

DERS KİTAPLARINDA FONKSİYON KAVRAMI: TÜRKİYE VE FRANSA ÖRNEĞİ

İlyas YAVUZ, Savaş BAŞTÜRK

Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, OFMAE Bölümü, İstanbul.

Özet

Bu çalışmanın amacı, ders kitaplarında fonksiyon kavramı ile ilgili sunulan matematik organizasyonlarını ortaya koymaktır. Doküman analizi yöntemi kullanılarak yapılan bu çalışmada iki Türk iki de Fransız ders kitabı karşılaştırmalı olarak analiz edilmiştir. Ders kitaplarında öğretim programlarından kaynaklanan farklılıklar vardır. Fakat bunların dışında da her iki ülkede ortak olarak kullanılan tanım ve özelliklerle ilgili matematik organizasyonlarında da önemli farklılıklar olduğu saptanmıştır. Özellikle Fransız ders kitaplarında çok farklı problem tiplerine yer verildiği ve dolayısıyla zengin bir içeriğin sunulduğu dikkat çekmektedir. Ayrıca Türk ders kitaplarında kontrol yapısına hiç yer verilmezken, Fransız ders kitaplarında bu durumun önemsendiği görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Ders kitabı, fonksiyon kavramı, matematik organizasyonu

THE CONCEPT OF FUNCTION IN TEXTBOOKS: THE TURKISH AND THE FRENCH SAMPLES

Abstract

The aim of this study is to present mathematics organizations related to the notion of function in textbooks. In this study which is carried out by using document analysis method, two Turkish and two French textbooks are analyzed by comprising to each other. The results of the study revealed that in the analyzed textbooks, there are many differences from the curriculums. However; apart from those differences it is also determined that mathematics organizations related to the definitions and properties used in both countries differ from one another. Especially, it attracts the attention that the French course books include varied kinds of problems and because of it they present a rich content. Moreover, while in the Turkish textbooks control structure is not included, in the French textbooks it is considered important.

Keywords: textbook, notion of function, mathematic organization

1. Giriş

Eğitim ve öğretimde ders kitaplarının yaygın olarak kullanılmasına rağmen, sınırlı sayıda araştırmacı dikkatlerini matematik ders kitaplarına ve matematiksel içeriklerine yoğunlaştırmıştır. Bunun en önemli sebeplerinden biri, öğrencilerin matemati-

ği nasıl öğrendiklerini anlamaya çalışırken, öğretmenlerin ders kitaplarını nasıl ve ne amaçla kullandıkları üzerine odaklanılmış olunması olabilir. Bu iddiaya katılmakla birlikte, ders kitaplarının incelenmesinin de ihmal edilemez bir gerçek olduğu açıktır. Birçok ülkede ders kitapları öğretme/öğrenme için kullanılan araçların başında gelmektedir (örneğin, 1-4). Sheldon (2) bu durumun başlıca sebebi olarak öğretim materyali hazırlamanın zorluğu ve çok zaman almasını göstermektedir. Skierso (5), birçok öğretmenin ders kitaplarını kelimesi kelimesine kullandığını ya da uyguladığını dile getirmektedir. Bunun yanında Rymartz et Engebretson (6) ders kitaplarının öğretimin kalitesini doğrudan ve büyük ölçüde etkilediğini dile getirerek; öğretmenlerin, ders kitabı kullanarak kendilerini öğrencilerin yanında daha motive olmuş ve güvende hissettiklerini ifade ettiklerini söylemektedir.

Literatürde ders kitaplarının pek çok amacı ve özellikleri belirtilmektedir: ders kitapları öğretilecek olan bilgilerin temelini izah eder (7), öğretme ve öğrenme için etkili araçlardır (8), okul matematiğini özetlere ve sınavlara benzer şekilde tanımlar (9), gelişmekte olan ülkelerde etkili öğrenme için gereklidir (10) ve sınavlarla değerlendirilmelerle beraber kontrol işlevi görür (11).

Herbst (12) ders kitabı analizlerini içsel ve dışsal değerlendirmeler olmak üzere ikiye ayırmaktadır. Dışsal değerlendirmeler ders kitabını “eğitim sistemi içinde önemli bir araç” ve “teknolojik bir ürün ya da öğrenilecek matematiğin temeli” olarak kabul eder. Bu tür bir analiz, ders kitaplarını eğitim sistemine ve matematikçilerin matematiğine bağlar. Ders kitaplarına dair dışsal değerlendirmelerde, pek çok konu arasından özellikle aşağıdaki noktaların altı çizmiştir:

- Öğretmenler ders kitaplarını ödev vermek için ana kaynak ya da tek kaynak olarak kullanırlar ve göreve yeni başlayan öğretmenler deneyimli öğretmenlere göre ders kitabından daha çok yararlanırlar (13, 14, 15).
- Farklı ülkelerde işlenen bir konu illaki aynı önem derecesinde vurgulanarak ve aynı yöntemlerle sunulmaz (16).
- Öğretmenlerin, öğrencilerin öğrenmeleri ve ders kitapları kullanımı ile ilgili geniş bir özgürlük alanı vardır, bu yüzden ders kitabı içeriğiyle öğrencinin başarısı arasındaki ilişkiyi direk olarak görmek çok zordur (17, 18, 19).

İçsel değerlendirmelerde ise, tam aksine, ders kitaplarını “bilginin oluşturulduğu yer” olarak kabul eder; ders kitabındaki öğelerin (örneğin diyagramlar, tablolar, örnekler ve açıklamalar) etkileşimleri, konuların geçici ve kalıcı boyutları arasındaki zıtlığın bir ürünü olarak görülür. Ders kitaplarının içsel değerlendirmelerine dair örnekler Otte (20) ve Herbst (12) tir ki Otte, matematik ders kitaplarındaki görseller ve açıklamalar arasındaki ilişkiyi analiz etmiştir. Herbst de, sayı doğrusunu gerçek sayıların bir benzetmesi olarak analiz etmiştir.

Öğrencilerin ders kitaplarından öğrendikleri ve öğrendiklerinin uygulanabilirliği

okul içeriğiyle (öğretmen, sınıf arkadaşları, ders ve ödevler) sağlandığından, ders kitapları olası bir öğrenme kaynağıdır. Dolayısıyla “planlanan müfredatın” bir ifade edilmiş tarzıdır ve bu yüzden ders kitabı içeriğinin analizi önemlidir. Eğer öğrencilerin matematik derslerinde ders kitabının tüm bölümleri verilen sırada işlenseydi, öğrenciler ne öğrenirlerdi? Eğer öğrenciler ders kitaplarındaki tüm alıştırmaları ve problemleri çözmek zorunda olsalardı, ne öğrenirlerdi? Ders kitabında sunulan belli başlı matematiksel kavramları öğrenirler miydi? Bu öğrenmeleri ilerdeki matematik çalışmalarında işe yarar mıydı? Bu tip sorulardan hareketle bu çalışmanın amacı, fonksiyon kavramının bu tarz bir analizinin nasıl olduğunu tanımlamak, öğretme-öğrenme ve matematiksel kavramların anlaşılmasına dair zorlukların keşfedilmesine katkıda bulunmaktır. Ders kitaplarının bilginin oluşturulduğu yer olarak kabul ettiğimizden çalışmamızda sadece içsel değerlendirmeler bağlamında bir inceleme söz konusu olacaktır.

2. Teorik Çerçeve

Balacheff’in kavramlar teorisi ile Chevallard’ın antropolojik didaktik teorisi, seçilen ders kitaplarında fonksiyon kavramının içsel olarak analiz edilebilmesi için uyarlanmıştır. Takip eden bölümlerde çalışma için neden fonksiyon kavramının tercih edildiği ve bu çalışmanın amaçları için, Balacheff’in ve Chevallard’ın çalışmalarının nasıl uyarlandığından bahsedilmektedir.

2.1. Kavramlar (Conceptions)

Bu çalışmada Fransızların yapmış olduğu ayırımdan yola çıkarak; ‘İnsan aklının erebileceği olgu, gerçek ve ilkelerin bütünü’ anlamına gelen ‘bilgi’ (know) kelimesi yerine, öğrencilerin kişisel birikimlerinden ayırt etmek için ‘bilme’ (knowing) kelimesi kullanılacaktır. İki kavramında soyut birikimlere işaret etmesine rağmen ‘bilme’ler kişilere özgüdür. Farklı durumlar özne (örneğin bir insanın bilişsel boyutu) ve çevre arasında farklı etkileşimler doğurur ve sonuçta farklı ‘bilme’lere yol açar. Farklı etkileşimler, bir özneye pek çok ‘bilme’lerin aynı zamanda var olmalarını açıklar. Çelişkili bilmeler ya öznenin geçmişinde farklı zamanlarda, ya da farklı durumların farklı bilmeler doğurmasının sonucu olarak, eş zamanlı var olabilirler.

Bu çelişkili bilmelerin varlığı ile ilgili sorunu çözmek için Balacheff ve Gaudin (21) kavramlarla ilgili bir model geliştirmişlerdir. Bu modele göre kavramlar (P, R, L, Σ) şeklinde dört bileşenden oluşan bir notasyonla ifade edilmektedir. Bu notasyonda;

- P bir grup problemi,
- R bir grup operatörü,
- L temsili bir sistemi,
- Σ de bir kontrol yapısını temsil etmektedir.

Problemler, içerikle ilgili olarak öğrencilerin durumu gözlemlenerek tanımlanır.

Buradaki ölçüt içeriğe nazaran, öğrencilerin durumlarının kendilerine özgümü yoksa genel bir durum mu arz ettiğinin sorgulanmasıdır. R ve L klasik bir tarzda tanımlanır, R problemlerin çözüm yolları ya da prosedürleri organize edildiğinde hareket noktaları olarak, L ise prosedürlerin formüle edilmesinde ve kullanılmasında gerekli olan araçlar olarak ifade edilmektedir. Σ kontrol yapısı çoğu zaman dolaylı olarak açıklanır ve bir grup organize edilmiş kriter olarak tanımlanır ki bu kriterler bir hareketin konu ile ilgili olup olmadığını ya da bir problemin çözülüp çözülmediğine karar verme de kullanılır.

Bununla birlikte, Balacheff kavramın nitelendirilmesinin kişinin etkileşimde bulunduğu çevreye dayandırılmasının özneye dayandırılmasından geri kalmadığını tekrarlamaktadır. Tam tersine bir öznel çevre sisteminin nitelendirilmesini sağlar ki bu sistem aktif gönderici (özne-subjekt) ve reaktif alıcıya (çevre-milieu) operatörlerin oluşumu ve kullanımı noktasında imkan sağlar. Kontrol sistemi öznenin araçlarına bir hareketin yeterliliği ve geçerliliği konusundaki kararları ifade etme fırsatı tanır, aynı zamanda çevrenin kriterlerine de geri bildirim seçme konusunda karar verme hakkını verir. Sonuç olarak; eğer biz “bilmeyi” aynı içeriği olan bir grup kavramlar olarak adlandırsak bilmenin geçerliliğinin alanı hakkında konuşabiliriz. Ama aynı zamanda eğer bir kavram bir görüşten bir görüşe değişiyorsa onun çelişkili niteliğini de kabul edebiliriz.

Bu görüş operatörlerle, temsillerle ve çalışmayı organize etmek için gerekli olan kontrol stratejileriyle beraber öğrencilerin karşılaşmış olduğu problemlerdeki varyasyonlar, fonksiyon kavramlarının farklı şekillerde nitelendirilmesine yol açabilir. Örneğin Newton’un karşılaşmış olduğu problemler, genelde fiziksel deneylerle alakalıydı ki bu Dirichlet’in karşılaştığı problemlerin tam tersiydi. Dirichlet, Fourier serisinin yakınsaklığını incelerken farklı grup operatörlere, temsillere ve kontrol yapılarına ihtiyaç duymuş ve kullanmıştır. Bu durum, Newton ve Dirichlet’in iki farklı fonksiyon kavramıyla çalışmalarını mümkün kılmıştır. 20. yy’ın başlarında, matematiğin temellerini kurma isteği ve küme teorisi’nin ortaya çıkışı; diğer bir fonksiyon kavramı tanımının ortaya çıkmasıyla sonuçlanan farklı problemlere, operatörlere ve kontrol sistemlerine yol açmıştır (22).

Yukarıda ifade edilenler göz önünde bulundurulduğunda, bu nitelendirmeye bir fikrin farklı kavramlarının aynı anda var olabileceği fikrine ulaşılabilir. Aynı fikrin farklı kavramlarını bilmenin istenen bir şey olup olmadığı sorulabilir; ya da öğrencinin bu kavramları bağdaştırmaya çalışırken karşılaşma ihtimali bulunan belli başlı problemlerin olup olmadığı; ya da öğrenme alanında pek çok kavramın ortaya çıkmasını sağlayan öğretim metotlarının olup olmayacağı sorgulanabilir. Bunlar bir bireyin öğrenimini incelerken, bu çalışma çerçevesinde tartışılacak teorik problemlerdir; Bu yüzden; ders kitabı analizine kavramlarla ilgili bu modelin transfer edilmesi sorun çıkarabilir. Fakat Balacheff aynı zamanda, pratik yapma ile kavramların birbirini tamamlayan iki alan olduğunu ve bu yüzden de paylaştıkları pratik yapma alanı açısından ders kitaplarının analizinin aslında o tarz pratiklerin yönlendirdiği kav-

ramlar hakkında bilgi verebileceğini öne sürmektedir. Problemler ve kavramlar birbirini tamamlayan bir ikili olduğundan (bir taraftan kavramlar nitelendirilmelerinin bir parçası olarak problemlere ihtiyaç duyarlar; diğer taraftan da problemler çözümlerine katkı sağlayan ve tabii ki çözümün alt yapısını hazırlayan kavramlarla anlam kazandırır), problemlerin analizi, Balacheff'in kavramlar teorisini kullanmak için uygun görünmektedir.

2.2. Antropolojik Didaktik Teorisi

Chevallard (23) tarafından geliştirilen *Antropolojik Didaktik Teorisi* matematiksel bilginin genel bir epistemolojik modelini sunar. Bu modele göre matematiksel aktivitenin iki ayrılmaz boyutu tanımlanmıştır. Birincisi, *problem tipleri* (types of problems) ve bunların çözümünde kullanılan *tekniklerden* (techniques) oluşan *uygulama bloğudur* (practical block). Chevallard'a göre matematik yapmak verilen farklı tiplerdeki problemler üzerinde çalışılmasını içerir. Örneğin; lisede fonksiyonların limiti ile ilgili muhtemel problem tipleri olarak: bir fonksiyonun limitinin hesaplanması, limitin varlığının gösterilmesi, fonksiyonun limiti kavramının tanımlanması, bir ispatın geçerliliğinin kontrol edilmesi vb. örnekler verilebilir. Burada teknik kelimesi problematik bir görevle uğraşılırken yapılanları ifade eden ve dolayısıyla çözüm yolları şeklinde ifade edebileceğimiz bir anlamda kullanılmaktadır. Bir fonksiyonun limitinin hesaplanması (fonksiyonun türüne ve veriliş şekline göre), ispat yapma ya da bir tanıma ulaşma vb. durumlarda farklı teknikler uygulanır. Bazı teknikler cebirsel doğaya sahiptir; bazıları ise çok bilindik ve teşhisi kolay iken bazıları değildir. Bir problem tipinin var olabilmesi için mutlaka onunla ilgili en az bir tekniğin olması gereklidir. Bir problem tipi için birden fazla teknik var olduğunda hangisinin daha ekonomik ve daha etkili olduğu incelenir ve müfredat hazırlama komisyonu tarafından ön plana çıkarılır.

Matematiksel aktivitelerin ikinci boyutunda ise *uygulama bloğunun* yorumlanması ve doğrulanması için gerekli matematiksel söylemi sağlayan matematiksel aktivitenin *bilgi bloğu* (knowledge block) yer alır. Bu söylem doğrudan kullanılan teknikle ilişkilendirilen teknoloji (technology) boyutu ve uygulamanın derinlemesine doğrulamasını inşa eden teori (theory) boyutu olmak üzere iki düzeyde yapılandırılır. Bu yüzden, örneğin; fonksiyonların limitinin hesaplanmasını " $\epsilon - \delta$ " tanımı ya da belirsizliklerin elenmesi gibi farklı teknolojik içeriklerle açıklayabiliriz. Başka bir ifade ile burada kullanılan teknoloji terimi tekniklerin dayandığı temel argümanlardır. Dolayısıyla teknikleri açıklamak ve gerçekliğine ikna etmeye yarar. Genel olarak matematik organizasyonundaki teknolojiler, tanım, teorem ve özelliklerden oluşur. Fakat teknik ile teknolojiyi birbirinden ayırt etmek her zaman kolay değildir. Örneğin Venn Şemasıyla ifade edilen bir fonksiyonda bir elemanın görüntüsünü bulurken teknik ile teknoloji bütünleşmiş durumdadır. Buradaki teknoloji "bir elemanın görüntüsü" tanımıdır. Eğer problem tipimiz "cebirsel olarak verilen bir fonksiyonun değişkenliğini incelemek" ise tekniklerden birisi fonksiyonun birinci türevinin işaretini incelemek olabilir. Bu tekniği kullanırken; önce fonksiyonun birinci türevi bulunur, sonra birinci türevin işaret tablosu oluşturulur, daha sonra da tablo değişkenlik tanımından yararlanılır.

rak yorumlanır. Burada kullanılan tekniğin ilk iki etabı, ilgili teknolojiden ayrılmaktadır. Fakat son aşamada işaret tablosunu yorumlarken teknik ile teknoloji birbirleriyle bütünleşmiş durumdadır.

Dolayısıyla matematiksel bir aktivitenin ana elemanları problem tipleri, teknikler, teknolojiler ve teorilerden oluşur. Bunlar aynı zamanda matematiksel bilginin tanımlanmasında da kullanılırlar, öyle ki bu bilgi aynı zamanda bu aktivitenin bir yöntemi ve ürünüdür. Problem tipleri, teknikler, teknolojiler ve teoriler; *matematiksel organizasyonlar* (mathematical organisations) olarak isimlendirilen yapıyı biçimlendirilir. Chevallard, öğretmen pratiğini incelerken *matematik organizasyonu* ve *didaktik organizasyonu* kavramlarını kullanmış ve bu kavramların birbirinden ayrı düşünülmesi gerektiğine dikkat çekmiştir. *Matematik organizasyonu*, sınıfta o kavramla ilgili yapılabilecek tüm işler (etkinlikler, uygulamalar, problemler, vb.) olarak ifade edilmiş, *didaktik organizasyonu* ise o kavramın öğretmen tarafından veriliş biçimi şeklinde dile getirilmiştir. Yani öğretmen tarafından var olan tüm problem tipleri içerisinde yapılan seçimler ve bu seçilenlerin sıralamasıdır. Burada şunu da ifade etmekte yarar var. Araştırmalarda genellikle matematik organizasyondaki problem tipleri ve bunlara ilişkin teknikler incelenmektedir. Çünkü ancak bu ikisini programlarda, ders kitaplarında ya da öğretmen pratiğinde direk olarak görebilmekteyiz.

Sonuç olarak, bu çalışmada yukarıda açıklanan teorik çerçeveler yardımıyla şu tip sorulara cevap aranacaktır: Ders kitaplarında mevcut olan problem tipleri ve teknikler tespit edilerek hangi kitapta hangi problem tipleri ön plana çıkarılmış? Neden? Öğretim programına uygun olduğu halde bazı problem tipleri ders kitabında neden yer almıyor? Kitaplarda kavramın öğrenimi ile ilgili nasıl bir kontrol yapısı sunulmaktadır? Bu sorulardan yola çıkarak iki ülke ders kitaplarında fonksiyon kavramıyla ilgili sunulan matematik organizasyonlarında benzer ve farklı yönleri tespit edilmiş olacaktır.

3. Yöntem

Araştırmada nitel analiz yöntemi olan doküman inceleme yöntemi kullanılmıştır. Doküman incelemesi, araştırılması hedeflenen olgu ya da olgular hakkında bilgi içeren materyallerin analizini kapsamaktadır. Dokümanlar, nitel araştırmalarda etkili bir şekilde kullanılması gereken önemli bilgi kaynaklarıdır. Bu tür araştırmalarda, araştırmacı, ihtiyacı olan veriyi, gözlem veya görüşme yapmaya gerek kalmadan elde edebilir (24).

Araştırma kapsamında analiz edilmek üzere toplam dört kitap seçilmiştir. Bunlardan iki tanesi Fransız iki tanesi de Türk ders kitabıdır. Farklı ülkeler arasından Fransız ders kitaplarının tercih edilmesinde, araştırmacının doktora çalışmalarını Fransa'da yapmış olması ve Fransız eğitim sistemini yakından tanımış olması etkili olmuştur. Fransa'da 2000 yılında, ülkemizde ise 2005 yılında lise öğretim programlarında son değişiklikler yapılmıştır. Seçilen ders kitaplarının hepsi son yapılan değişikliklerden

sonra basılan kitaplar arasında bulunmaktadır. Fransız ders kitaplarını seçerken öğretmenlere informal bir anket uygulanmış ve birçok ders kitabı arasından en çok kullanılan iki tanesi tercih edilmiştir. Türk ders kitapları ise 2007 ve 2008 yıllarında MEB tarafından ücretsiz olarak okullara dağıtılan kitaplardan oluşmaktadır.

Fonksiyon kavramı matematiğin en temel kavramlarından birisidir ve analizin birçok kavramı da bu kavram üzerine inşa edilmektedir. Buna karşın literatüre bakıldığında fonksiyon kavramı en fazla kavram yanlışlarının ve öğrenci zorluklarının olduğu kavramlardan birisidir (25). Dolayısıyla bu kavramın ders kitaplarında nasıl işlendiğinin karşılaştırmalı olarak analizinin, tespit edilen öğretim/öğrenim sıkıntılarının nedenlerinin anlaşılmasına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Seçilen Fransız ve Türk kitaplarının isimleri ve yayınevleri şunlardır:

Fransız Ders Kitapları: Maths 2de (Fractale Yayınları 2000), Maths 2de (Belin Yayınları 2000)

Türk Ders Kitapları: Matematik 9. Sınıf (MEB Yayınları, 2007), Matematik 9. Sınıf (Gün Yayınları, 2008)

3. 1. Verilerin Analizi

Öncelikle iki ülkenin öğretim programları fonksiyonlar konusu özelinde karşılaştırılacaktır. Burada, öngörülen öğretim organizasyonlarındaki benzer ve farklı yönler ortaya çıkarılarak ders kitaplarına yansımaları irdelenecektir. Daha sonraki aşamada ise seçilen ders kitapları aşağıdaki maddeler ışığında karşılaştırmalı olarak analiz edilecektir:

- Fonksiyonlara girişin tasarımı: Seçilen kitaplarda fonksiyonlara girişte hangi başlık ve problem tipleri sunulmuş?
- Konu anlatımı: Bu bölümde hangi bilgilere yer verilmiş? Hangi problem tipleri ve temsiller kullanılmış? Temsillerin özellikleri ve sınırlılıkları ile ilgili hangi bilgilere yer verilmiş?
- Ölçme ve değerlendirme soruları: Bu bölümde hangi problem tiplerine ağırlık verilmiş? Konu anlatımı bölümünde sunulan problem tipleriyle benzer ve farklı yönleri nelerdir? Farklı disiplinlerle ilgili problem tiplerine yer verilerek zengin bir matematik organizasyonu sunulmuş mu?
- Problem Çözümlerinde Kontrol Yapısı: Balacheff'in kavramlarla ilgili modeli dikkate alınarak fonksiyonlar konusunda sunulan çözüm yolu/yolları analiz edilecektir.

4. Bulgular

Bu kısımda fonksiyon kavramının Türk ve Fransız ders kitaplarındaki matematik

organizasyonları ile ilgili analizlerden elde edilen bulgulara yer verilecektir. Öncelikle programlarda fonksiyon kavramının yerine bakılarak, daha sonrada farklı alt başlıklar altında ders kitapları karşılaştırmalı olarak incelenecektir.

4.1. Öğretim Programlarda Fonksiyon Kavramı

Ders kitaplarının içerik analizine geçmeden önce iki ülkenin öğretim programlarında var olan konu başlıkları aşağıda belirtilmiştir. Bu şekilde fonksiyon kavramı için öngörülen öğretim organizasyonlarının farklı ve benzer yönleri hakkında fikir edinilmiş olacaktır.

Tablo 1. Türk ve Fransız Lise 1 öğretim programlarında Konu Başlıkları

Türk Lise 1 Öğretim Programında Öğrenme Alanları	Fransız Lise 1 Öğretim Programında Öğrenme Alanları
Mantık	Sayılar
Kümeler	Sıralama ve Mutlak Değer
Bağıntı fonksiyon işlem	Fonksiyonlar
Sayılar	Geometri

Tabloda görüldüğü gibi fonksiyon kavramının matematik organizasyonu iki ülkede farklı olarak dizayn edilmiştir: Ülkemizde fonksiyon kavramının kümelerden hemen sonra verilmesi fonksiyonları tanımlarken küme teorisi dikkate alınacağını işaretini vermektedir. Fransa’da ise sayılardan hemen sonra fonksiyon kavramına geçilmesi ve kümeler konusunun programda bulunmaması farklı bir organizasyonun kullanılacağını işaretini vermektedir.

İki ülke arasında öğretim programlarının içeriğinin dizaynında da önemli farklılıklar göze çarpmaktadır. Ülkemiz öğretim programında her bir kavramla ilgili kazanımlar maddeler halinde ifade edildikten sonra o kazanımla ilgili etkinlik örnekleri ve açıklamalar verilmektedir. Etkinlik örneklerinin ve açıklamaların benzer şekilde ders kitaplarına yansıdığı düşünüldüğünde öğretmenlere kendi öğretim senaryolarını hazırlarken çok dar bir hareket alanının kalacağı ve dolayısıyla ders kitaplarının içeriği ile öğretmenlerin pratiklerinin birbirine çok yakın olacağı söylenebilir. Buna karşın Fransız öğretim programında daha az sayıda ama daha kapsamlı kazanımlar belirtildikten sonra kısa açıklamalar verilmektedir. Bu açıklamalarda genel bir çerçeve çizilerek öğretmenlere daha geniş bir seçim olanakları sunulmaktadır. Ayrıca Fransız öğretim programında konu ile ilgili yapılan eğitim araştırmalarının bazı yansımalarını da (çoklu temsillerin önemi, kavramla ilgili öğrenci hata ve yanlışları, v.b.) görmek mümkündür.

Öğretim programlarında fonksiyonlarla ilgili ifade edilen kazanımlar aşağıda belirtilmiştir.

Tablo 2. Fonksiyon kavramı ile ilgili kazanımlar

Türk Lise 1 Öğretim Programı	Fransız Lise 1 Öğretim Programı
1. Fonksiyonu şema ile göstererek fonksiyonun tanım, değer ve görüntü kümelerini belirtir.	1. Farklı gösterimlerle ifade (grafik, tablo ve formül) edilen bir fonksiyonda değişkeni ve tanım kümesini tespit edilmesi.
2. Grafiği verilen bağıntılardan fonksiyon olanların tanım ve görüntü kümelerini belirler.	2. Farklı gösterimlerle ifade (grafik, tablo ve formül) edilen bir fonksiyonda görüntü bulma.
3. Fonksiyon çeşitlerini açıklar.	

Bu kazanımlarla ilgili öğretim programlarındaki açıklama ve etkinlik örneklerine bakıldığında Türk öğretim programında birinci kazanımla ilgili olarak kartezyen çarpım - bağıntı ve fonksiyon ilişkisinin ön plana çıkarıldığı görülmektedir. Verilen örneklerdeki fonksiyonların genellikle sonlu kümelerde tanımlanmış olması dikkat çeken bir noktadır. Fransız öğretim programının birinci kazanımında fonksiyonun farklı gösterimlerle ifade edilerek değişken kavramı yardımı ile tanımlanacağı belirtilmektedir. Bu kazanımın açıklamasında ise günlük hayatta var olan fonksiyon ve fonksiyon olmayan durumların ifade edilmesi ve günlük dilde fonksiyon kelimesinin üzerinde düşündürülmesi istenmektedir. Günlük hayatımızda en çok kullandığımız kavramlardan birinin fonksiyon kavramı olduğu düşünülürse bu açıklamalarla Fransız öğretim programının daha işlevsel olduğunu göstermektedir.

Diğer önemli bir nokta da Türk öğretim programındaki kazanımlarda her bir temsil için farklı bir kazanım verilmiş, buna karşın Fransız öğretim programında farklı temsiller birleştirilerek tek bir kazanım altında ifade edilmiştir. Araştırmalarda (26, 27) bir kavram için mümkün olan farklı temsillerin kullanılmasının yeterli olmadığı, bunun yanında temsiller arası geçiş etkinliklerine de yer verilmesinin gerekliliği dile getirilmektedir. Bu anlamda Fransız öğretim programının bu görüşü daha çok benimsemiş olduğu söylenebilir. Bu durumun ders kitaplarına nasıl yansıtıldığı önemlidir ve çalışmanın devamında bu yansımalar incelenecektir.

Ayrıca Türk öğretim programında bazı problem tipleriyle ilgili çözüm yolu/yolları (düşey doğru testi, yatay doğru testi, v.b.) ifade edilerek adeta programı uygulayacak olan öğretmenlere çözüm yolu/yolları dikte ettirilmek istenmiştir. Fakat Fransız öğretim programında kazanımlarla ilgili herhangi bir çözüm yolu veya teknik ifade edilerek bunlar tamamen öğretmenlerin inisiyatifine bırakılmıştır.

Fransız öğretim programında verilecek örneklerin sonsuz kümede tanımlanması istenmekte fakat birkaç örnekle de olsa sonlu kümede tanımlı veya iki değişkenli fonksiyonların (alan-boyut ilişkisi gibi) kullanılabilmesi ifade edilmektedir. Bu durumun öğrencilerin fonksiyonlarla ilgili karşılaşacağı diğer kavramlara hazırlanmasında (özel tanımlı fonksiyonlar, limit, süreklilik, türev, v.b.) daha uygun olduğu birçok araştırmacı tarafından dile getirilmiştir (28). Fakat Türk öğretim programında fonksi-

yonla ilgili temel kavramlar verilirken bu fonksiyonların genellikle sonlu kümelerde tanımlanması ve daha sonraki aşamalarda ise tamamen sonsuz kümelerle çalışılması (reel sayılar yada reel sayıların bir alt kümesi olan bir aralık) bir kopukluk meydana getirebilmektedir (29). Dolayısıyla bu program bu haliyle uygulandığında öğrencileri daha sonraki aşamalara yeterince ve gerektiği gibi hazırlayamama riskine sahiptir.

Yine bu kazanımlarla ilgili olarak Fransız programında hesap makinesi ve bilgisayar yardımı ile fonksiyon makinesi örnekleri verilmesi gerektiği vurgulanmaktadır. Ayrıca ekran üzerindeki grafiklerle ilgili dikkat edilmesi gereken hususlar hatırlatarak teknolojinin yetersiz kaldığı noktalardan bahsedilmesi hususunda tavsiyelerde bulunulmaktadır. Bunun yanında Türk programının giriş kısmında matematik eğitiminde teknolojinin kullanılmasının öneminden bahsedilmekte fakat kavramlar bazında ve özellikle fonksiyon kavramı bazında bu konuda ne bir etkinlik örneği ne de bir açıklama bulunmaktadır. Bu durumun ders kitaplarına yansımaları bir sonraki bölümde incelenmiş olacaktır.

4.2. Ders Kitaplarında Fonksiyon Kavramı:

Çalışmanın bundan sonraki bölümünde analiz edilen her bir ders kitabı için aşağıda belirtilen kısaltmalar kullanılacaktır:

Türk Ders Kitapları		Fransız Ders Kitapları	
Matematik 9. Sınıf (MEB Yayınları, 2007)	T-1	Maths 2 ^{de} (Fractale Yayınları, 2000)	F-1
Matematik 9. Sınıf (Gün Yayınları, 2008)	T-2	Maths 2 ^{de} (Belin Yayınları, 2000)	F-1

İki ülkenin ders kitaplarında da fonksiyonlarla ilgili olarak birçok alt başlık bulunmaktadır. Örneğin T-1 de “Fonksiyonlar” ve “Fonksiyonlarda İşlemler” alt başlıkları kullanılırken T-2 de ise “Fonksiyon”, “Fonksiyon Türleri”, “Bileşke Fonksiyon” ve “Fonksiyonlarda İşlemler” olmak üzere dört alt başlık kullanılmıştır. Buna karşın F-1 ve F-2 de ise “Fonksiyon Kavramı”, “Bir Fonksiyonun Değişkenliği”, “Referans Fonksiyonları” ve “Cebirsel İşlem ve Fonksiyon” olmak üzere birbirine paralel dört başlıktan oluşmaktadır. Bu çalışmada sadece her iki ülkede neredeyse aynı şeyi ifade eden ve fonksiyon kavramı ile ilgili genel bir profil sunan ilk başlıklar incelenecektir. Çalışmanın en başında da ifade edildiği gibi bu çalışmanın amacı fonksiyon kavramı ile ilgili sunulan farklı organizasyonları ve problem tipleri/teknikleri ortaya çıkarmak ve bu anlamda bir karşılaştırma yapmak olduğundan bu başlığın yeterli olacağı kanaatine varılmıştır.

4.3. Fonksiyonlara Giriş'in Tasarımı

Türk ders kitaplarında fonksiyonlara girişte sadece etkinlikler kullanılmıştır. Verilmesi gereken tanım, teorem ve açıklamalar farklı bir alt başlık kullanılmadan etkinliklerin sonuna bir dip not şeklinde yerleştirilmiş olup ölçme ve değerlendirme sorula-

rına kadar bu sistem devam ettirilmiştir. Fransız ders kitaplarında ise “Önceki bilgileri hatırlatma” ve “İlköğretimden lise 1’e geçiş - Aktiviteler” adı altında farklı giriş etkinlikleri sunulmaktadır. Bu etkinliklerde genellikle öğrencilerin ilköğretim 8. Sınıfta görmüş oldukları lineer fonksiyonlar farklı temsillerle ifade edilerek öğrencileri ilk defa formel olarak karşılaştıkları fonksiyon kavramına hazırlama amaçlanmaktadır. Bu başlıklardan sonra “Konu anlatımı”, “Metotlar ve çözümlü örnekler”, “Modüller” ve “Alışturmalar” şeklinde başlıklar kullanılmış, F-2 de ise bunlara ilaveten “Kişiselleştirilmiş yardım” adında farklı bir başlık kullanılmıştır.

4.4. Konu Anlatımı Bölümünde Verilerin Bilgilerin Nitelendirilmesi

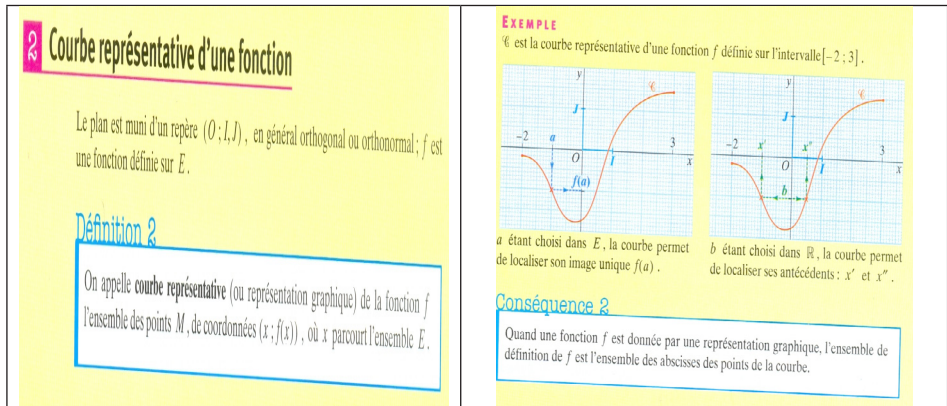
Aşağıdaki tabloda her iki ülke kitaplarında konu anlatımı olarak adlandırdığımız mevcut olan tüm bilgilerin bir listesi sunulmuştur. Bu anlamda her iki ülkedeki seçilen kitapta verilen bilgiler birbirinin aynısı olduğundan sadece ülkeler bazında bir karşılaştırma yapılacaktır.

Tablo 3. Konu Anlatımında Verilen Bilgiler

Tanım, Teorem Bilgiler	Türk Ders Kitaplarında	Fransız Ders Kitaplarında
Fonksiyon Nedir?	Kümeler teorik çerçevesi altında ve bağıntı kavramı yardımı ile tanım veriliyor. Hem sözel hem de sembolik olmak üzere iki tanım birden veriliyor. Tanımların öncelikle Venn Şeması ve Liste Yöntemi temsilleriyle örneklendirilmesi dikkat çekici	Eşleme ve değişkenlik kavramları yardımıyla ifade ediliyor. Tanımın öncesinde etkinliklerde farklı temsillere yer veriliyor (tablo, grafik, cebirsel) Tanım ise yine farklı temsillerle (özellikle grafik temsil) açıklanmaya çalışılıyor
Fonksiyonun Temsilleriyle İlgili Bilgiler	Temsillerle ilgili herhangi bir tanım ya da açıklama bulunmuyor. Sadece T-2 de “Fonksiyonun Grafiği” şeklinde bir başlık kullanılarak grafik kullanımı ile ilgili açıklama yapmaksızın etkinlikler sunuluyor	Konu anlatımı bölümünde “Bir fonksiyonun grafiği” başlığı altında grafik ile ilgili tanım ve örnekler veriliyor. Yine konu anlatımı bölümünde “Bir fonksiyonun değerler tablosu” “değişim tablosu” başlıkları altında bu iki tabloyla ilgili tanım, bilgi ve örnekler veriliyor

Fonksiyon Türleri	Liste ve Venn Şeması temsilleriyle her bir fonksiyon türü örneklendirilerek tanımları veriliyor	Programda olmadığından fonksiyon türleri ile ilgili herhangi bir bilgi mevcut değil
Fonksiyonun değişkenliği	Programda olmadığından fonksiyonun değişkenliği ile ilgili bir bilgi mevcut değil	Fonksiyonun değişkenliği ile ilgili tanımlar ve ayrıca değişim tablosunun tanımı mevcut

Konu anlatımı ile ilgili en dikkat çekici nokta ülkemiz ders kitaplarında fonksiyonun temsilleriyle ilgili olarak herhangi bir tanım, özellik ya da açıklamanın bulunmamasıdır. Buna karşın Fransız ders kitaplarında ise temsiller tek tek başlıklar halinde tanımlanarak ve örnekler üzerinde açıklamalarla ifade edilerek verilmektedir. Bu durumda Türk ders kitaplarını hazırlayanlar temsillerin rolleri ve sınırlılıkları ile ilgili bilgileri ya tamamen öğretmenlerin inisiyatifine bırakmakta ya da bu bilgileri gereksiz olarak görmektedirler. Aşağıda ülkemiz ders kitaplarında mevcut olmayıp, sadece Fransız ders kitaplarında bulunan temsiller ve özellikleriyle ilgili bölümlerden kesitler sunulmuştur.



Şekil 1. F-1 deki grafik temsille ilgili tanım ve açıklamalardan bir kesit

Yukarıda F-1 de bulunan bir fonksiyonun grafiği ile ilgili tanım verilmiş devamında ise örneklerle bu tanım açıklanmaya çalışılmaktadır. Örnek üzerinde hem sözel olarak hem de görsel olarak oklar yardımıyla görüntü bulma yöntemi açıklanmış ve sonunda da tanım kümesinin grafik temsillerde nasıl bulunacağı ile ilgili açıklamalar verilmiştir. Grafikle ilgili olarak daha sonraki aşamalarda grafik üzerinde fonksiyonun bazı değerlerini tam olarak bazı değerlerini ise yaklaşık olarak hesap edebileceğimiz belirtilerek her zaman tam değerlere ulaşmak için cebirsel temsile sahip olmamız gerektiği hatırlatılmaktadır.

3 Tableau de valeurs d'une fonction

Définition 3

Un tableau de valeurs pour une fonction f montre la correspondance entre des valeurs de la variable x et les valeurs de son image $f(x)$.

Pour construire un tel tableau, on peut :

- choisir des valeurs quelconques de la variable dans l'ensemble de définition ;
- choisir un « pas », c'est-à-dire un écart régulier entre deux valeurs successives de la variable.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-5; 4]$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 1$.

On donne un tableau de valeurs de la fonction f , avec un « pas » de 1.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{69}{4}$	13	$\frac{37}{4}$	6	$\frac{13}{4}$	1	$-\frac{5}{4}$	-2	$-\frac{11}{4}$	-3

3 Tableau de valeurs d'une fonction

Un tableau de valeurs ne donne que **quelques informations** sur une fonction.

- Le tableau de valeurs ci-contre ne permet pas de dire que l'ensemble de définition de la fonction est $[-3; 3]$: on ne sait pas si les nombres de cet intervalle, qui ne sont pas des entiers, ont une image.
- À un même tableau de valeurs peuvent donc correspondre plusieurs fonctions, soit plusieurs représentations graphiques différentes (voir ci-dessous).

X	Y1
-3	2
-2	1
-1	0
0	-1
1	-2
2	-3
3	-4

Tableau de valeurs Points correspondants Deux courbes possibles pour ce même tableau de valeurs

Şekil 2. F-1 deki değerler tablosu ile ilgili tanım ve açıklamalardan bir kesit

Yukarıdaki alıntılarda ise önce değerler tablosunun tanımı yapılıyor. Bu tanımda bazı değişkenlerle ilgili bilgiler veriliyor (x lerin seçimi, seçilen değerler arasındaki adımlar, vb.). Devamında verilen örnekte ise tanım kümesinde mevcut olan tüm tam sayılar birer adımla tabloda yer alıyor ve bu tablonun bu fonksiyona ait herhangi bir tablo olduğu yani bundan farklı tablolarında oluşturulabileceği imasında bulunuyor.

İkinci sütunda verilen kesit ise konu anlatımı bölümünden sonraki “Konular üzerine Zoom” başlığı altında “bir fonksiyonun değerler tablosu” alt başlığında sunulan bir örnek. Burada ilk dikkat çeken nokta tablonun formundaki değişikliklerdir. Verilen değerler yan yana değil de alt alta sıralanmıştır. Çünkü hesap makinelerinde ve bilgisayarda değerler tablosu bu şekilde oluşturulmakta ve dolayısıyla bu format da öğrencilere gösterilmek istenmiştir. Burada değerler tablosunun sınırlılığından bahsedilmekte ve fonksiyonla ilgili sadece birkaç değer verdiği dile getirilmektedir. Dolayısıyla değerler tablosu yardımı ile fonksiyonun tanım kümesine ulaşmanın mümkün olmadığı ve bir değerler tablosundan itibaren çok farklı grafikler çizilebileceği örneklerle gösterilmektedir. Nedeni ise tabloda verilen iki değer arasındaki fonksiyonun değerleri ile ilgili, tabloya bakarak bir çıkarımda bulunmamızın mümkün olmadığıdır.

Buna karşın analiz edilen Türk ders kitaplarında değerler tablosu sürekli cebirsel veya grafiksel temsille beraber kullanılmıştır. Buradaki tablolar temsiller arasındaki geçişi kolaylaştırmak amacı ile verilmiştir. Fakat bu konuyla ilgili bir noktayı belirtmeden geçemeyeceğiz. 2007 yılından itibaren Talim ve Terbiye Kurulu tarafından ders kitabı olarak kabul edilen Ekoyay 9. sınıf Matematik kitabından değerler tablosu ile ilgili bir kesit aşağıda sunulmuştur.

Örnek
Aşağıda girdi ve çıktılar verilen f fonksiyonunun kuralını bulalım.

Girdi (x)	1	2	3	4	5
Çıktı (y)	5	9	13	17	21

Çözüm: Girdiler arasındaki fark sabit olup 1 dir. Çıktılar arasındaki fark da sabit olup 4 tür. Buna göre bu fonksiyon $f(x) = ax + b$ şeklinde bir fonksiyondur.
 $f(1) = a + b = 5$
 $f(2) = 2a + b = 9$ bulunur. Birinci dereceden iki bilinmeyenli iki denklemin çözümünden;
 $-a + b = 5$
 $+ 2a + b = 9$
 $-a - b = -5$
 $+ 2a + b = 9$
 $a = 4$ ve buradan da $b = 1$ bulunur.
 Buradan f fonksiyonunun kuralı, $f(x) = 4x + 1$ olarak yazılır.

Örnek
Aşağıda bazı girdileri ve bu girdilere karşılık gelen çıktılar verilen fonksiyonun doğrusal olup olmadığını inceleyiniz ve kuralını bulalım.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	4	6	8	10

Çözüm: Verilen fonksiyonda, artışlar sabit olduğundan yani
 $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = 2$ olduğundan, fonksiyon doğrusal fonksiyondur.

Şekil 3. Ekoyay 9. sınıf matematik kitabından bir kesit

Burada dikkat edilirse problem metninde fonksiyonun tipi (derecesi veya doğrulluğu) verilmeden bir tablodan itibaren fonksiyonun kuralına ulaşılmaya çalışılmaktadır. Yani sanki tablo fonksiyonun tüm özelliklerini yansıtmış gibi bir yaklaşım sergilenmektedir. Tablonun fonksiyonu temsil etmedeki sınırlılığı (bazı özel durumlar hariç) hiçbir şekilde ifade edilmiyor. Bu ve buna benzer örnekler sıklıkla kullanıldığında öğrencilerde değerler tablosu ile ilgili yanlış algılamalar oluşması kuvvetle muhtemeldir. Dolayısıyla Fransız kitaplarında olduğu gibi, değerler tablosunun fonksiyonu temsil etmedeki rolü ve sınırlılığı ile ilgili bilgilerin ülkemiz ders kitaplarına da yansıtıldığında bazı kavram yanlışlarına engel olacağı düşünülebilir.

2 **Tableau de variations d'une fonction**

Insister sur la construction du tableau.
Sur la première ligne, les valeurs de la variable dans l'ordre croissant ; sur la seconde ligne, les variations correspondantes de la fonction.

Étudier le sens de variation d'une fonction consiste à partager l'ensemble de définition de la fonction en une succession d'intervalles sur lesquels la fonction est soit croissante, soit décroissante. On résume ces résultats dans un tableau appelé « tableau de variations ».

EXEMPLE
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 4]$. Elle est croissante sur l'intervalle $[-2; 2]$, décroissante sur l'intervalle $[2; 4]$ et telle que $f(-2) = -3$, $f(2) = 1$ et $f(4) = -10$. Le tableau de variations de f permet de synthétiser ces résultats. Les flèches représentent les variations de f .

x	-2	2	4
f	-3	1	-10

A **Tableau de variations d'une fonction et représentation graphique**

À une courbe donnée correspond un seul tableau de variations possible, mais, inversement, à un tableau de variations donné, on peut associer plusieurs courbes différentes.

EXEMPLE
Soit la courbe représentative de la fonction f ci-dessous. La lecture de cette représentation permet de dresser le tableau de variations de f .

x	-1	0	2	5
f	0	1	-1	1

Inversement, ce tableau de variations peut correspondre à plusieurs représentations graphiques, par exemple celles des fonctions g et h représentées ci-dessous.

Şekil 4. F-1 deki değişim tablosu ilgili tanım ve açıklamalardan bir kesit

Yukarıdaki Fransız ders kitabından alıntılar da ise: konu anlatımı bölümünde değişim tablosunun tanımı sözel olarak ifade edildikten sonra bir örnek üzerinde “bir fonksiyonun değişkenliğini özet olarak sunan tabloya değişim tablosu denir” ifadesi kullanılarak açıklanmaktadır. Sağdaki sütunda ise, verilen bir grafikten itibaren sadece bir değerler tablosu oluşturulabileceği; fakat verilen bir değişim tablosundan itibaren farklı grafikler çizilebileceği ifade edilerek örnek üzerinde açıklanıyor. Dolayısıyla

sıyla her ne kadar değerler tablosuna göre fonksiyonla ilgili daha fazla bilgi içerse de, değişim tablosunun da fonksiyonu temsil etmede bazı sınırlılıklarının olduğu dile getirilmeye çalışılmaktadır.

4.5. Temsillerin kullanımı ile ilgili bilgilerin nitelendirilmesi

Aşağıdaki tabloda analiz edilen 4 kitapta kullanılan temsillerin dağılımı verilmiştir. Burada kitaplarda hangi alt başlıkla verilmiş olursa olsun (etkinlik, alıştırma, çözümlü örnek, değerlendirme soruları, v.b.) problem cümlesinde kullanılan temsiller dikkate alınmıştır. Bu temsiller kullanılmadan da bazı problem cümleleriyle karşılaşılmıştır (doğal dille ifade, fonksiyon makinesi, v.b). Fakat bu şekildeki problem cümleleri sayıca çok az olduğundan bu tabloda yer verilmemiştir.

Tablo 4. Kitaplarda Kullanılan Temsillerin Dağılımı

Temsiller	T-1		T-2		F-1		F-2	
	Konu Anlatımı	Ölçme -Değ. Soruları	Konu Anlatımı	Ölçme -Değ. Soruları	Konu Anlatımı	Ölçme -Değ. Soruları	Konu Anlatımı	Ölçme -Değ. Soruları
Liste Yöntemi	3	1	3	4	-	-	-	-
Venn Şeması	1	-	2	1	-	-	-	-
Cebirsel	22	6	12	6	5	18	5	18
Grafik	5	1	4	1	7	10	11	24
Değerler Tablosu	-	-	-	-	5	6	1	3
Değişim Tablosu	-	-	-	-	4	18	3	10
TOPLAM	41	8	26	12	21	52	20	55

Tabloda görüldüğü gibi bazı temsiller sadece ülkemiz ders kitaplarında, bazıları ise sadece Fransız ders kitaplarında kullanılmaktadır. Bu durum fonksiyon kavramı ile ilgili farklı didaktik organizasyonlarının tercih edilmesinden kaynaklanmaktadır. Çünkü Liste Yöntemi ve Venn Şeması kümelerin teorik çatısı ile beslenen temsiller olduğundan Fransız ders kitaplarında yer edinmemiştir. Değişim tablosunun da ülkemiz ders kitaplarında yer almaması normaldir. Çünkü lise 1 programında bir fonksiyonun değişkenliği (artan, azalan fonksiyonlar) ile ilgili kavramların öğretimine yer verilmemektedir.

Ülkemiz ders kitaplarında konu anlatımı bölümünde venn şeması ve cebirsel temsillerin kullanımının çok fazla ön planda olduğu dikkat çekmektedir (T-1 de % 80, T-2 de % 73)¹. Buna karşın grafik kullanımının azlığı ve burada fonksiyon kavramının içselleştirilmesi amacından ziyade sadece görsellik olduğu saptandığında, aslında programın tam olarak ders kitaplarına yansıtılmadığı söylenebilir. Çünkü programda fonksiyonlarla ilgili belirtilen üç kazanımdan bir tanesi grafik kullanımı ile ilgilidir. Bu durum ölçme ve değerlendirme sorularında da devam etmektedir. Dolayısıyla

1. Yüzdeler, kullanılan temsiller toplamının ilgili temsil kullanımı sayısına bölümünden elde edilmiştir

la, yeni programın felsefesine uygun olmayan farklı temsillerin yeterince kullanılmaması ve ayrıca da değerler tablosunun kitaplarda yer edinmemesi ülkemiz ders kitaplarının en önemli eksikliklerindedir. Konu anlatımı bölümünde her ne kadar tablo dışında farklı temsillerin kullanılmaya çalışılması ve daha sonrasında ise ölçme-değerlendirme sorularında neredeyse sadece cebirsel temsile yer verilmesi fonksiyonların hala sadece cebirsel işlemlerden oluşan algoritmalar zinciri olarak görüleceği hissini vermektedir.

Buna karşın Fransız ders kitaplarında ister konu anlatımı bölümünde olsun isterse de ölçme-değerlendirme sorularında olsun farklı temsillerin birbirine yakın oranlarda kullanıldığını görmekteyiz. Hatta F-2 kitabında grafiksel temsilin cebirsel temsile göre daha fazla ön planda olduğu görülmektedir. Bunun yanında değişim tablosunun her iki ders kitabında da önemli ölçüde ve hatta neredeyse cebirsel gösterimle aynı ölçüde kullanılması kitap yazarlarının bu temsile ne kadar önem verdiklerini göstermektedir. Dolayısıyla Fransız ders kitaplarının, öğretim programlarının öngördüğü şekilde dizayn edildiği söylenebilir.

4.6. Temsiller arası geçişlerle ilgili bilgilerin nitelendirilmesi

İncelenen ülkemiz ders kitaplarında temsiller arası geçişleri ilgilendiren etkinliklere sıklıkla yer verilmektedir. Ancak bu geçişlerde nelere dikkat edilmeli, neler sabit kalıyor veya neler değişiyor vb. sorulara cevap niteliğinde herhangi bir bilgiye rastlanmamaktadır. Kitaplar incelendiğinde bu geçişler sanki otomatik bağlanmış, sıradan ve basit olarak görülmekte, fonksiyonun içselleştirilmesindeki rolleri göz ardı ediliyor hissi uyandırmaktadır. Buna karşın Fransız ders kitaplarında bu tip sorulara cevaplar sıklıkla dile getirilmekte ve bu geçişlerin önemi kitaplardaki her başlık altında vurgulanmaktadır. Bu durumla ilgili olarak aşağıda Fransız kitaplarından bazı alıntılar sunulmuştur:

Tableau de variations d'une fonction et tableaux de valeurs

À un tableau de valeurs donné peuvent correspondre plusieurs tableaux de variations et, inversement, à un tableau de variations donné, on peut associer plusieurs tableaux de valeurs différents.

EXEMPLE
Soit le tableau de valeurs de la fonction f donné ci-dessous. Les tableaux de variations A et B sont tous les deux compatibles avec ce tableau de valeurs.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	2	3	1	-2

Tableau A

x	-1	1	3
f	0	3	-2

Tableau B

Inversement, le tableau de variations A peut correspondre à plusieurs tableaux de valeurs, sur le même intervalle et avec le même pas, par exemple à ceux des fonctions g et h .

x	-1	0	1	2	3
$g(x)$	0	0,5	3	-1	-2

x	-1	0	1	2	3
$h(x)$	0	2,5	3	2,5	-2

Savoir exprimer différemment une même fonction

Une même fonction peut s'exprimer soit en langage « naturel », soit par une formule, soit codée pour une calculatrice.
Observer, puis compléter le tableau (pour la dernière ligne, mettre une fonction de son choix).

langage « naturel »	formule	expression « codée machine »
à tout nombre réel, j'associe son carré augmenté de son double	$f(x) = x^2 + 2x$	$\sqrt{\square} \square^2 + 2 \square$ $\sqrt{\square} =$ $\sqrt{\square} =$
à tout nombre réel, j'associe la racine carrée de la somme du carré de ce nombre et de 7
...	$f(x) = \frac{x-5}{2x+3}$...
...	...	$\sqrt{\square} \sqrt{\square} < (2 \square - 1) < \square + 2$ $\sqrt{\square} =$ $\sqrt{\square} =$
...

Şekil 5. F-1 deki temsiller arası geçişlerle ilgili bir kesit

Yukarda soldaki sütunda değerler ve değişim tablosu arasındaki geçişler incelenmektedir. Bu geçişler incelenirken, verilen bir değerler tablosundan birçok farklı değişim tablosunun oluşturulabileceği ve aynı şekilde verilen bir değişim tablosundan birçok değerler tablosu oluşturulabileceği sözel olarak ifade edilerek örnek üzerinde açıklanmaktadır. Sağdaki sütunda ise “Aynı Fonksiyonu Farklı Şekilde İfade Etme” başlığı altında doğal dil, cebirsel temsil ve hesap makinesinde kodlama olarak nasıl yazılacağını inceleyen bir etkinlik sunulmaktadır.

Savoir raisonner

f est une fonction définie sur l'intervalle $[-2; 2]$ dont on donne un tableau de valeurs.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	-1	-3	-1	3	2	0	2	1	3

Trois élèves proposent ci-dessous une représentation graphique de f .
Commenter chacune des propositions.

a)

b)

c)

Savoir argumenter

On considère des fonctions définies sur l'intervalle $[0; 1]$. Pour chacune d'entre elles, on donne une formule, un tableau de valeurs et une représentation graphique. Associer chaque formule à un tableau de valeurs et à une représentation graphique. Dans chaque cas, on précisera les critères du choix.

• Formules

$f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}$; $h(x) = x^{10}$; $i(x) = \frac{2x}{x+1}$.

• Tableau de valeurs

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
fonction 1	0	0,447 213 6	0,632 455 53	0,774 596 67	0,894 427 19	1
fonction 2	0	0,333 333 33	0,571 428 57	0,75	0,888 888 89	1
fonction 3	0	0,392	0,496	0,504	0,608	1
fonction 4	0	$1,024 \times 10^{-7}$	0,000 104 86	0,006 046 62	0,107 374 18	1

• Représentations graphiques (à gauche, la « fenêtre » choisie pour les quatre fonctions)

Représentation 1

Représentation 2

Représentation 3

Représentation 4

Şekil 6. F-1 deki temsiller arası geçişlerle ilgili bir kesit

Soldaki sütunda değerler tablosu ve grafik arasındaki geçişi inceleyen bir etkinlik sunulmaktadır. Bir değerler tablosundan itibaren verilen üç farklı grafiği öğrencinin yorumlaması istenmektedir. Sağdaki sütunda ise formül – tablo – grafik temsilleri arasındaki ilişkileri kurma becerisini geliştirmek amacıyla taşıyan bir etkinlik sunulmaktadır. Her bir temsilden 4'er adet verilerek; her temsile uygun olan diğer temsillerin bulunması istenmektedir.

Fransız kitaplarında temsiller arası geçişleri ilgilendiren etkinliklerle ilgili yukarıda verilen örneklerin dışında da farklı örneklere rastlamak mümkündür. Özellikle bölüm sonunda verilen ölçme-değerlendirme sorularında bu geçişlerle ilgili olarak “Grafikler ve Değerler Tabloları”, “Grafikler – Formüller ve Tablolar” “Grafikler ve Değişim Tabloları” gibi alt başlıklar altında çok sayıda alıştırmaya veya problemin sunulduğu görülmektedir.

4.7. Farklı Alanlarda ifade edilen problemlerin durumu ve örnekler

Ülkemiz ders kitaplarında ölçme-değerlendirme sorularına kadar matematik dışı diye tanımladığımız alanlardan (fizik, biyoloji, vb.) herhangi bir etkinlik ya da uygulama mevcut değildir. Sadece problem metninde günlük hayatta kullandığımız bazı kavramlar kullanılmış ancak bunlar sadece hayali isimler ya da hayali nesnelere (örneğin insanlarla yedikleri yemeklerin eşlenmesi durumu gibi). Fakat Fransız ders kitaplarında sunulan etkinlikler ve değerlendirme soruları, gerçek verilerin kullanıldığı

ğı ve genellikle matematik dışı fonksiyonel ilişkilerin incelendiği durumlardan oluşmaktadır. Bu tür etkinliklerle fonksiyon kavramının farklı alanlarda kullanımı ve işlevi ortaya çıkarılmış olacak ve öğrenciler tarafından daha iyi içselleştirilmesi sağlanmış olacaktır.

Aşağıda bu durumla ilgili Fransız kitaplarından bazı alıntılar sunulmuştur.

Des fonctions dans la vie de tous les jours

1) Le taxi
Le prix d'une course en taxi est constitué d'une partie fixe, la prise en charge (3 euros), et d'une partie proportionnelle à la distance parcourue (0,5 euro par km).
a) Combien coûte une course de 58 km ?
b) Donner le prix de la course en taxi en fonction de la distance x parcourue (exprimée en kilomètre).
c) Quelle distance peut-on parcourir en taxi si l'on dispose d'une somme de 20 euros ?

2) Les statistiques
Le tableau ci-dessous indique le nombre d'ordinateurs connectés au réseau mondial (l'Internet) en fonction de dates particulières.

date	janvier 1986	janvier 1990	janvier 1992	janvier 1994	janvier 1996	juillet 1996
nombre d'ordinateurs	5 089	313 000	1 136 000	3 864 000	9 472 000	12 881 000

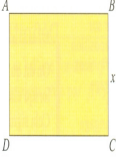
date	janvier 1997	juillet 1997	janvier 1998	juillet 1998	janvier 1999	juillet 1999
nombre d'ordinateurs	16 146 000	19 540 000	26 670 000	36 739 000	43 230 000	56 218 000

Sources : Network Wizard et <http://www.nw.com>.

Représenter graphiquement ces données en portant en abscisses, la date de référence, et en ordonnées, le nombre de machines (pour chaque axe, on choisira une unité adaptée).

Rechercher un maximum

Un rectangle a un périmètre égal à 16 cm. On appelle x sa largeur.



1) Déterminer l'ensemble des valeurs possibles que peut prendre x .

2) Montrer que l'aire du rectangle est une fonction f qui vérifie $f(x) = x(8 - x)$.

3) Construire un tableau de valeurs de f , en partant de 0, avec un pas de 0,25 cm. Quelle semble être l'évolution de l'aire de ce rectangle ?

4) Montrer que l'on a $16 - f(x) = x^2 - 8x + 16$. En déduire que $16 - f(x)$ est toujours positif. Que peut-on dire alors de l'aire de ce rectangle ?

5) Vérifier les résultats précédents en utilisant une calculatrice graphique ou un tableur.

Şekil 7. F-2 deki farklı alanlarda sunulan etkinliklerden bir kesit

Soldaki sütunda “Günlük Hayatımızda Fonksiyonlar” başlığı ile iki farklı etkinlik sunulmakta; birincisinde taksimetre ile gidilen yol ilişkisi, ikincisinde ise bazı tarihlerle dünya üzerinde internete bağlanan insan sayısı ilişkisi incelenmektedir. Sağdaki sütunda ise “Maksimum Arama” başlığı ile geometrik alanda verilen bir durumla ilgili maksimum değer bulmayla ilgili bir etkinlik söz konusudur.

4.8. Problem Çözümlerinde Kontrol Yapıları

Balacheff'in kavramlarla ilgili modeli dikkate alındığında kitaplarda sunulan problemlerle ilgili olarak ifade edilen çözüm yolu/yolları ve bunlarla ilgili kullanılabilecek araçlar önemlidir. Onun için şimdi de kitaplarda problem tipleri ile ilgili ifade edilen çözüm yolları irdelenecektir.

İncelenen ülkemiz ders kitaplarında, program değişikliğinden önce basılan kitapların aksine hiçbir yerde herhangi bir problemle ilgili olarak çözüm yolu/yolları sunulmamıştır. Dolayısıyla kitaplarımızda kontrol yapısı bulunmamaktadır. Bireysel olarak kitaplardan yararlanmak isteyen bir öğrenci eninde sonunda kontrol mekanizması olarak bir öğretmene (ya da bir bilene!) ihtiyaç duyacaktır. Çünkü kitaplarda ne bir çözümlü örnek, ne de bir yöntem vardır.

Buna karşın Fransız ders kitaplarında her bir problem tipiyle ilgili olarak o seviye de mümkün olan farklı tüm çözüm yolları ifade edilmiş, çözümlü örneklerle pekiştirilmiştir. Bu anlamda Fransız ders kitapları Balacheff'in kavramlar modeline daha

uygun olarak dizayn edilmiştir ve bu durumun bireysel çalışmalarda öğrencilere daha fazla katkı sağlaması kuvvetle muhtemeldir. Analiz edilen kitaplarda, çözüm yolları belirtilen problem tipleri şunlardır:

- Cebirsel olarak verilen bir fonksiyonda görüntü ve değer bulma
- Grafikselsel olarak verilen bir fonksiyonda görüntü ve değer bulma,
- Cebirsel olarak verilen bir fonksiyonun tanım kümesini tespit etme,
- Cebirsel olarak verilen bir fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları tespit etme,
- Grafikselsel olarak verilen bir fonksiyonun artan / azalan olduğu aralıkları tespit etme,
- Grafikselsel olarak bir denklemin ya da eşitsizliğini çözme,
- Cebirsel olarak verilen bir fonksiyonun minimum değerini bulma,
- Optimizasyon (maksimum, minimum) problemlerini çözme,
- Cebirsel–Grafikselsel–Doğal Dil ve Tablolar temsilleri arasındaki geçişleri yapabilmek,
- Hesap makinesinden birçok değer için aynı anda nasıl hesaplanabileceğini bulma.

5. Sonuçlar ve Tartışma

Bu çalışmada Türk ve Fransız ders kitaplarında fonksiyon kavramı ile ilgili bilgilerin farklı teorik çerçeveler altında nitelendirilmesi yapılmıştır. İki ülkede birbirinden farklı iki matematik organizasyonunun varlığı saptanmıştır. Bu durum programların farklı şekilde dizayn edilmesinden kaynaklanmaktadır ve normal olarak görülebilir. Normal olmayan ise her iki ülkede de ortak olarak kullanılan fonksiyonun bazı temsilleriyle ilgili verilen bilgi ve etkinliklerinde çok farklı olmasıdır. Fransız ders kitapları temsiller ve kullanımlarıyla ilgili ayrıntılı bir bilgi ve farklı problem tiplerine yer verirken, ülkemiz ders kitaplarında bu bilgiler bulunmamakta ve sadece klasik olarak adlandırabileceğimiz problem tiplerine yer verilmektedir. Oysaki öğrencilerin öğrenmeleri üzerine yapılan araştırmanın sonuçları, matematiksel kavramlar için anlam oluşturmada çoklu temsilleri kullanmanın, bu temsillerin özelliklerini ve sınırlılıklarını bilerek aralarında ilişkiler kurabilmenin önemini vurgulamaktadır (22, 26, 27).

Yine aynı şekilde kontrol yapısı yani farklı problem tiplerinin çözüm yollarıyla ilgili verilen bilgilerde de farklılıklar saptanmıştır. Fransız ders kitaplarında her bir problem tipine karşılık gelen çözüm yolu/yolları ayrıntılı bir şekilde ifade edilerek çözümlü örnekler üzerinde irdelenmiştir. Buna karşın, ülkemiz ders kitaplarında prob-

lem tipleriyle ilgili herhangi bir yöntem ya da çözüm yolu ifade edilmediği görülmüştür. Dolayısıyla öğrencilere, kullanılan kavram ya da prosedürün uygun olup olmadığından nasıl emin olacaklarını öğreten, elde edilen çözümün doğru olup olmadığını gösteren ya da çözüm yolunun probleme uygun olup olmadığını belirten stratejiler verilmemektedir. Bu durum, örneklendirilmesi ve açıklanması için, öğretmene bırakılmıştır. Ama bu stratejilerin henüz incelenen 9. sınıf matematik ders kitaplarında yer edinmemiş olması gerçeği tartışılması gereken bir durumdur. Dolayısıyla bu çalışma, ders kitaplarının etkili bir şekilde kullanımı açısından, matematik ders kitaplarında kontrol stratejilerinin açıkça ifade edilmelerinin gerekliliğinin altını çizmektedir.

Fonksiyon kavramının tarihsel gelişimi incelendiğinde birçok farklı teorik çatılar altında tanımlandığı görülmektedir. Bunun yanında, matematiksel bir kavramın farklı tanımlarını öğrenmek o kavramı anlamının ayrılmaz bir parçası olduğu ifade edilmektedir (31). Buradan hareketle, ülkemiz ders kitaplarında sunulan tanımlama ve kullanılan bazı temsillerle ilgili sunulan içeriğin, fonksiyonların öğrenilmesinde ve öğretilmesinde gerekli olup olmadığını tartışılması gerekmektedir. Ya da böyle bir içeriğe maruz kalmanın kaçınılmaz olduğu durumlarda, hangi temsile ve hangi problem tiplerine ne kadar vurgu yapılması gerektiğini, farklı yaklaşımlar için ne tür engellerin beklediğini ve bu engellerin üstesinden gelebilmek için ne tür yöntemler önerildiğinin araştırılması önemlidir. Örneğin şu tip sorulara yanıt aranmalıdır: 9. sınıfta fonksiyonların genellikle sonlu kümelerde tanımlanması ve daha sonraki aşamalarda ise tamamen sonsuz kümelerle çalışılması bir kopukluk meydana getirmekte midir? Lise 9 da verilen fonksiyon kavramı öğrencileri daha sonraki analiz kavramlarına yeterince ve gerektiği gibi hazırlayabilmekte midir?

Son olarak, Fransa'da artan/azalan kavramları fonksiyonların öğretiminin başında verilirken ülkemizde ise bu kavramlar lise 4 te türev kavramından sonra verilmektedir. Bir fonksiyonun tanım aralığında nasıl ve nerede arttığı/azaldığının tespiti çok önemlidir. Zaten matematik dışındaki bilimlerde de fonksiyon kavramının kullanıldığı problemlerde genellikle fonksiyonun değişkenliği ile ilgili sorular önemlidir. Bu kavramların, Fransız programlarında olduğu gibi ülkemizde de, 9. sınıftan itibaren verilmiş olmasının daha uygun olacağı düşünülmektedir. Bu şekilde fonksiyon kavramı, hem daha işlevsel olarak anlatılmış hem de yeni temsillerin kullanılmasına (değişim tablosu gibi) olanak verilerek daha zengin bir matematik organizasyonu sunulmuş olacaktır.

6. Kaynakça

1. Teters, P. and Gabel, D. (1984), *1982-83 Results of the NSTA survey of the needs of elementary teachers regarding their teaching of science*, Washington, National Science Teachers Association.
2. Sheldon, L.E.(1988) *Evaluating ELT textbooks and materials*, ELT Journal 42, 237-246.
3. Sharp, A. (1999) *Aspects of English medium textbook use in Hong Kong*, New Horizons in Education 40, 93-102.

4. Pepin, B. and Haggarty, L. (2001) *Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms*, *Zentrablatt für Didaktik der Mathematik* 33, 158–175.
5. Skiersko, A. (1991) *Textbook selection and evaluation*, in M. Celce-Murcia (ed.), *Teaching English as a Second or Foreign Language*, Boston, Heinle & Heinle, pp. 432-453.
6. Rymarz, R. and Engebretson, K. (2005) *Putting textbooks to work*, *British Journal of Religious Education* 27, 53–63.
7. Kuhn, T.S. (1970) *The Structure of Scientific Revolutions* (2nd ed.), University of Chicago Press, Chicago.
8. Tanner, D. (1988) The textbook controversies, in L.N. Tanner (ed.), *Critical Issues in Curriculum* (Eighty-Seventh Yearbook of the National Society for the Study of Education, Part I), National Society for the Study of Education, Chicago, 122–147.
9. Dörfler, W. and McLone, R.R. (1986) Mathematics as a school subject, in B. Christiansen, A.G. Howson and M. Otte (eds.), *Perspectives in Mathematics Education*, Reidel, Dordrecht, pp. 49–97.
10. Farrell, J.P. and Heyneman, S.P. (1994) Planning for textbook development in developing countries, in T. Husen and T.N. Postlethwaite (eds.), *International Encyclopedia of Education* (2nd ed., Vol. 2), BPC Wheatons, pp. 6360–6366.
11. Woodward, A. (1994) Textbooks, in T. Husen and T.N. Postlethwaite (eds.), *International Encyclopedia of Education* (2nd ed., Vol. 2), Exeter, pp. 6366–6371.
12. Herbst, P. (1995) *The Construction of the Real Number System in Textbooks: A Contribution to the Analysis of Discursive Practices in Mathematics*, unpublished master's thesis, University of Georgia, Athens.
13. Ball, D.L. and Feiman-Nemser, S. (1988) Using textbooks and teacher's guides: A dilemma for beginning teachers and teacher educators, *Curriculum Inquiry* 18, 401–423.
14. Burstein, L. (ed.), (1993) *The IEA Study of Mathematics 3: Student Growth and Classroom Processes*, Pergamon Press, Oxford.
15. Kuhs, T.M. and Freeman, D.J. (1979) The Potential Influence of Textbooks on Teachers' Selection of Content for Elementary School Mathematics, paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.
16. Howson, G. (1995) *Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 Texts*, Pacific Educational Press, Vancouver.
17. Lumsdaine, A.A. (1963) 'Instruments and media of instruction', in N.L. Gage (ed.), *Handbook of Research on Teaching*, Rand McNally, Chicago, pp. 583–682.
18. Remillard, J.T. (2000) 'Can curriculum materials support teachers' learning? Two fourth-grade teachers' use of a new mathematics text', *Elementary School Journal* 100, 331–350.
19. Stodolsky, S.S. (1989) Is teaching really by the book?, in P.W. Jackson and S. Horowitz-Gordon (eds.), *From Socrates to Software: The Teacher as Text and the Text as Teacher* (Eighty-Ninth Yearbook of the National Society for the Study of Education, Part I), University of Chicago Press, Chicago, pp. 159–184.
20. Otte, M. (1986) What is a text? in B. Christiansen, A.G. Howson and M. Otte (eds.), *Perspectives in Mathematics Education*, Reidel, Dordrecht, pp. 173–204.

21. Balacheff, N. and Gaudin, N. (2003) Baghera assessment project , in S. Soury-Lavergne (ed.), *Baghera Assessment Project: Designing an Hybrid and Emergent Educational Society. Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, # 81*, Grenoble, Laboratoire Leibniz-IMAG (available at www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/).
22. Sierpinska A. (1992) On understanding the notion of function, in *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, Mathematical Association of America MAA Notes. 25. 25-58.*
23. Chevallard, Y. (1992) Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach.' In R. Douady and A. Mercier (eds.), *Research in Didactique of Mathematics*, La Pensée Sauvage, Grenoble,131-167.
24. Yıldırım A.ve Simsek H. (1999) *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*, Ankara: Seçkin Yayınevi.
25. Beyazıt İ. (2008) Fonksiyonlar konusunun Öğretiminde Karşılaşılan Zorluklar ve Çözüm Önerileri, *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri*, M.F.Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Ed). *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri* (s.91-117). Ankara: PegemA.
26. Thompson, P. W. (1994) Students, Functions, and the UndergraduateCurriculum. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, I, CBMS Issues in Mathematics Education, 4*, pp. 21-44.
27. Duval, R. (1993) Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. 5*, pp. 37-65.
28. Bloch, I. (2003) *Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove?*, *Educational Studies in Mathematics Vol. 52*, pp. 3-28.
29. Akkoç, H. (2005). *Fonksiyon kavramının anlaşılması: Çoklu temsiller ve tanımsal özellikleri*, *Eğitim Araştırmaları Dergisi, 20*, 14 - 24.
30. Rene de Cotret, S. (1988) Une etude sur les representations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dependante, *Petit x, 17*, 5-27.