramlarına yönelik öğrenme güçlüklerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Çalışmanın örneklemini, 2009-2010 öğretim yılında Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı'nın ikinci sınıfındaki 166 öğrenci oluşturmaktadır. Çalışmada karma yöntem ve bu yöntem içerisinde de açıklayıcı desen kullanılmıştır. Çalışmada veriler araştırmacılar tarafından hazırlanan testten ve yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilmiştir. Verilerin analizi sonucunda, öğrencilerin temel kavramları tanımlamada, kavramlar için yaptıkları sözel açıklamaları matematiksel dili kullanarak ifade etmede ve kavramlar arasındaki farkı belirlemede güçlükler yaşadıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin bahsedilen kavramlara yönelik işlemsel bilgi düzeylerinin kavramsal bilgi düzeylerine göre daha ön planda olduğu belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matematik eğitimi, cebir, öğrenme güçlüğü

A STUDY ON THE LEARNING DIFFICULTIES FOR ALGEBRA CONCEPTS

Abstract

The aim of this study is to determine the learning difficulties students encounter when exposed to the concepts of “function”, “injective function”, “surjective function”, “relation”, “equivalence class”, “cartesian product set” and “subfield” in mathematics lessons. The sample of the study was composed of 166 students second year undergraduates from the department of primary mathematics education in Kazım Karabekir Education Faculty of Atatürk University in 2009-2010 academic year. Mixed method and explanatory design (in the framework of the mixed method) were used in the present study. In this study, data were collected from a test which is prepared by the researchers and semi-structured interviews. Data analysis showed that students had difficulty defining basic concepts; expressing their verbal explanations of these concepts in mathematical language; and determining the difference between the concepts. Regarding the concepts under study, the operational knowledge level of the students was found to be higher than their conceptual knowledge level.

Keywords: Mathematical education, algebra, learning difficulties

1. Giriş

Matematiksel kavramların soyut yapısı düşünüldüğünde bu tür kavramların tam anlamıyla kavranılmasının, öğrenenler açısından zor bir durum olduğu söylenebilir. Matematiksel kavramların öğrenilmesinde yaşanan güçlükler, matematik öğrenimi ve öğretiminin zor olarak algılanmasının kaynağını teşkil eden nedenler arasında gösterilebilir. Matematikte bir tanımın veya kavramın kalıcı olmasını sağlamak için, o tanımı içeriğinden habersiz olarak ezberlemek yerine, kendi matematik terimlerinin özelliğini bilerek öğrenmek gerekir (Dilber, Aksakallı, Karahan ve Bakkaloğlu, 2000). Matematikte tanım ve kavramlar bir bütün içerisinde yorumlanmalı ve öğrenilmelidir (Özdemir, 2000). Başka bir ifadeyle, kavramın arkasında yatan nedenlerin anlaşılması ayrıca kavramlar arası ilişkilerin kurulabilmesi, kavramsal öğrenme için kritik öneme sahiptir.

Matematiksel bilgi, kavram ve işlem bilgisi şeklinde araştırmacılar tarafından sınıflandırılmaktadır. İşlemsel bilgi, alıştırmaları çözmek için kullanılan işlem, kural bilgisi ve matematiği temsil etmek için kullanılan semboller bilgisidir (Van De Walle 2004). Kavram bilgisi herhangi bir öğrenme alanındaki ilkelerin, kuralların ve genellemelerin arasındaki karşılıklı ilişkilerin bilgisi olarak tanımlanır (Rittle ve Alibali, 1999). Baykul'a (1999) göre ise kavramsal bilgi, matematiksel kavramların kendileri ve bunlar arasındaki ilişkilerdir.

Matematikte kalıcı ve işlevsel bir öğrenme ancak işlemsel ve kavramsal bilginin dengelenmesiyle mümkün olabilir (Noss ve Baki, 1996). İşlemsel ve kavramsal bilgi arasındaki dengenin sağlanması ile kavramların öğreniminde arzu edilen başarı düzeyi sağlanmış olacaktır. Bu bağlamda hazırlanan matematik programlarında da kavramlar arası ilişkileri oluşturabilme becerisine ve yapılan işlemlerin nedenlerinin açıklanmasına önem verilmektedir. Bu durum hazırlanan farklı öğretim seviyelerindeki programlarda da belirtilmektedir. Örneğin, Soylu ve Aydın'a (2006) göre yeni hazırlanan İlköğretim Matematik Programı'nda kavramsal ve işlemsel bilgi arasındaki ilişkinin kurulmasına önem verilmiştir. Bu yapılırken öğrencilerin somut deneyimlerinden, sezgilerinden matematiksel anlamları oluşturmalarına ve soyutlama yapabilmelerine yardımcı olma amaçlanmıştır (Milli Eğitim Bakanlığı[MEB], 2006).

Somut deneyimlerden yola çıkılarak matematiksel kavramların öğrenilmesinin öğrencilerde kavramların kalıcılık düzeyini artıracak ön görülmektedir. Bu noktada sadece ilköğretim düzeyindeki öğretim programlarında değil, üniversite düzeyindeki programlarda da bu tür bir anlayış hâkim olmalıdır (Kar, 2010). Baştürk (2005) tarafından yapılan araştırmada, üniversite öğrencileri, yüksek matematiği çok soyut bulduklarını, ispatlayınız, yorumlayınız, gösteriniz şeklindeki sorulardan hiç hoşlanmadıklarını ifade etmişlerdir (Akt: Soylu ve Aydın, 2006). Öğrenilen kavramların sayısının fazlalığı ve mevcut bilgiler ile bu kavramları ilişkilendirmedeki yetersizlikler, üniversite düzeyinde, öğrencilerdeki öğrenme güçlüklerini daha da artırmaktadır.

Öğrenme güçlüğü çok geniş bir alanı kapsamsına rağmen matematikte öğrenme güçlüğü denildiğinde bu alana özgü bir takım yetersizlikler kastedilmektedir (Durmuş 2007). Matematik eğitimi literatüründe matematik öğreniminde karşılaşılan zorlukları ifade etmek için birçok terimin, çoğu zaman da birbirinin yerine, kullanıldığı görülmektedir. “zorluk, kavram yanılgısı ve hata” terimleri öğrencilerin matematik öğreniminde yaşadıkları güçlüklerin ifade edilmesinde en sık kullanılanlar arasında gelmektedir (Bingölbali ve Özmantar, 2009).

Herhangi bir konuda öğrenme güçlüğü yaşayan bir öğrencinin gelecek konularda başarıya ulaşması zordur (Dikici ve İşleyen, 2004). Tall’a (1993) göre ise, temel kavramların yetersiz olarak öğrenilmesi, öğrencilerde öğrenme güçlüklerini artıran önemli nedenlerden biridir. Matematik konularının güçlü bir sıralı yapıya sahip olduğu düşünüldüğünde temel kavramların öğreniminde yaşanan öğrenme güçlüklerinin bu kavramların üzerine inşa edilen kavramların öğrenimini de etkileyebileceği söylenebilir.

Üniversite düzeyindeki matematik programlarında yer alan birçok alan derslerinin öğretiminde “fonksiyon”, “bire-bir fonksiyon”, “örten fonksiyon”, “bağıntı”, “denklik sınıfı”, “kartezyen çarpım” ve “alt cisim” gibi kavramlar önemli yere sahiptir.

Bu tür kavramlara yönelik farklı öğretim seviyelerinde ve farklı örneklemeler üzerinde bir çok çalışma yapılmıştır (Dikici ve İşleyen, 2004; Güveli ve Güveli, 2010; Morali, Köroğlu ve Çelik, 2004; Tall, 1992; Zachariades, Christou ve Papageorgiou, 2002). Yapılan çalışmalarda öğrencilerin bu kavramlara yönelik sahip oldukları öğrenme güçlükleri belirlenmiştir. Buna karşın yurt içinde üniversite düzeyinde özelliklerde “bağıntı”, “denklik sınıfı”, “kartezyen çarpım kümesi” ve “alt cisim” kavramlarına yönelik öğrenme güçlüklerinin belirlenmesi üzerine çok fazla çalışma yoktur.

Öğrencilerin temel cebirsel kavram ve matematiksel işlemleri anlaması ve kullanması üzerine olan literatür, eğitimcilerinin okul öncesi dönemden başlayarak üniversite seviyesine varıncaya kadar birçok konuda öğrencilerin matematiğe dair ne tür öğrenme güçlükleri ile karşılaştıkları ve kavram yanılgılarının doğasının ne olduğu gibi hususlar hakkında öğretime yardımcı olacak şekilde araştırmalar yapmaktadırlar (Erbaş, Çetinkata ve Ersoy 2009; Özmantar, Bingölbali ve Akkoç 2008). Tatar ve Dikici’ye (2008) göre, **hangi branşta olursa olsun bütün öğretmenlerin anlattığı konu ile ilgili öğrencilerinin ne tür öğrenme güçlüklerine sahip olduğunu bilmesi, öğretim yaklaşımlarını seçmede fayda sağlayacaktır.** Ayrıca bu tür bir farkındalık öğrenme güçlüklerinin giderilmesine yönelik yapılacak olan çalışmalara da ışık tutacaktır. Bu amaçla çalışmada, ilköğretim matematik öğretmenliği ikinci sınıf öğrencilerinin “fonksiyon”, “bire-bir fonksiyon”, “örten fonksiyon”, “bağıntı”, “denklik sınıfı”, “kartezyen çarpım kümesi” ve “alt cisim” kavramlarına yönelik öğrenme güçlüklerinin belirlenmesi amaçlanmıştır.

2. Yöntem

Araştırmanın Modeli

Bu çalışmada karma yöntem ve bu yöntem içerisinde de açıklayıcı desen kullanılmıştır. Bu tür araştırmalarda, araştırmacılar öncelikle nicel verileri toplarlar ve analiz ederler, ardından bu verileri tamamlamak ve rafine edebilmek için nitel verileri toplarlar (Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2009). **Çalışmada** nicel veriler bir bilgi testinden nitel veriler ise yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilmiştir.

Örneklem

Araştırmanın örneklemini, Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı'nın ikinci sınıfındaki 166 öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmaya katılan öğrencilerin tamamına çalışmada analizi yapılan cebirdeki temel kavramlar, soyut matematik, genel matematik ve analiz derslerinde anlatılmıştır. Ayrıca öğrenciler, araştırmanın öncesinde lineer cebir dersinde de bu kavramlara yönelik öğrenim görmüştür.

Veri Toplama ve Analizi

Bu çalışmada “bağıntı”, “kartezyen çarpım kümesi”, “denklik sınıfı”, “alt cisim” “fonksiyon”, “birebir fonksiyon” ve “örten fonksiyon” kavramlarına yönelik üç problem hazırlanmıştır. Problemler, üniversite matematiğindeki kavramların öğrenilmesinde gerekli olan ve farklı öğretim kademelerinde sıklıkla karşılaşılan kavramlardan seçilmiştir. Çalışmada kullanılan problemler bulgular kısmında verilmiştir.

Testte yer alan problemlerin hazırlanması aşamasında ilgili literatür analiz edilmiş ve bu analizler ışığında problemler oluşturulmuştur. Ayrıca bu alanda uzman olan matematik eğitimcilerinin problemlere yönelik görüşleri de alınarak gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Testin güvenilirlik çalışması, 74 ilköğretim matematik öğretmenliği üçüncü sınıf öğrencisi ile yapılmıştır. Testin güvenilirlik değerinin hesaplanmasında testi yarılama yöntemi kullanılmış ve güvenilirlik değeri 0,73 olarak bulunmuştur. Bu haliyle problemler Lineer Cebir-I dersi I. Vize sınav soruları olarak öğrencilere sorulmuştur.

Öğrencilerin testte yer alan ilgili kavramlara yönelik düşüncelerini ve kavramlar arasındaki ilişkileri algılayabilme biçimlerini belirlemek amacıyla 15 öğrenci ile yarı-yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Mülakat yapılacak olan öğrenciler; uygulanan teste verilen cevaplar analiz edilip karşılaşılan güçlükler belirlenerek seçilmiştir. Daha sonra karşılaşılan güçlüklerle yönelik araştırmacılar tarafından hazırlanan açık uçlu sorular öğrencilere çalışmanın amacı belirtilerek yöneltilmiştir. Öğrencilerle yapılan mülakatlar kayıt altına alınmış ve transkript edilmiştir. Bu veriler, bulgular kısmında betimsel analiz yöntemi kullanılarak sunulmuştur.

Testte öğrenciler tarafından tanımlanması istenen “bağıntı”, “kartezyen çarpım

kümesi”, “denklik sınıfı”, “fonksiyon” ve “örten fonksiyon” şeklindeki kavramların her biri doğru ya da yanlış olması durumuna göre analiz edilmiştir. Benzer şekilde, test maddelerinin problem kısımlarının çözümleri de sonucun doğru ve yanlış olması durumuna göre analiz edilmiştir. Boş bırakılan ya da verilen cevabın analiz edilecek kadar açık olmadığı durumlar “diğer” başlığı altında toplanmıştır. Araştırmada elde edilen verilerin yorumlanmasında yüzde ve frekans değerlerinden yararlanılmıştır.

3. Bulgular ve Yorumlar

Kavramların Tanımlanmasına Yönelik Bulgular

Öğrencilerin “kartezyen çarpım”, “bağıntı”, “denklik sınıfı”, “fonksiyon” ve “örten fonksiyon” kavramlarına yönelik yapmış oldukları tanımlara ait dağılım Tablo 1’de verilmiştir.

Tablo 1: Öğrencilerin Yapmış Oldukları Tanımlara Ait Dağılım

	Kartezyen Çarpım Kümesi		Bağıntı		Denklik Sınıfı		Fonksiyon		Örten Fonksiyon	
	%	f	%	f	%	f	%	f	%	f
Doğru	63,9	106	44,6	74	27,7	46	66,9	111	58,4	97
Yanlış	27,1	45	40,9	68	47	78	25,9	43	32,6	54
Diğer	9	15	14,5	24	25,3	42	7,2	12	9	15

Tablo 1’deki verilere göre, “bağıntı” kavramını öğrencilerin %45’inden daha azı doğru olarak tanımlayabilmiştir. “denklik sınıfı” kavramı dikkate alındığında bu oran %30’un altındadır. Buna karşın “kartezyen çarpım kümesi”, “fonksiyon” ve “örten fonksiyon” tanımlarını doğru yapan öğrencilerin yüzdelik oranları daha yüksektir. Bu bulgular, öğrencilerin kavramları özellikle de “denklik sınıfı” ve “bağıntı” kavramlarını matematiksel dil ile ifade etmede güçlükler yaşadıklarına işaret etmektedir. Bu noktada sorulan bazı kavramlara yönelik olarak öğrencilerin yapmış oldukları yanlış tanımlamalar ve bunlara ait yarı yapılandırılmış mülakatlar şu şekildedir;

✓ Kartezyen Çarpım Kümesi: $A \times B$. A da B ye tanımlar
iki küme alın bu kümelere birincisinden alınan x gibi bir
bir elemanla ikincisinden alınan y gibi bir elemanın
oluşturduğu kümedir. $A \times B$ şeklinde gösterilir.
 $A \times B = \{x: y | x \in A \text{ ve } y \in B\}$

Şekil 1. Bir öğrencinin kartezyen çarpım kümesi tanımı için verdiği cevap

Bu öğrenci ile yapılan mülakat aşağıdaki gibidir;

Mülakatçı: Yapmış olduğunuz bu tanımda “ $f : A \rightarrow B$ A’den B’ye tanımlanan iki küme olsun” ifadesini kullandınız. Burada bahsettiğiniz f’ nin işlevi nedir?

Öğrenci: f bir fonksiyondur burada.

Mülakatçı: Tanımın devamında $A \times B = \{x : y \mid x \in A, y \in B\}$ şeklinde yazdığınızı ifadeyi açıklar mısınız?

Öğrenci: (x, y)’lerden oluşuyor demem lazımdı. İki noktayı yanlış yere koydum.

Mülakatçı: Kartezyen çarpım için yazmış olduğunuz bu ifadede fonksiyon kavramını hiç kullanmazken sözel olarak ifade ederken tanımda fonksiyon kavramından bahsetmişsin. Bunu nasıl açıklayacaksınız.

Öğrenci: Herhalde kartezyen çarpımın tanımında fonksiyon tanımı yer almıyormuş.

Yapılan bu mülakatta da görüldüğü gibi; bazı öğrenciler, matematiksel sembollerle kartezyen çarpım kümesi” tanımını yapmada ve “kartezyen çarpım kümesi” ile “fonksiyon” kavramı arasındaki farkı belirlemede güçlükler yaşamaktadırlar.

Bir öğrencinin “bağıntı” kavramı için yapmış olduğu tanım Şekil 2’de verilmiştir.

Bağıntı! $f: A \rightarrow B$ tanımlanmış bir fonksiyon olsun
Eğer fonksiyon 1. A'dan alınırsa bir elemanı B'ye gösterir
Bu fonksiyona A'dan B'ye bir bağıntı denir.
A B B şeklinde gösterilir.

Şekil 2. Bir öğrencinin bağıntı tanımı için verdiği cevap

Bu öğrenci ile yapılan mülakat şu şekildedir;

Mülakatçı: Bağıntı kavramı için yapmış olduğunuz tanım hakkında ne düşünüyorsunuz?

Öğrenci: Bağıntı demek ikisinin arasında bağlantı olması demek seçtiğimiz iki kümenin elemanları arasında. Burada da fonksiyonun olmaması gerekiyor. Burada seçtiğimiz iki küme var. x, A’nın ve y, B’nin elemanı olup bu tür ikililerin oluşturduğu kümedir.

Mülakatçı: Yapmış olduğunuz tanımda fonksiyon kavramını kullandınız. Bağıntı ile fonksiyon arasındaki ilişki hakkında neler söyleyebilirsiniz?

Öğrenci: Fonksiyon bağıntının alt kümesidir.

Yapılan bu ve diğer mülakat sonuçlarına göre bazı öğrencilerin, “kartezyen çarpım kümesi” ile “fonksiyon” kavramı arasındaki farkı belirlemede yaşadıkları güçlüklerin yanında, “bağıntı” ile “fonksiyon” arasındaki farkı belirlemede de güçlükler yaşadıklarını göstermektedir. Benzer güçlükler, “kartezyen çarpım kümesi” ile “bağıntı” kavramları arasındaki farkı belirlemede de görülmüştür. Örnek olması bakımından bir öğrencinin “kartezyen çarpım kümesi” kavramına yönelik yapmış olduğu tanım şu şekildedir;

“X ve Y farklı iki küme olsun. Bu farklı iki kümenin bütün bağıntılarına kartezyen çarpım kümesi denir.”

Tanımlarda yaygın olarak görülen eksiklikler, kavramların matematiksel dil ile ifade edilmesi noktasında yoğunlaşmaktadır. Örnek olarak “kartezyen çarpım kümesi” için yapılan tanımlarda, kavramın sembolik temsili kullanılmaktadır. Bir öğrenci tarafından yapılan tanım şu şekildedir;

“A ve B boştan farklı bir küme olmak üzere AXB kümesine kartezyen çarpım kümesi denir”

Benzer güçlükler “fonksiyon” ve “örten fonksiyon” kavramlarına yönelik yapılan tanımlarda da görülmüştür. Örneğin, “örten fonksiyon” kavramını sözel olarak açıklayabilen bir öğrencinin matematiksel sembollerle tanımlaması şu şekildedir;

“Her $y \in B$ için $\exists x \in A, \exists y \in B$ ise örten fonksiyon denir”

“denklik sınıfı” kavramına yönelik yapılan tanımlarda sıklıkla görülen önemli eksiklik ise, öğrencilerin bu kavram ile “denklik bağıntısı” arasındaki farkı ayırt edememesidir. Bir öğrenci tarafından yapılan tanım şu şekildedir;

“Denklik sınıfı, bir bağıntı geçişme, simetrik ve yansıma özelliklerini sağlıyorsa bu bağıntıya denklik sınıfı denir”.

Problemlerin Çözümlerine Yönelik Bulgular

Denklik bağıntısı ve alt cisim kavramlarına yönelik olarak hazırlanan problemlerin çözümüne ait dağılım Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2. Denklik Bağntısı ve Alt Cisim Problemlerinin Çözümüne Ait Dağılım

PROBLEMLER	Doğru		Yanlış		Diğer	
	f	%	f	%	f	%
Bir denklik bağıntısı kurarak tam sayılar kümesinin ayrışımını oluşturunuz.	81	48,8	54	32,5	31	18,7
$A = \{2^x : x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin adi anlamda toplama ve çarpma işlemlerine göre \mathbb{R} -reel sayılar cisminin alt cismi olup olmadığını araştırınız.	38	22,9	103	62	25	15,1

Tablo 2’deki verilere göre, öğrencilerin yarısından fazlası “Bir denklik bağıntısı kurarak tam sayılar kümesinin ayrışımını oluşturunuz” ve “ $A = \{2^x : x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin adi anlamda toplama ve çarpma işlemlerine göre reel sayılar cisminin bir alt cismi olup olmadığını araştırınız” sorularını doğru çözememiştir. Elde edilen bulgulara göre, öğrencilerin bu kavramlara yönelik başarı düzeylerinin düşük olduğu söylenebilir. Özellikle alt cisim kavramına yönelik hazırlanan problemin doğru çözülme başarısı daha düşüktür. Bu kavrama yönelik öğrencilerdeki başarısızlığın nedenlerini daha iyi görebilmek için öğrencilerle mülakatlar yapılmıştır. Alt cisim problemi için bir öğrencinin yapmış olduğu çözüm (Şekil 3) ve bu öğrenci ile yapılan mülakat şu şekildedir;

$$A = \{2^x : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}$$

toplama işlemine göre birim elemanı olmalı

$$2^x + 2^e = 2^x$$

$$2^e = 0 \Rightarrow e \notin \mathbb{R}, \text{ olduğundan toplama işlemine göre alt cisim değildir.}$$

birim eleman

$$2^x \cdot 2^e = 2^x \Rightarrow 2^e = 1 \Rightarrow e = 0$$

ters eleman

$$2^x \cdot 2^{x'} = e = 0 \Rightarrow x' \notin \mathbb{R}, \text{ olduğundan çarpma işlemine göre alt cisim değildir.}$$

Şekil 3. Bir öğrencinin alt cisim problemi için yapmış olduğu çözüm

Mülakatçı: Alt cisim kavramı ile ilgili problemi nasıl çözdüğünü anlatır mısın?

Öğrenci: İlk önce birim elemanı var mı diye baktım, birim elemanını bulduktan sonra kontrol için ters elemanına baktım.

Mülakatçı: Verilen kümenin alt cisim olup olmadığını araştırırken hangi şartların sağlanması gerektiği konusunda ne düşünüyorsunuz?

Öğrenci: Direk ters elemana bakıyorum yoksa alt cisim değildir diyordum. Diğer özelliklerine bakmıyordum.

Mülakatçı: Problemi çözerken “Çarpma işlemine göre alt cisim değildir, toplama işlemine göre alt cisim değildir” şeklinde kullandığın ifade hakkında ne düşünüyorsun?

Öğrenci: Birine bakmamız yeterli.

Yapılan bu ve diğer mülakat sonuçlarına göre; bazı öğrenciler verilen kümenin alt cisim olup olmadığını araştırırken tanımlanan iki farklı işlemin her birisi için ayrı ayrı alt cisim olup olmadığını araştırmaktadırlar. Ayrıca birim elemanın da kümeye ait ve 2^a ($a \in R$) şeklinde olması gerektiğini algılamada güçlükler yaşamaktadırlar.

Yapılan analizlerde, alt cisim probleminde ortaya çıkan başka bir husus, öğrencilerin kapalılık özelliğine bakmadan diğer özellikleri araştırmasıdır. Önemli bir diğer nokta, kapalılık özelliğine bakılırken 1 ve 2 gibi reel herhangi iki sayı ve kümeden alınan 2^1 , 2^2 elemanları için $2^1 + 2^2$ toplamının 2^a (a reel sayı) şeklinde yazılamayacağını düşünerek alt cisim olmadığını belirtmeleridir. Oysa bu toplamı 2^a şeklinde ifade etmek mümkündür. Bu durum, öğrencilerin tanımlanan kümeden elemanlar seçmede ve seçilen elemanların özelliklerini algılamada güçlükler yaşadıklarını göstermektedir.

“ $f : R^+ \rightarrow R$, $f(x) = \sqrt{3x} - 4$ fonksiyonunun varsa tersini bulunuz. Ters yoksa tersi olacak şekilde tanımlayınız.” sorusuna verilen cevaplara ait dağılım Tablo 3’te verilmiştir.

Tablo 3. Fonksiyon Sorusuna Verilen Cevaplara Ait Dağılım

$f : R^+ \rightarrow R$, $f(x) = \sqrt{3x} - 4$ fonksiyonunun varsa tersini bulunuz. Ters yoksa tersi olacak şekilde tanımlayınız		f	%
Tersi Vardır Diyen		97	58,43
Tersi Yoktur Diyen	Tersi Olacak Şekilde Tanımlayabilen	22	13,25
	Tersi Olacak Şekilde Tanımlayamayan	26	15,67
Diğer		21	12,65

Tablo 3’deki verilere göre, fonksiyon sorusuna “tersi vardır” diyerek yanlış cevap verenlerin oranı %58,43 iken fonksiyonun “tersi yoktur” diyerek doğru cevap verenlerin oranı %28,92’dir. Bu oranlar dikkate alındığında, öğrencilerin fonksiyonun tersini bulmada başarılarının düşük olduğu söylenebilir. Ayrıca bu problemde, “tersi

yoktur” cevabını verip fonksiyonun tanım ve değer kümelerini tersi olacak şekilde tanımlayabilen öğrenciler, çalışmaya katılan öğrencilerin %13,25’ini oluşturmaktadır. Bu bulgulardan, fonksiyonun tersinin olmadığı durumda tanım ve görüntü kümelerinin tersi olacak şekilde düzeltilmesi noktasında öğrencilerin güçlükler yaşadıkları söylenebilir. Bir öğrencinin fonksiyonun tersini bulmak için yapmış olduğu işlemler (Şekil 4) ve bu öğrenci ile yapılan mülakat şu şekildedir;

$$\begin{aligned}
 f: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} & f(x) &= \sqrt{3x} - 4 \\
 f^{-1}(x) &= y = \sqrt{3x} - 4 \\
 y + 4 &= \sqrt{3x} \\
 y^2 + 8y + 16 &= 3x \\
 \frac{y^2 + 8y + 16}{3} &= x \\
 f^{-1}(x) &= \frac{y^2 + 8y + 16}{3}
 \end{aligned}$$

Şekil 4. Bir öğrencinin fonksiyonun tersini bulmak için yapmış olduğu işlemler

Mülakatçı: Fonksiyonun tersini bulurken yaptığın çözüm hakkında ne düşünüyorsun?

Öğrenci: Fonksiyonun tersi yoktur. Sonradan bunun farkına vardım.

Mülakatçı: Fonksiyonun tersinin olmadığına nasıl karar verdin?

Öğrenci: Bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için birebir ve örten olması gerekir. Öncelikle birebir ve örten olup olmadığına bakmam gerekirdi. Fonksiyon burada birebir ve örten değildir. Çünkü fonksiyonun tanım kümesi \mathbb{R}^+ ’yi tamamen kapsamıyor.

Mülakatçı: Fonksiyonun birebir olmadığına nasıl karar verdin?

Öğrenci: $f: A \rightarrow B$ ’ye bir fonksiyon olsun. A ’dan alınan x_1 gibi bir elemanın B ’den alınan x_2 gibi bir elemana eşit olduğunda $f(x_1)=f(x_2)$ oluyorsa ya da $f(x_1) \neq f(x_2)$ iken $x_1 \neq x_2$ oluyorsa bu fonksiyona birebir fonksiyon denir. Sorudaki fonksiyon bu şartı sağlamamaktadır.

Bu ve diğer mülakat sonuçlarına göre öğrenciler, “ $f(x_1) \neq f(x_2)$ iken $x_1 \neq x_2$ ” olması şeklinde birebir fonksiyonu tanımlamaktadır. Ayrıca “ A ’dan alınan x_1 gibi bir elemanın B ’den alınan x_2 gibi bir elemana eşit olduğunda $f(x_1)=f(x_2)$ oluyorsa” şeklinde cevabın verilmesi, öğrencilerin seçilecek olan elemanların özellikleri hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıklarını göstermektedir.

Fonksiyonun tersinin olup olmadığını araştırırken öğrenciler çoğunlukla fonksiyonun birebir ve örten olması gerektiğini bildikleri fakat fonksiyonun tersinin olması için birebir ve örten olmasına neden gerek duyulduğunu açıklamakta güçlükler yaşadıkları görülmüştür. Ayrıca öğrenciler, verilen bir fonksiyonun birebir olup olmadığının araştırılmasında kullanılan “ $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ ” ve “ $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ ” olması şeklindeki ifadelerin $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ şeklindeki denk ifadeler olduğunu açıklamada güçlükler yaşamaktadırlar.

4. Tartışma ve Sonuç

Araştırmada, cebirde yer alan kavramların öğrenilmesinde gerekli olan ve öğrencilerin ilköğretim kademesinden üniversite düzeyine kadar birçok derste karşılaştıkları kavramlara yönelik öğrenme güçlüklerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Araştırmanın sonuçlarına göre, öğrencilerin temel kavramları tanımlamada, kavramlar arasındaki ilişkileri belirlemede güçlükler yaşamaktadırlar. Öğrencilerin yapılan tanımlardaki eksikliklerinin kavramları yeterince özümseyememelerinden kaynaklanabileceği düşünülebilir. Öğrencilerin problem çözümlerinde ilgili kavramlara yönelik işlem yapmalarına karşın, kavramın kendisini tanımlayabilmedeki güçlükleri bu duruma işaret etmektedir. Baki'ye (2008) göre kavram bilgisi sadece kavramı tanımak veya kavramın tanımını ve adını bilmek değil, aynı zamanda kavramlar arasındaki karşılıklı geçişleri ve ilişkileri görebilmektir. Bu tür ilişkilerin kurulabilmesi için öğretilen kavramların günlük hayattaki uygulamalarına yer verilmelidir. Bu noktada, problemler üzerinden hareket ederek kavramın öğrenilmesi sağlatılabilir.

Öğrenciler, ilköğretim kademesinden üniversite düzeyine kadar gördükleri “kartezyen çarpım kümesi”, “bağıntı” ve “fonksiyon” gibi güçlü sıralı yapıya sahip kavramların birbirleri ile olan ilişkilerini belirlemede güçlük yaşamaktadırlar. Bu sonuç Tate'nin (1991) yapmış olduğu çalışmanın sonuçlarını desteklemektedir. Altun'a (2008) göre, matematik konuları güçlü bir sıralı yapıya sahip olduğundan herhangi bir kavram onun ön şartı durumundaki diğer kavramlar kazandırılmadan öğrenilemez. Kavramlar özümsemmeden, diğer kavramların öğretiminin yapılması çalışmada bazı öğrencilerin belirtilen kavramlar arasındaki ilişkileri kuramamalarının en önemli nedeni olarak görülebilir.

Çalışmadaki problemlere yapılan çözümler dikkate alındığında öğrencilerin verilen küme üzerinde, kapalılık özelliğine bakmadan işlemler yaptıkları ve kümeden seçilecek elemanların özelliklerine yeterince dikkat etmedikleri tespit edilmiştir. Morali, Köroğlu ve Çelik (2004) yapmış oldukları çalışmada, öğrencilerin bir kısmının, üzerinde bağıntının tanımlandığı kümenin özelliklerini göz önüne almadan işlemler yaptıklarını tespit etmiştir. Bu çalışmada benzer durum “bağıntı” kavramına ek olarak “alt cisim” probleminin çözümünde de görülmüştür.

Öğrencilerin, bir fonksiyonun tersinin olması için birebir ve örten olma şartlarını

sağlaması gerektiğini bilmesi buna karşın fonksiyonun tersinin bulunması için birebir ve örten olup olmadığının araştırılmasının nedenlerini açıklayamaması kavramsal bilgi düzeyinde yapılanların özümsemediğini göstermektedir. Bu durum Eisenberg'in (1991) yapmış olduğu çalışmanın sonuçları ile paralellik göstermektedir.

İlköğretim Matematik Programı'nda (2006) matematik eğitiminin genel amaçları içerisinde "Matematiksel düşüncelerini mantıklı bir şekilde açıklamak ve paylaşmak için matematiksel terminoloji ve dili doğru kullanabilecektir" şeklinde maddeye yer verilmektedir. Bu tür bir amacın sağlanabilmesi için öğretim ortamlarında öğretmenlerin matematiksel dili etkili kullanmaları gereklidir. Bu noktada Aydın ve Yeşilyurt'a (2007) göre matematik öğretmenlerinin matematiksel dili etkili kullanmaları öğrencilerin dersi anlamalarını daha da kolaylaştırabilir. Matematiksel dilin kullanımına verilen öneme rağmen bu çalışmada, öğrencilerin kavramlar için yaptıkları sözel açıklamaları, matematiksel dili kullanarak ifade etmede güçlükler yaşamaları sonucu, Moore'nin (1994) belirtmiş olduğu "öğrenme güçlüklerinin matematiksel dil ve notasyonların kullanımındaki yetersizlikten kaynaklandığı" sonucunu desteklemektedir. Ayrıca hizmet öncesi dönemde kavramların matematiksel dil ile ifade edilmesinde yaşanan bu güçlüklerin, hizmet içi dönemde öğrenme ve öğretme faaliyetlerini olumsuz yönde etkileyeceği düşünülmektedir.

Tall (1993) matematikte öğrenme güçlüklerinin temelinde, kavramların yetersiz bir şekilde kavranmasının yer aldığını belirtmiştir. Işık ve Çiltas'a (2008) göre, kavramsal öğrenmenin sağlanabilmesi için matematiğin günlük hayatla ilişkilendirilecek projeler ile anlatılması ve yaşantı yoluyla öğrenilmesi-öğretilmesi sağlanmalıdır. Bu noktada çalışmada yer alan kavramların öğrenciler tarafından özümsemesi için günlük yaşam durumları ile ilişkilerinin kurulmasına yönelik problemlere ve kavramlar arasındaki ilişkileri fark ettirecek etkinliklere daha fazla yer verilmelidir. Bu sayede kavramların kalıcılık düzeyi artırılabilir ve kavramlar arası geçişlerde yaşanan zorluklar giderilebilir.

5. Kaynaklar

1. Altun, M. (2008). Liselerde matematik öğretimi. Bursa: Aktüel Yayıncılık, 1. Baskı.
2. Aydın, S. ve Yeşilyurt, M. (2007). Matematik öğretiminde kullanılan dile ilişkin öğrenci görüşleri. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, 6(22), 90-100.
3. Baki, A. (2008). Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık, 4. Baskı.
4. Baykul, Y. (1999). Primary mathematics education. Ankara: Turkey, Ani Printing Pres, 35-45.
5. Bingölbalı, E. ve Özmantar, M. F. (2009). İlköğretimde matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri: matematiksel kavram yanılgıları sebepleri ve çözüm arayışları. Ankara: Pegem Akademi, 1. Baskı.
6. Büyüköztürk, Ş., Çakmak, E. K., Akgün, Ö. A., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2009). Bilimsel araştırma yöntemleri. Ankara; Pegem Yayıncılık, 3. Baskı.

7. Dikici, R. ve İşleyen, T. (2004) Bağntı ve fonksiyon konusundaki öğrenme güçlüklerinin bazı değişkenler açısından incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 12(1), 105-116.
8. Dilber R., Aksakallı A., Karahan İ. H. ve Bakkaloğlu Ö. F. (2000). Fizik konularının unutulma süreci üzerine bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi, IV. Fen Bilimleri. Eğitimi Kongresi*, 354-358, Ankara.
9. Durmuş, S., (2007). Matematikte öğrenme güçlüğü gösteren öğrencilere yönelik öğretim yaklaşımları. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, Haziran, 76-83.
10. Eisenberg, T. (1991). Function and associated learning difficulties. D. O. Tall(Eds.) *Advanced Mathematical Thinking*.
11. Erbaş, A. K., Çetinkaya, B. ve Ersoy, Y. (2009). Öğrencilerin basit doğrusal denklemlerin çözümünde karşılaştıkları güçlükler ve kavram yanlışları. *Eğitim ve Bilim*, 24(152), 44-59.
12. Güveli, E. ve Güveli, H. (2002) Bağntı, fonksiyonun tanımı, bire-bir fonksiyon ve örten fonksiyon konularında lise-1 düzeyinde kavram yanlışlarının tespiti, *ODTÜ, V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, Ankara, 1019-1025.
13. Işık, A. ve Çiltaş, A. (2008). Matematik eğitiminde işlemsel ve kavramsal öğrenme. 7. *Matematik Sempozyumu Sergi ve Şenlikleri*, 13-15 Kasım, İzmir.
14. Kar, T. (2010). Lineer cebirde probleme dayalı öğrenme yönteminin öğrencilerin akademik başarıları, problem çözme becerileri ve yaratıcılıkları üzerine etkisi. Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.
15. Milli Eğitim Bakanlığı, (2006). İlköğretim matematik 6-8. sınıflar öğretim programı ve kılavuzu. Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara.
16. Moore, R. C. (1994) Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.
17. Moralı, S., Köroğlu, H. ve Çelik, A. (2004). Buca eğitim fakültesi matematik öğretmen adaylarının soyut matematik dersine yönelik tutumları ve rastlanan kavram yanlışları. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 161-175.
18. Noss, R. & Baki, A. (1996). Liberating school mathematics from procedural view. *Journal of Hacettepe Education*, 12, 179-182.
19. Özdemir, H. B. (2000). Matematik öğretimde tanım, terim ve sembollerin önemi, *H.Ü. Fen Bilimleri Eğitimi Kongresi Sempozyumu*, 19-20 Eylül, İzmir, 647-649.
20. Özmantar, M. F., Bingölbali, E. ve Akkoç, H. (2008). Matematiksel kavram yanlışları ve çözüm önerileri. Ankara: Pegem Akademi, 1. Baskı.
21. Rittle-Johnson, B. & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 99, 175-189.
22. Soylu, Y. ve Aydın, S. (2006). Matematik derslerinde kavramsal ve işlemsel öğrenmenin dengelenmesinin önemi üzerine bir çalışma. *Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi*, 8(2).
23. Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: function, limits, infinity and prof. Published in Grouws D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York, 495-511.
24. Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus, proceedings of working group 3 on students' difficulties in calculus. *ICME-7*, Quebec, Canada, 13-28.

25. Tatar, E. ve Dikici, R. (2008). Matematik eğitiminde öğrenme güçlükleri. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 5(9), 183-193.
26. Tate, W. F. (1991). **An evaluation of the function knowledge of a selected group of prospective secondary mathematics teachers**, (Unpublished Doctoral Dissertation), University of Maryland College Park.
27. Van De Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally*. USA: Pearson Education, Inc., fifth edition.
28. Zachariades, T., Christou, C., & Papageorgiou, E. (2002). The difficulties and reasoning of undergraduate mathematics students in the identification of functions. Proceedings in the 10th ICME Conference, Crete, Greece.