

ÖĞRETMEN ADAYLARININ DENKLEM, FONKSİYON VE POLİNOM KAVRAMLARINI ANLAMALARI

Yüksel DEDE

Freie Universitesi Berlin, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi, Berlin, Germany.

İbrahim BAYAZIT

*Erciyes Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü,
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Kayseri.*

Danyal SOYBAŞ

*Erciyes Üniversitesi Eğitim Fakültesi OFMAE Bölümü,
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Kayseri.*

Özet

Bu çalışmada öğretmen adaylarının fonksiyon, denklem ve polinom kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkilere ait bilgi düzeyleri incelenmiştir. Araştırmanın çalışma grubu, Gazi ve Cumhuriyet Üniversitesinden toplam yüz onyeddi (117) matematik öğretmeni adayından oluşmaktadır. Veri toplama ve analiz aşamalarında nitel ve nicel araştırma yöntemlerinin araçları bütünlük olarak kullanılmıştır. Çalışmaya teorik temel teşkil üzere, literatürdeki kavramsal bilgi ve kavram imajları gibi farklı kavramlardan yararlanılmıştır. Çalışmadan elde edilen bulgular; öğretmen adaylarının fonksiyon, denklem ve polinom kavramlarından her birine ilişkin yeterli düzeyde bilgiye sahip olmakla birlikte bu kavramlar arasındaki içeriksel ilişkileri anlamada oldukça yetersiz kaldıklarını göstermektedir.

Anahtar Sözcükler: fonksiyon, denklem, polinom, kavramsal bilgi, kavram imajları.

PROSPECTIVE TEACHERS' UNDERSTANDING OF EQUATION, FUNCTION and POLYNOMIAL CONCEPTS

Abstract

The main purpose of this study is to explore prospective teachers' understanding of function, equation and polynomials concepts and the relationships between these notions. The research sample includes 117 students from Gazi and Cumhuriyet Universities. Qualitative and quantitative methods were employed in this study. The notions of conceptual knowledge and concept images were used to establish a theoretical framework for the study. Research findings indicate that prospective teachers had sufficient knowledge related to function, equation and polynomials concepts, yet they demonstrated a lack of understanding concerning the relationships between these notions.

Key words: Function, equation, polynomials, conceptual knowledge, concept images.

1. GİRİŞ

Bir öğretmenin meslek hayatında başarılı olabilmesi ve öğrencilerindeki matematiksel düşüncenin gelişimine katkıda bulunabilmesi için öncelikli olarak iki tür bilgiye sahip olması gerektiği eğitimcilerin üzerinde mutabık olduğu bir gerçektir (Shulman, 1986; Ball, 1991; Even, 1992; Watkins & Mortimore, 1999). Bu bilgi türlerinden birincisi, öğretmenlerin matematiksel konularla ilgili sahip oldukları bilgilerdir ki, kısaca ‘alan bilgisi’ diye tanımlanabilir. Alan bilgisi, öğretmenlerin matematiksel konuların epistemolojisi, bu konularla ilgili tanımlar, aksiyomlar, tanımsız kavramlar, ispat yöntemleri, bağıntı, kural ve formüllere ilişkin anlayışlarının ve algılarının tamamını içermektedir (Ball, 1991; Watkins&Mortimore, 1999). Öğretmenlerin matematiksel kavramlar arasındaki ilişkilere ait bilgileri de bu kategoride değerlendirilmektedir. Shulman’a (1986) göre, alan bilgisinin iki temel özelliği vardır. Bunlardan birincisi, bir matematiksel kavramın ‘*ne olduğunu*’, ikincisi ise o matematiksel kavramın ‘*neden ve niçin*’ öyle olduğunu bilmektir. Benzer düşünceler ileri süren Ball (1991) ise alan bilgisinin iki temel özelliğini, özsel (substantive) ve sözdizimsel (syntactic) bilgiler olarak ifade etmiştir. Özsel bilgiler, matematiksel kavramlar (limit, trigonometri, polinom, v.s.), bu kavramların izahında kullanılan formüller ve bu formüllerle ilgili kavramlar arasındaki ilişkilerin anlaşılması ve algılanmasını içerir. Sözdizimsel bilgiler ise öğretmenlerin matematiksel kavramların orijinleri ve nasıl geliştikleri, bu kavramların farklı kullanım alanlarında ne tür değişikliklere uğradıkları gibi konulardaki sahip oldukları bilgileri kapsamaktadır. Ball (1991), alan bilgisinin sınırlarını daha da genişleterek, ‘*matematik bilmek*’ ve ‘*matematik yapmak*’ ne demektir, matematikteki çok önemli konular nelerdir, matematik eğitimcileri arasında bilginin psikolojisi ve matematiğin felsefesine ait süre giden teorik tartışmalar gibi farklı konulardaki öğretmenlerin görüş ve düşüncelerini de ‘*alan bilgisi*’ kategorisinde değerlendirmiştir. Öğretmenlerin sahip olması gereken ikinci önemli bilgi türü ise matematiksel kavramların öğrencilere etkin olarak nasıl öğretilebileceğine yönelik bilgileri içermektedir. ‘Alan eksenli pedagoji bilgisi’ olarak tanımlanan bu bilgi türü, alan bilgisi ile genel pedagojik prensiplerin ve teorilerin birleşiminden oluşmaktadır. Alan bilgisinin, pedagojik prensipler ve teoriler ışığında yeniden organize edilerek öğrencilerin anlayabileceği formata dökülmesi sürecinde bir öğretmenin ihtiyaç duyacağı bütün bilgiler bu kapsamda ele alınmaktadır (Shulman, 1986). Alan eksenli pedagoji bilgisinin kapsamı çok geniş olup, öğretmenlerin müfredat ve ders kitaplarını anlama biçimleri, matematik konularının karakterine uygun sunuş şekillerinin (grafikler, tablolar, v.s.) seçimi ve kullanımı, öğrencilerin bir konuyla ilgili bilgilerinin ölçüm ve değerlendirmesinin nasıl yapılacağı, öğrencilerin geçmişten ne tür bilgiler getirdikleri ve bu bilgilerin yeni konuların öğretiminde nasıl kullanılabilirliği gibi çok değişik alanlardaki öğretmenlerin bilgi ve düşüncelerini içermektedir (Wilson et al., 1987; Bromme, 1995). Son yıllarda öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının bilgi sistemlerini araştıran birçok ulusal ve uluslararası çalışmanın yapıldığı görülmektedir (Even, 1990; Norman, 1992; Hitt, 1998; Sherin et al., 2000; Bayazit, 2006). Öğretmenlerin genellikle ‘*alan bilgisi*’ ve ‘*alan eksenli pedagoji bilgilerini*’ inceleyen bu çalışmalar, öğretmenlerin

öğrettikleri konularla ilgili her iki bilgi türünde de ciddi eksiklerinin var olduğunu göstermektedir. Yapılan bu çalışmaya teorik bir altyapı sağlaması için öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının bilgi sistemlerini cebir konularında özellikle de fonksiyonlar konusunda araştıran çalışmalardan elde edilen bulgular aşağıda sunulmuştur:

Even (1990) yapmış olduğu çalışmada, öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusundaki alan bilgilerini incelemiş ve birçok eksiklikler tespit etmiştir. Örneğin, katılımcıların büyük bir çoğunluğu bir fonksiyonun tanım kümesindeki her elemanı değer kümesinde bir ve yalnız bir elemana eşlemesi gerektiği (univalence condition) kuralını bilmekle beraber bu özelliğin neden ve niçin önemli olduğu gibi sorulara mantıklı cevaplar verememişlerdir. Even, bu durumu ciddi bir eksiklik olarak görmekte ve bunun sebebi olarak da öğretmen yetiştirme programlarında alan bilgisinin iki temel özeliğinden biri olan sözdizimsel bilgilere yeterince önem verilmemiş olmasını göstermektedir. Aynı çalışmada, katılımcıların çok büyük bir kısmı

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \text{ rasyonel sayı ise} \\ 0, & x \text{ irrasyonel sayı ise.} \end{cases}$$

ifadesini fonksiyon olarak kabul ederken, bu

fonksiyonun grafiksel formunu reddetmişlerdir. Gerekçe olarak da, fonksiyon grafiğinin düzgün artan veya azalan sürekli bir eğri veya doğru olmayışını belirtmişlerdir. Bu durum ise öğretmen adaylarının kavram tanımları ve kavram imajları arasında ciddi farklılıkların olduğunu göstermektedir. Norman'ın (1992) yapmış olduğu nitel çalışmanın sonuçları ise lise öğretmenlerinin hem fonksiyon kavramını derinlemesine anlamada hem de fonksiyonlar konusunun izahında kullanılan temsilleri (grafikler, cebirsel ifadeler v.s.) ve sembollerini anlama ve kullanmada yetersiz olduklarını göstermiştir. Örneğin katılımcıların çoğu, bir fonksiyonu temsil için kullanılan ' f ' sembolü ile x gibi bir değişkenin bu fonksiyon altındaki görüntüsünü temsil için kullanılan $f(x)$ sembolü arasındaki içeriksel farkı anlamakta yetersiz kalmışlardır. Bayazit'in (2006) çalışması ise meslekte uzun yıllar çalışmış tecrübeli öğretmenlerin bile kendilerini tek tür temsile (cebirsel ifadeler) kısıtladıklarını ve fonksiyonların cebirsel ve grafiksel formları arasında ilişkilendirme yapmakta oldukça zorlandıklarını ortaya koymuştur. Öğretmenlerin '*alan eksenli pedagoji*' bilgilerini araştırmak için yapılan çalışmalarda da benzer bulgulara ulaşılmıştır (Marks, 1990; Tirosh et al., 1998; Even&Tirosh, 2001; Hadjidemetriou&Williams, 2001; Bayazit, 2006). Tirosh ve arkadaşları (1998), öğretmenlerin alan eksenli pedagoji bilgilerini iki boyutu itibarıyla incelemişlerdir. Bu bilgi boyutları, cebirsel ifadelerin sadeleştirilmesi konusunda öğrencilerin karşılaştıkları zorluklar ve geliştirdikleri yanlış algılamalar ile bu zorlukların giderilmesi için gösterilebilecek öğretim yaklaşımlarına ilişkin öğretmenlerin görüş ve düşüncelerini içermektedir. Bu nitel çalışmanın sonuçları, meslekte yeni olan öğretmenlerin bahsedilen bilgi türlerinde oldukça yetersiz olduklarını göstermiştir. Örneğin katılımcı öğretmenlerden bir tanesi, ders anlatımı esnasında öğrencilerine '*harfli terimleri kendi aralarında, sayıları da kendi aralarında toplayınız*' türünden

tek bir kural vermiş, sorduğu sorulara yanlış cevaplar aldıkça da alternatif yaklaşımlar göstermek yerine bu kuralı tekrar ederek davranışçı bir öğretim yaklaşımı sergilemiştir.

Sonuç itibarıyla yapılan ulusal ve uluslararası çalışmalar, öğretmenlerin ‘alan’ ve ‘alan eksenli pedagoji bilgileri’nde eksikliklerin olduğunu göstermektedir. Öğretmenlerdeki bu bilgi eksikliklerinin, sınıf içi öğretim uygulamalarını negatif yönde etkilediğini tahmin etmek zor değildir. Bu çalışmanın amacı ise Türkiye’deki öğretmen adaylarının matematiğin üç temel kavramı olan fonksiyon, denklem ve polinom kavramlarına yönelik alan bilgilerini araştırmak ve böylece Eğitim Fakültelerinin matematik öğretmenliği bölümlerinde okuyan ve tezsiz yüksek lisans programlarını takip eden öğrencilerin mesleğe daha donanımlı bir şekilde hazırlanmaları noktasında görüş ve düşüncelerin oluşumuna katkı sağlamaktır.

Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın temel amacı, öğretmen adaylarının fonksiyon, denklem ve polinom kavramlarına ilişkin bilgi düzeylerini araştırmaktır. Bu üç konu, hem lise hem de üniversite matematik programındaki öneminden dolayı seçilmiştir. Çalışmada, öğretmen adaylarının bu konularla ilgili sahip oldukları alan bilgileri iki boyutu itibarıyla incelenmiştir. Birinci olarak, bu kavramlardan her biriyle ilgili öğretmen adaylarının bilgi derinliklerine bakılmış, ikinci olarak da bu kavramlar arasındaki ilişkileri anlama bağlamında öğretmen adaylarının bilgi genişlikleri incelenmiştir. Çalışmada, öğretmen adaylarının, bahsedilen kavramlarla ilgili geliştirmiş oldukları ‘kavram imajları’ da araştırılmıştır.

Teorik Çatı

Bu çalışmada, literatürde var olan birçok görüş ve düşünceden faydalanılmıştır. Öğretmenlerin bilgi sistemlerini incelemek için yapılmış olan çalışmalar (Ball, 1991; Even, 1993; Askew et al., 1996), bu çalışmada kullanılan araştırma yöntem ve tekniklerinin seçimi, uygulanması ve elde edilen verilerin analizinde genel manada rehberlik görevi yapmıştır. Öğretmenlerin pratikte ihtiyaç duydukları bilgi türleri (Shulman, 1986; Wilson et al., 1987; Leinhardt, 2001), matematiksel bilginin psikolojisi (Piaget, 1972; Skemp, 1987) ve fonksiyonlar konusunun öğrenim ve öğretimi (örneğin Eisenberg, 1991; Breidenbach et al., 1992; Hitt, 1998) alanlarında yapılmış olan teorik ve deneysel çalışmalardan ise öğretmen adaylarının fonksiyon, denklem ve polinom kavramlarına ilişkin alan bilgilerinin nasıl ve hangi boyutları itibarıyla incelenebileceği hususlarında yararlanılmıştır. Özellikle bu çalışmaya, teorik zemin teşkil etmek üzere literatürdeki iki temel düşünceden yararlanılmıştır. Bunlar: Kavramsal bilgi (conceptual knowledge) ve kavram imajlarıdır (concept image). Hiebert ve Lefevre’ye (1986) göre kavramsal bilginin en temel özelliği, içerik olarak doğru ve ilişkisel açıdan zengin olmasıdır. Kişinin içerik açıdan doğru bilgilere sahip olması demek bir matematiksel kavramın esasını, temel özelliklerini ve o kavramın (varsa) alt kav-

ramlarını bilmesini gerektirmektedir. Ancak kavramsal bilgiyi sadece bu boyutlarıyla anlamak yetersiz kalır. Çünkü matematikte, tek bir kavram kendi başına bir anlam ifade etmez. Ne zaman bir kavram, diğer matematiksel kavramlarla ilişkilendirilir o zaman söz konusu kavram anlam kazanır ve bireyin zihninde kavramsal öğrenme dediğimiz olay gerçekleşir. Kişi, matematiksel düşünceler arasında içeriksel bağlar kurarak kavramsal bilgiye ulaşabilir, kavramsal bilgi de kişiye herhangi bir kavrama ait bilgilerini adapte ederek farklı alanlarda kullanabilme ve gerektiğinde kavramlar arasında ileri-geri geçişler yapabilme kolaylıklarını sağlar (Hiebert&Lefevre, 1986). Tall ve Vinner (1981) ise '*kavram imajı*' nı bir matematiksel düşünceye ilişkin kişinin zihnine kodlanmış olduğu zihinsel yapılar olarak tanımlamaktadır. Bu zihinsel yapılar, resimler, grafikler, şekil ve şemalar, matematiksel semboller, işlemler ve hatta güncel hayattan bazı örnekler bile olabilir. Örneğin, bir öğrencinin fonksiyon düşüncesine ait kavram imajı, düzgün artan veya azalan bir eğri olabileceği gibi tanım kümesinin alt aralıklarında farklı kurallarla tanımlanmış parçalı bir fonksiyon da olabilir. Kişi bir matematiksel düşünceye ilişkin birden fazla kavram imajına sahip olabilir ve o alanda problem çözümleri yaparken durum ve şartlara göre bu kavram imajlarından herhangi birisini hatırlayıp kullanabilir. Bu çalışmada, öğrencilerden fonksiyon, denklem ve polinom kavramlarından her birine yönelik birkaç örnek yazmaları istenilmiş ve bu örnekler üzerinden katılımcıların bahsedilen konulara ilişkin ne tür kavram imajlarına sahip oldukları, bu imajlardan hangisinin daha baskın olduğu ve sahip oldukları kavram imajlarıyla verdikleri tanımların tutarlı olup olmadığı gibi konular irdelenmiştir.

2. YÖNTEM

Çalışmada nitel ve nicel araştırma yöntemleri bütünlük olarak kullanılmıştır (Stake, 1995; Yin, 2003;). Veriler, mümkün olduğunca çok sayıda öğretmen adayına ulaşmak için açık-uçlu sorulardan oluşan bir test aracılığıyla toplanmıştır. Ancak testten elde edilecek veriler ile katılımcıların fonksiyon, denklem ve polinom kavramlarıyla ilgili düşünce derinliklerinin gözlemlenmesi oldukça zordur. Bu zorluğun üstesinden gelmek için nitel araştırma yönteminin kullanımına ihtiyaç duyulmuştur. Dolayısıyla, öğretmen adaylarının yukarıda belirtilen kavramlarla ilgili sahip oldukları bilginin derinliğini ve genişliğini daha yakından gözlemlmek için sınırlı sayıda katılımcıyla yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır.

2.1. Örneklem: Örneklem grubu, Gazi ve Cumhuriyet Üniversiteleri Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde okuyan toplam 117 öğrenciden oluşmaktadır. Katılımcılar, I. sınıf, IV. sınıf ve V. sınıf öğrencileridir. Farklı sınıf düzeylerinden öğrenci seçiminin amacı, çalışmadan elde edilecek bulgu ve sonuçların hedef kitle üzerine genellenebilirliğini arttırmaktır. Katılımcıların seçiminde 'amaçlı örneklem seçimi' yöntemi kullanılmakla birlikte bilimsel etik gereği öğrenciler çalışmaya katılıp katılmama konusunda özgür bırakılmışlardır. Mülakat örneklem uzayı ise dört kişiden (ikisi Gazi Üniversitesinden, ikisi Cumhuriyet Üniversitesinden) oluşmaktadır. Bu öğrencilerin seçiminde de yine 'amaçlı örneklem seçimi' yöntemi

kullanılmış ve öğrenciler yazılı sınav kâğıtlarında vermiş oldukları cevaplara göre belirlenmiştir.

2.2. Veri Toplama Araçları ve Süreci: Bu çalışmadaki veriler, test ve mülakatlar aracılığıyla toplanmıştır.

2.2.1. Test

Çalışmada, araştırmacılar tarafından geliştirilen bir test kullanılmıştır. Test, açık-uçlu sorulardan oluşmuştur. Bu şekilde, öğretmen adaylarının fonksiyon, denklem ve polinom kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkilere yönelik bilgilerini bütün boyutlarıyla kâğıda dökmelerine olanak sağlanması hedeflenmiştir. Testin geçerliği, ilk önce kapsam geçerliğiyle sağlanmıştır. Bunun için, iki farklı yöntemle başvurulmuştur. Birincisi, testte kullanılan sorular ulusal ve uluslararası literatürden uyarlanarak geliştirilmiştir. İkincisi, soruların çalışmanın amacına uygun olup olmadığı, Gazi, Cumhuriyet ve Erciyes Üniversiteleri Eğitim Fakültelerinde görev yapan matematik eğitimcileriyle tartışılmıştır. Daha sonra, testin geçerliği için açıklayıcı faktör analizi yapılmıştır. Açıklayıcı faktör analizi sonucunda da, testin üç faktöre sahip olduğu belirlenmiştir. Testi oluşturan üç faktörün, tüm test puanları içindeki varyansın %67,09'ını açıkladığı belirlenmiştir. Her bir faktörün açıkladığı varyans değeri ise sırasıyla %25,62, %21,55 ve %19,92 olarak bulunmuştur. Faktör-1, denklem ve polinom kavramları arasındaki ilişkileri; faktör-II, fonksiyon kavramının sırasıyla denklem ve polinom kavramlarıyla ilişkilerini ve faktör-III ise fonksiyon ve polinom kavramlarının tanımlarını içeren sorulardan oluşmaktadır. Ölçme aracının iç tutarlılık katsayısını belirlemek için Cronbach Alpha Katsayısı da hesaplanmış ve tüm test için 0,82; faktörler için ise sırasıyla 0,86, 0,78 ve 0,59 olarak bulunmuştur. Bu sorular ile öğretmen adaylarının, fonksiyon, denklem ve polinom kavramlarına dair bilgi ve zihinsel imajlarının ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri ne düzeyde anladıklarının belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu şekilde hazırlanan test, araştırmacılar tarafından öğretmen adaylarına dağıtılarak uygulanmıştır. Sınavın başında, öğretmen adayları açık-uçlu sorulara mümkün olduğunca detaylı cevap vermeleri konusunda teşvik edilmiştir. Sınav süresi konusunda herhangi bir kısıtlamaya gidilmemiş ve öğretmen adaylarına istedikleri kadar süre tanınmıştır.

2.2.2. Mülakatlar

Test, uygulamasını takip eden bir hafta içerisinde öğretmen adaylarının sınav kâğıtlarında verdikleri bilgilerin genel olarak içerik analizi yapılmış ve öğrenciler başarılı, orta düzeyde başarılı ve başarısız olmak üzere üç ana grupta sınıflandırılmıştır. Bu aşamada yapılan genel bir analizle, mülakat için uygun öğrencilerin seçilmesi hedeflenmiştir. Mülakatlar, başarılı ve başarısız olarak sınıflandırılan gruplardan birer ve orta düzeyde başarılı olarak sınıflandırılan gruptan seçilen iki öğrenci olmak üzere toplam dört öğrenciyle gerçekleştirilmiştir. Burada, yarı-yapılandırılmış mülakat yöntemi uygulanmakla birlikte klinik mülakat (Gingsburg, 1981) yönteminin öngörüle-

rinden de faydalanılmıştır. Mülakatta, ölçekten seçilen toplam beş soru kullanılmıştır. Bu sorular öğrencilerin fonksiyon, denklem ve polinom kavramları arasındaki ilişkilere dair bilgilerini ölçen sorulardır. Sorular, öğretmen adaylarına teker teker yöneltilmiş ve konuyla ilgili görüş ve düşüncelerini açıklamaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının verdikleri cevaplara göre yeni sorular yöneltilerek öğretmen adaylarının gerçek bilgi ve düşüncelerinin ortaya çıkarılmasına çalışılmıştır. Gerekli hallerde yeni sorular kullanılmış veya başlangıçtaki soru değişik açılardan öğretmen adaylarına yöneltilmiştir.

2.3. Veri Analizi: Test verilerinin analizinde nicel ve nitel analiz yöntemleri bütünsel olarak kullanılmıştır. Veriler, SPSS 10.0 (Statistical Package for the Social Sciences) bilgisayar programında değerlendirilmiştir. Bu işlem yapılırken öğretmen adaylarının yazılı sınav kâğıtlarındaki açık-uçlu sorulara vermiş oldukları cevaplar üzerinde içerik analizi yapılmış ve bunlardan elde edilen çıkarımlar, SPSS 10.0 programına nümerik değerler olarak kodlanmıştır. Örneğin, öğrencilerin testteki ‘Fonksiyon nedir? Tanımlayınız’ şeklindeki birinci soruya verdikleri cevaplar, dört ana grupta toplanmış ve bu gruplar aşağıdaki şekilde sayısal değerlere çevrilerek SPSS 10.0 programına girilmiştir:

1: Küme eksenli doğru tanımlar (bu gruptaki ifadeler, fonksiyonu tanım kümesinin her elemanını değer kümesinde bir ve yalnız bir elemana eşleyen bağıntı olarak tanımlamaktadır),

2: Küme eksenli yarı-doğru tanımlar (bu gruptaki ifadeler, fonksiyonu eşleme yapan bir bağıntı olarak tanımlamış, fakat fonksiyon olma şartlarını (univalence condition) belirtmemiştir),

3: Cebirsel tanımlar (fonksiyonu, değişkenler arasındaki ilişki olarak algılayan ifadeler),

4: Dönüştürme (transformasyon) mantığı içeren tanımlar (bu ifadeler, fonksiyonu dönüştürme yapan bir cebirsel veya aritmetiksel mekanizma olarak algılamaktadır).

Mülakat verilerinin analizinde ise tamamen nitel analiz yöntemleri kullanılmıştır (Miles & Huberman, 1994). Katılımcılar, seslerinin ve görüntülerinin alınmasını istememişlerdir. Bu nedenle mülakatlar, katılımcıların bu isteği üzerine sadece yazılı olarak kaydedilmiştir. Katılımcıların ifadeleri üzerinde herhangi bir değişikliğe gidilmemiş ve mülakat esnasında kullandıkları kelimeler aynen muhafaza edilmiştir. Mülakat sonunda da, her bir katılımcıya mülakatın yazılı dokümanı incelemesi ve (kabul ediyor ise) onaylaması için verilmiştir. Araştırmacılar bu şekilde, mülakat verilerinin güvenilirliğinin sağlanmasında üye kontrolünden (member checking) yararlanmayı amaçlamışlardır (Creswell, 1998). Daha sonra, yazılı dokümanlar çoğaltılmış ve çoğaltılan kopyalar, araştırmacılar tarafından eşzamanlı olarak analiz edilmiştir. Bu şekilde, araştırmacıardan kaynaklanması muhtemel subjektif düşünce ve algılamaların giderilmesi amaçlanmıştır. Her bir araştırmacı, yazılı formdaki mülakat

bilgilerini kodlamıştır. Kodlama işlemi, yazılı formların değişik kopyaları üzerinde her bir araştırmacı tarafından tekrarlanmıştır ve bu süreçte araştırmacılar belirli aralıklarla (yüz- yüze veya internet üzerinden) bir araya gelerek yaptıkları analizlerle ilgili gerekli tartışma ve fikir alışverişinde bulunmuşlardır. Analizin son aşamasında ise araştırmacıların üretmiş olduğu kodlar, bir bütün olarak değerlendirilip karşılaştırılarak içeriksel açıdan aynı temalara sahip fikirler daha genel kategoriler altında sınıflandırılmıştır.

3. BULGULAR

Bu aşamada, öğrencilerin öncelikle fonksiyon, denklem ve polinom kavramlarıyla ilgili sahip oldukları bilgi ve kavram imajları anket sonuçları üzerinden incelenecektir. Daha sonrada, öğrencilerin fonksiyon denklem ve polinom kavramları arasındaki ilişkilere ait bilgileri incelenecek ve bu bağlamda test ve mülakat sonuçları bütünlük olarak sunulacaktır.

Testteki birinci soru, öğrencilerin fonksiyon kavramını nasıl anladıklarını araştırmak için kullanılmıştır.

S1. Fonksiyon nedir? Tanımlayınız.

Öğrencilerin bu soruya verdikleri cevaplar dört ana kategoride sınıflandırılmıştır (Tablo 1 e bakınız).

Tablo 1. Öğretmen adaylarının fonksiyon kavramını anlayış biçimleri

Kategoriler	Frekans	Yüzde
Küme eksenli doğru tanımlar	53	45
Küme eksenli yarı-doğru tanımlar	49	42
Cebirsel tanımlar	7	6
Dönüştürme mantığı içeren tanımlar	8	7
Toplam	117	100

Tablo 1 den görüldüğü üzere, katılımcıların %87 gibi çok büyük bir bölümü küme eksenli tanımlar vermişlerdir. Bu ifadeler, fonksiyonu iki kümenin elemanları arasında eşleme yapan bir bağıntı olarak tanımlamaktadırlar. Burada dikkat çeken nokta, bu tür tanımlar veren öğrencilerin neredeyse yarısı (%45) fonksiyon kavramının temel özelliklerini (fonksiyon olma şartlarını) vurgularken geri kalan kısmı fonksiyon olma şartlarından hiç bahsetmemiştir. Aşağıda bu gruptaki cevapları temsil eden iki örnek verilmiştir:

'Bir kümenin her elemanını başka bir kümede bir ve yalnız bir elemana eşleyen bağıntıya fonksiyon denir' (Ö28).

'*A ve B iki küme olmak üzere, A dan B ye eleman eşleyen bir f bağıntısına fonksiyon denir*' (Ö107).

Toplam katılımcıların, %6 sı cebirsel tanımlar vermişler ve bu gruptaki öğrenciler fonksiyonu x ve y gibi değişkenler arasındaki ilişki olarak algılamışlardır. Bu gruptaki yanıtların temel özelliğini anketteki 39 numaralı öğrencinin verdiği tanımda görmek mümkündür:

'*Fonksiyon, cebirsel bir ifadedeki bilinmeyenlerden [değişkenlerden] birindeki değişime karşın diğer değişkendeki oluşan değişimi ifade eder*' (Ö39).

Geri kalan %7 lik kısım ise fonksiyonu dönüştürme yapan bir mekanizma olarak algılamışlardır. Cebirsel ve dönüştürme mantığı içeren tanımların ortak özelliği ise bu tanımlamaları yapan öğrencilerin fonksiyon olma şartlarından gizli veya açık hiçbir şekilde bahsetmemiş olmalarıdır.

Testteki ikinci soru, öğrencilerin fonksiyonlara ilişkin geliştirmiş oldukları kavram imajlarını araştırmak için kullanılmıştır.

S2. Birkaç tane fonksiyon örneği yazınız.

Yapılan inceleme sonucunda, öğrenci yanıtlarının dört kategoride toplandığı belirlenmiştir: *Yanıt yok, Cebirsel ifadeler, Venn-şemaları, Fonksiyon makinesi ve Grafikler*. Toplamda katılımcıların yaklaşık üçte ikisi (%64) cebirsel ifadeleri fonksiyon örnekleri olarak verirken bunu %14 lük bir oranla Venn-şeması örnekleri takip etmiştir. Bir öğrenci grafik çizerken bir öğrencide fonksiyon makinesi örneği vermiştir. Katılımcıların %20 ise bu soruya yanıt vermemiştir. Bu verilerden, öğrencilerin fonksiyonlarla ilgili sahip oldukları kavram imajları arasında cebirsel ifadelerin çok baskın olduğu görülmektedir.

Testteki 3. ve 4. sorular sırasıyla öğrencilerin polinom kavramını nasıl algıladıklarını ve bu kavrama ilişkin ne tür kavram imajları geliştirdiklerini araştırmak için kullanılmıştır.

S3. Polinom nedir? Tanımlayınız.

Tanıma ilişkin öğrenci yanıtları, formal tanımlar, yarı-formal tanımlar ve ilgisiz açıklamalar olmak üzere üç grupta sınıflandırılmıştır (Tablo 2 e bakınız).

Tablo 2. Öğretmen adaylarının polinom kavramına ilişkin kavram tanımları

Kategoriler	Frekans	Yüzde
Yanıt yok	10	9
Formal tanımlar	69	59
Yarı-formal tanımlar	25	21
Alakasız açıklamalar	13	11
Toplam	117	100

Katılımcıların %59'u formal tanımlar vermişlerdir. Bu tanımlar, öğrencilerin polinom kavramını reel katsayılı ve üsleri doğal sayılar olan terimler toplamından oluşan cebirsel ifadeler olarak algıladıklarını göstermektedir. Örneğin, anketteki 52 numaralı öğrenci polinomu: $a_n \neq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ax + a_0$ 'çok terimlisine polinom denir' (Ö52), şeklinde tanımlamış bulunmaktadır. Yarı formal tanımlar, polinom kavramını cebirsel bir ifade olarak tanımlamakla birlikte polinomdaki değişken kuvvetleri ile ilgili tatmin edici açıklamalar yapmamışlar veya polinomu reel katsayılı bir fonksiyon olarak görmekle birlikte her fonksiyonun bir polinom olamayabileceği gerçeğini ihmal etmişlerdir: 'Polinom, katsayıları doğal sayılar olan özel bir fonksiyondur' (Ö62). Epistemolojik olarak yanlış olan ve polinom kavramından daha ziyade denklem gibi diğer matematiksel kavramları çağrıştıran açıklamalar ise 'ilgisiz açıklamalar' kategorisinde değerlendirilmiştir. 92 numaralı öğrencinin vermiş olduğu aşağıdaki tanım bu gruptaki yanıtların tipik bir örneğidir:

' $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ şeklindeki denklemlere polinom denir' (Ö92).

Öğrencilerin polinomlara ilişkin kavram tanımları ve kavram imajları arasında ise genel anlamda bir tutarlılığın var olduğu gözlemlenmiştir. Anketteki dördüncü soru ise aşağıda verilmiştir:

S4. Birkaç tane polinom örneği yazınız.

Bu soruya, katılımcıların %68'i doğru örnekler verirken %10'luk bir kesim yanlış örnekler vermiştir. Bu yanlış örnekler ise polinom içerisindeki değişkenlerin kuvvetlerinin doğal sayı olması gerektiği kuralını göz ardı eden içeriksel hatalardır (Tablo 3 e bakınız).

Tablo 3. Öğretmen adaylarının polinom kavramına ilişkin kavram imajları

Kategoriler	Frekans	Yüzde
Yanıt yok	26	22
Doğru örnekler	79	68
Yanlış örnekler	12	10
Toplam	117	100

Polinom ve fonksiyon kavramlarına kıyasla öğrencilerin denklem kavramıyla ilgili içeriksel açıdan çok daha zengin bilgi geliştirdikleri ve farklı prototipte birden fazla kavram imajları oluşturdukları gözlemlenmiştir.

S5. Denklem nedir? Tanımlayınız.

S6. Birkaç tane denklem örneği yazınız.

Toplamda katılımcıların %90 lık bir kesimi denklemi, iki matematiksel ifade arasındaki eşitlik veya bir matematiksel ifadenin 0 (sıfır)'a eşitlenmiş hali olarak algılamışlardır. Bu öğrenciler verdikleri ilave bilgilerde, denklemin statik bir matematiksel ifade olduğu, birden fazla bilinmeyen içerebileceği ve bir denklemin içerisindeki bilinmeyenin alacağı bazı değerler için sağlanabileceği düşüncelerini vurgulamışlardır. %10'luk öğrenci kesimi ise bu soruyu yanıtsız bırakmıştır. Öğrencilerin denklemlerle ilgili geliştirmiş oldukları kavram imajları genel olarak iki kategoride toplanmıştır (Tablo 4'e bakınız)

Tablo 4. Öğretmen adaylarının denklem kavramına ilişkin kavram imajları

Kategoriler	Frekans	Yüzde
Yanıt yok	6	5
Doğrusal denklemler	23	20
Farklı prototipte yazılmış denklemler	88	75
Toplam	117	100

Tablo 4 deki verilerden anlaşıldığı üzere, katılımcıların beşte birlik kesiminin kavram imajları lineer denklem tiplerinden oluşmaktadır. Buna karşılık öğrencilerin, dörtte üçlük kesiminin kavram imajları ise logaritmik, trigonometrik, üstel ve diferansiyel denklemler gibi çok geniş bir yelpazeyi kapsayacak şekilde farklı denklem tiplerini içermektedir. Buraya kadarki veriler, öğrencilerin fonksiyon, denklem ve polinom kavramlarından her biriyle ilgili sahip oldukları bilgi ve kavram imajlarını özetlemektedir. Bundan sonra sunulacak veriler ise öğrencilerin bu kavramlar arasındaki ilişkilere yönelik bilgilerini incelemek amacıyla taşımaktadır. Bu inceleme ise beş soru üzerinden gerçekleştirilecektir. Ankette kullanılan yedinci soru, öğrencilerin denklem

ve fonksiyon kavramları arasındaki içeriksel farkın bilincinde olup olmadıklarını ortaya çıkarmayı amaçlamaktadır.

S7. Size göre fonksiyon ve denklem kavramları arasında bir fark var mıdır? Cevabınızı gerekçeleriyle yazınız.

Bu soruya verilen yanıtlar iki kategoride değerlendirilmiş olup (Tablo 5'e bakınız) toplamın %37'sini oluşturan ve doğru kabul edilen yanıtlar fonksiyon ve denklem arasındaki farkı doğru olarak izah etmişlerdir. Bu gruptaki öğrenciler, fonksiyonun eşleme veya dönüştürme yapan dinamik bir mekanizma olduğunu, denklemin ise sadece içerisindeki değişkenlerin alacağı sınırlı veya sonsuz değerler için sağlanan statik (durğan) bir matematiksel yapı olduğunu net bir şekilde vurgulamışlardır.

Tablo 5 deki yanlış olarak kabul edilen cevaplar, denklem ve fonksiyon kavramları arasında bir fark olmadığını ifade eden açıklamaları içermektedir. Sınav kâğıtlarından anlaşıldığı üzere bu gruptaki öğrenciler, cebirsel formda yazılmış olan fonksiyon ve denklem tipleri üzerinden yorumlar yapmışlar ve değerlendirmelerinde de bu tür ifadelerin şekline (ortamda x ve y gibi değişkenlerin bulunup bulunmadıklarına) bakıp arkalarındaki manayı algılamada yetersizlik göstermişlerdir. Hem denklem hem de cebirsel fonksiyonlar içerisinde x ve y sembolleri bulunmaktadır dolayısıyla 'denklem ve fonksiyon arasında bir fark yoktur' gibi mantıksal hatalar içeren genellemeler de yapmışlardır. Mülakattan elde edilen veriler de genel olarak test sonuçlarını desteklemektedir. Dört öğrenciden bir tanesi (Ö86) fonksiyon-denklem arasındaki içeriksel farkı tam olarak izah ederken diğer üçü (Ö42, Ö53, Ö108) bu kavramlar arasındaki mahiyet farkını anlama ve izah noktasında yetersiz kalmışlardır. Ö86 ile yapılan mülakattan bir kesit aşağıda verilmiştir:

Mülakatçı: Sana göre, fonksiyon ile denklem arasında bir fark var mıdır?

Öğrenci (Ö86): ... Bence ikisi tamamen farklı şeylerdir. Denklem fonksiyon olmaz çünkü fonksiyon olabilmesi için tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinde bir tek elemana karşılık gelmesi lazım. ... Oysa $y = \frac{4}{x-1}$ ifadesi bir denklemdir, çünkü $x=5$ için $y=1$ olur. Yani bu denklem bazı elemanlar için sağlanır, çözüm kümesi vardır. Ama $x=1$ iken y değerini bulamayız dolayısıyla fonksiyon değildir. ... tanım ve değer kümelerine uymaz [tanım kümesindeki her eleman için bir tane değer üretmez]. ...

Mülakatçı: Tersinden bakarsan ne söylersin? Her fonksiyon bir denklemdir diyebilir miyiz?

Öğrenci (Ö86): ... Hayır söyleyemeyiz, çünkü eğer $f(x)=2x+5$ fonksiyonunu düşünecek olursak bu fonksiyon denklem değildir. Çünkü denklem olabilmesi için öncelikle eşitlik olması gerekir...

Mülakatçı: İşte burada eşitlik var, $f(x)=2x+5$ deyince buradaki 'eşittir' işaretini görürsün.

Öğrenci (Ö86): Hayır onu kastetmiyorum, tamam ‘eşittir işareti (=)’ var ama bu ifade çözülemez. ... Denklem olabilmesi için $2x+5$ in eşitlendiği başka bir şeye mesele bir sayıya yada örneğin $3x-2$ ye eşitlenmesi gerekir. Yani denklemi çözdüğümüzde x i buluruz, denklem belli değerler için sağlanır. Fonksiyonda ise çözüm bulmuyoruz, x e değer verip onun görüntüsünü elde ediyoruz. ... Venn-Şeması çizerek yazdığımız fonksiyonların hiçbiri zaten denklem olamaz...

Testteki 8. ve 9. sorular ise katılımcıların sırasıyla fonksiyon-polinom ve polinom-denklemler kavramları arasındaki ilişkilere yönelik düşüncelerini araştırmak için kullanılmıştır.

S8. Her polinom bir fonksiyon mudur? Her fonksiyon bir polinom mudur? Cevabınızı gerekçeleriyle birlikte yazınız.

S9. Size göre denklem ve polinom aynı şeyler midir? Cevabınızı gerekçeleriyle yazınız.

Test sonuçları, fonksiyon-polinom ilişkisi konusunda öğrencilerin %63 lük bir kesiminin doğru bir düşünce geliştirmiş olduklarını göstermektedir (Tablo 6 ya bakınız). Bu öğrenciler, her polinomun reel katsayılı bir fonksiyon olduğunu belirtmişler ve her fonksiyonun bir polinom olmayabileceği gerçeğini uygun örneklerle açıklamışlardır. Ankette ki 78 numaralı öğrencinin (Ö78) yanıtı bu gruptaki cevapların tipik bir örneğidir.

Her polinom bir fonksiyondur... Ancak her fonksiyon polinom değildir mesela

$f(x) = \frac{2x-5}{x-1}$ $\mathbb{R} - \{1\}$ den $\mathbb{R} - \{2\}$ ye bir fonksiyon iken bu ifade bir polinom değildir.

Tablo 6. Öğretmen adaylarının polinom-fonksiyon ilişkilerine ait cevapları

Kategoriler	Frekans	Yüzde
Yanıt yok	10	9
Doğru	74	63
Yarı doğru	18	15
Yanlış	15	13
Toplam	117	100

Tablo 6 dan görüldüğü gibi %15 lik bir kesimi oluşturan ve ‘yarı doğru’ olarak değerlendirilen yanıtlar, öğrencilerin polinomu fonksiyon olarak kabul etmekle birlikte her fonksiyonun bir polinom olmayabileceği gerçeğinin bilincinde olmadıklarını göstermektedir. Buna ilişkin örnek bir yanıt aşağıda verilmiştir:

‘Her polinom bir fonksiyon olduğu için her fonksiyonda bir polinomdur’ (Ö52).

Denklem-polinom ilişkisi konusunda ise öğrenciler oldukça başarısız görünmektedirler (Tablo 7 ye bakınız). Katılımcıların ancak %30'luk bir kesimi denklem ve polinomun farklı matematiksel düşünceler olduğunu izah etme yeterliliğini göstermiştir. Yaklaşık %60'lık kesim ise polinom ve denklem kavramlarının aynı şeyler olduğunu iddia etmişlerdir. Ankette yer alan 16 numaralı öğrencinin yanıtında da görüleceği üzere bu öğrenciler denklem ve polinom kavramlarının cebirsel yazılım biçimlerine odaklanmışlar ve bu biçimsel benzerlikler üzerinden yorumlar yapmışlardır.

'Bana göre denklem ve polinom aynı şeylerdir, her ikisinde eşitlik (=) işareti içerir ve eşitliğin her iki yanında da x ve y ler içeren cebirsel ifadeler bulunur' (Ö16).

Tablo 7. Öğretmen adaylarının denklem-polinom ilişkisine dair cevapları

Kategoriler	Frekans	Yüzde
Yanıt yok	13	11
Doğru	15	30
Yanlış	69	59
Toplam	117	100

Öğrencilerle yapılan mülakatlar da, anket sonuçlarını desteklemiş ve dört öğrenciden sadece biri doğru cevap verirken geri kalan üç öğrenci denklem ve polinomun aynı şeyler olduğunu iddia ederek yine yukarıda verilen örnekteki düşünceleri sergilemişlerdir. Denklem-polinom farkını doğru bir şekilde izah eden örnek bir mülakat alıntısı ise aşağıda verilmiştir:

Mülakatçı: Denklem ile polinom sence aynı şeyler midir? Ne dersin?

Öğrenci (Ö42): ... Bence değildir. ...

Mülakatçı: Peki neden değildir? Sebebini açıklar mısın?

Öğrenci (Ö42): ...Polinom ve denklemin her ikisi de matematiksel ifadelerdir ama denklemin çözüm kümesi vardır. ... Denklemden mesela bilinmeyen yerine yani x e bir değer verdiğimizde denklem sağlanır ama benim bildiğim polinomun çözüm kümesi yoktur... Polinomda ise x lerin üstünde doğal sayı olacak ve birde katsayıları her şey [reel sayılar anlamında] olabilir... Ama bir polinom başka bir ifadeye mesela sıfıra eşit olursa o zaman tabii ki denklem olur. Yani ben böyle düşünüyorum. ...

Testteki son soru ise öğrencilerin fonksiyon bilgilerini denklemlerle ilgili problemlerin çözümünde kullanabilme yeteneklerini araştırmaya yöneliktir.

S10. $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) kuralı ile verilen f fonksiyonu $x=2$ için pozitif $x=5$ için negatif bir değer almaktadır. Buna göre $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kaç tane reel kökü vardır? Cevabınızı nedenleriyle birlikte yazınız (Even, 1988 den

uyarlanmıştır).

Öğrenci cevaplarının üç kategoride toplandığı belirlenmiştir. Tablo 8 den görüldüğü üzere, katılımcıların sadece %14'lük kesimi soruya doğru cevap verebilmiştir. Bu öğrenciler, verileri kullanarak x eksenini iki noktada kesen parabol grafikleri çizmişler ve daha sonrada ' $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) fonksiyonu x eksenini iki noktada kestiği için buna karşılık gelen $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin iki tane reel kökü vardır' gibi içeriksel açıdan doğru yorumlar yapmışlardır.

Tablo 8. Fonksiyonların temsilleri arasındaki ilişkilendirmelere ait cevaplar

Kategoriler	Frekans	Yüzde
Yanıt yok	42	36
Cebirsel işlemler	31	27
İlişkilendirme & grafiğe kayma	16	14
Teorik bilgilerin tekrarı	28	24
Toplam	117	100

Tablo 8'de belirtildiği üzere, %27'lik kesim cebirsel işlemler yaparak $ax^2 + bx + c = 0$ denklemini çözmeye çalışırken %24 lük kesimde 'ikinci derece denklemlerin iki tane reel kökü vardır' şeklinde teorik bilgiler yazmışlar fakat problemin çözümüne ilişkin mantıklı hiçbir açıklama getirememişlerdir. %36'lık bir kesim ise soruyu yanıtsız bırakmıştır. Öğrencilerle yapılan mülakatlar da benzer sonuçları ortaya koymuştur. Katılımcı dört öğrenciden sadece bir tanesi (Ö53) cebirden grafiğe kayarak x -ksenini iki noktada kesen ' \cap ' ve ' \cup ' tiplerinde parabol grafikleri çizmiş ve $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği x -ksenini iki noktada kesiyorsa buna karşılık gelen $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin iki tane reel kökü vardır yorumunu yapmıştır. İki öğrenci cebirsel işlemler yaparak $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin köklerini bulmaya çalışırken bir öğrencide, ikinci derece denklemlerle ilgili bildiği ezber bilgileri tekrar etmekle yetinmiştir: '*... Bu ikinci dereceden bir denklemdir, dolayısıyla her durumda iki tane reel kökü vardır*' (Ö108).

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, öğretmen adaylarının fonksiyon, denklem ve polinom kavramları ile ilgili bilgi düzeyleri iki boyutu itibariyle incelenmiştir. Birinci boyut, öğretmen adaylarının bu kavramlardan her biriyle ilgili bilgi derinliklerini ve sahip oldukları kavram imajlarını içermektedir. İkinci boyut ise katılımcıların fonksiyon, denklem ve polinom kavramları arasındaki ilişkilere ait bilgi ve düşünce genişliklerini kapsamaktadır. Çalışmanın sonuçları, katılımcıların %87 gibi büyük çoğunluğunun fonksiyonu bir kümeden başka bir kümeye eleman eşleyen bir bağıntı olarak algıladıklarını göstermektedir. Ancak bu öğrencilerin yarısı fonksiyon olma şartını (univalence condition: tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinde tek bir elemana eşlenmesi) açıkça

belirtirken diğer yarısı bu noktada hiç bir yorum yapmamıştır. Bu durum öğrencilerin kayda değer bir bölümünün fonksiyonlarla ilgili kavramsal bilgilerinin eksik olduğu şeklinde yorumlanabilir. Fonksiyon kavramının ikinci temel özelliği ise gelişigüzel bir eşleme (arbitrariness condition) yapıyor olmasıdır. Bir fonksiyon, tanım kümesinden değer kümesine eşleme yaparken bu eşlemeyi herhangi bir cebirsel veya aritmetik kural aracılığıyla yapmak zorunda değildir. Buna ilaveten bir fonksiyonun tanım ve değer kümesindeki elemanlar reel sayılar olmak zorunda da değildir. Bu elemanlar herhangi varlıklar da olabilir. Küme eksenli ve eşleme mantığı içeren tanımlar veren öğrencilerin hiçbiri, bu ikinci özelliği açıkça vurgulamamışlardır. Türkiye’de gerek lise gerekse üniversite düzeyinde yürütülen matematik programları ve okutulan ders kitaplarının içeriğine baktığımızda, ‘bir fonksiyonun gelişigüzel eşleme yapabileceği’ gerçeğinin açıkça vurgulanmadığı görülmektedir. Bu düşünce, verilen bazı örnekler üzerinden gizli bir şekilde öğrencilere iletilmekte bu gizli bilginin algılanması ise tamamen öğrencilere bırakılmaktadır. Öğretmenlik tecrübesi olanlar, sınıf içi öğretim boyutu itibarıyla da durumun aynı olduğunu bilirler. Matematik programları ve ders kitaplarında, ‘gelişigüzel eşleme özelliğinin’ ihmal edilmiş olması öğrencilerin bu noktada yetersiz kalmalarına neden olmuş olabilir. Kanaatimizce, ders kitapları ve sınıf içi öğretim uygulamalarında fonksiyonun gelişigüzel eşlemeler yapabileceği düşüncesinin açık ve net olarak uygun örneklerle izah edilmesi öğrencilerdeki bilgi eksikliğinin giderilmesine yardımcı olacaktır. Dönüşüm eksenli tanım veren öğrenciler ise fonksiyonu daha ziyade cebirsel veya aritmetik işlemler yardımıyla dönüştürme yapan bir mekanizma olarak algılamış bulunmaktadır. Bu durumun, Türkiye’deki lise ve üstündeki matematik programlarının ve ders kitaplarının genellikle bu anlayışla hazırlanmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Oysa bu tür bir anlayış, fonksiyon kavramını cebirsel ve aritmetik işlemlere indirgeyerek fonksiyon tanımını bir anlamda daraltmakta ve fonksiyon kavramını açıklamak noktasında yetersiz kalmaktadır (Dubinsky & Harel, 1992; Breidenbach et al., 1992).

Kavram tanımları ve kavram imajları kişinin matematiksel bir düşünceyle ilgili bilgilerinin iki önemli bileşenini oluşturur. Doğal olarak bu bileşenler arasında içeriksel bir uyumun olması beklenilir. Fakat bu çalışma öğrencilerin geliştirdikleri kavram imajları ve sahip oldukları kavram tanımları arasında her zaman bir uyumun olmayabileceğini göstermiştir. Katılımcıların %87’si eşleme mantığı içeren fonksiyon tanımları verirken yine toplamda katılımcıların %64’lük kesimi cebirsel fonksiyon örnekleri yazmışlardır. Türkiye’deki lise müfredatında, fonksiyon kavramı ilk olarak bağıntı kavramının hemen ardından özel bir bağıntı türü olarak öğrencilere sunulmaktadır. Fonksiyonlarla bu şekilde ilk tanışma, öğrencilerin uzun yıllar boyunca fonksiyon hakkındaki bilgilerinin çekirdeğini oluşturmaktadır. Buna ek olarak, üniversite düzeyinde öğrenciler Soyut Matematik, Soyut Cebir ve Topoloji gibi dersler okumaktadırlar ve bu derslerin içeriğinde de yine yoğun olarak eşleme mantığıyla karşılaşmaktadırlar. Bu durum, öğrencilerin liseden getirmiş oldukları bilgilerin -bu bilgiler kümeden kümeye eleman eşleme mantığını içermektedir- kalıcı hale gelmesinde etkin bir rol oynamış olabilir. Öğrencilerin kavram imajlarının ağırlıklı olarak

cebirsal ifadelerden oluşmasında ise yine lise ve üniversite düzeyinde aldıkları eğitimin etkisi gözlemlenmektedir. Öğrenciler, lise ve üniversite öğrenimleri boyunca genellikle fonksiyonların cebirsal formları ile işlemler yürütmekte ve problemler çözmektedirler ki bu durum öğrencilerin belleklerinde daha ziyade cebirsal görüntülerin oluşmasında ve kalıcı hale gelmesinde etkin bir rol oynamış olabilir. Netice itibarıyla, birinci ve ikinci sorulara verilen yanıtlara bir bütün olarak baktığımızda, öğrencilerin ders kitaplarında ve sınıf içi öğretimlerde yapılan vurgulara (cognitive focus) paralel bir bilgi ve kavram imajı geliştirdikleri gözlemlenmektedir.

Araştırmanın diğer bir sonucu olarak ise öğretmen adaylarının fonksiyonlara nazaran polinom ve denklem kavramlarıyla ilgili olarak içeriksel açıdan daha zengin bilgiler geliştirdikleri belirlenmiştir. Katılımcıların %90'ı denklemi, içerisindeki bilinmeyenlerin alacağı sınırlı veya sonsuz sayıdaki değerler için sağlanan iki cebirsal ifade arasındaki denklik hali olarak algılamışlardır. Benzer şekilde, öğrencilerin çoğunluğu polinom kavramını, üslerinde doğal sayılar bulunan reel katsayılı terimlerin toplamından oluşan cebirsal bir ifade olarak algılamışlardır ki, bu da katılımcıların polinom kavramıyla ilgili doğru bilgiler geliştirdiklerini göstermektedir. Öğrencilerin denklem ve polinomlara ilişkin geliştirdikleri kavram imajları ve sahip oldukları kavram tanımları arasında genel manada bir tutarlılığın olduğu gözlemlenmektedir. Her iki konuyla ilgili doğru tanımlar veren öğrencilerin yüzdesi ile bu konularla ilgili uygun ve doğru imajlar geliştiren öğrencilerin yüzdesi birbirine çok yakındır (Tablo 2, 3, 4'e bakınız). Bu konuların izahında kullanılan temsillerin azlığı -sadece cebirsal ifadeleri içermektedir- öğrencilere polinom ve denklemlerle ilgili uygun ve doğru kavram imajları geliştirmeleri noktasında zihinsel bir kolaylık sağlıyor olabilir. Fonksiyonlar konusunda ise durum tamamen farklıdır. Grafikler, cebirsal ifadeler, liste biçiminde yazılımlar, Venn-şemaları ve hatta tablolar gibi çok sayıda temsiller kullanılmaktadır ki bu durumda öğrencilerde fonksiyonlarla ilgili kavram imajları geliştirme noktasında zihinsel bir karmaşaya neden olabilmektedir (Thompson, 1994; DeMarois & Tall, 1996).

Çalışmanın diğer önemli bir bulgusu ise öğretmen adaylarının fonksiyon, denklem ve polinom gibi temel cebirsal kavramlar arasındaki ilişkileri anlamada çok daha zayıf olduklarını göstermektedir. Farklı anlayış biçim ve düzeyleri olmakla birlikte genel olarak fonksiyon, dönüştürme (eşleme) yapan dinamik bir mekanizma (bağıntı) olarak algılanabilir (Sfard, 1992; Bredienbach, 1992). Denklem ise statik bir matematiksel yapıdır ve bu statik yapı içerisindeki bilinmeyen(ler)in alacağı sınırlı veya sonsuz sayıda değerler için sağlanır. Öğrenci yanıtları, katılımcıların sadece %37'sinin fonksiyon-denklemler arasındaki bu içeriksel farkın bilincinde olduklarını göstermektedir (Tablo 5'e bakınız). %60'lık çoğunluk ise denklem ile fonksiyonu aynı şeyler olarak algılamışlardır. Bu öğrenciler, denklem ve fonksiyonların cebirsal yazılımları arasındaki biçimsel benzerlikleri gerekçe göstererek 'denklem ve fonksiyon aynı şeylerdir' yorumunu yapmışlardır. Bu türden açıklamalar, bizleri öğretmen adaylarının sorulara yanıt verirken kavram tanımları ile değil daha ziyade kavram imajları ile hareket ettikleri sonucuna götürmektedir. Bilindiği gibi her fonksiyon cebirsal bir ku-

ralla ifade edilmek zorunda değildir. Örneğin, Venn-şeması ve listeleme (kümelerle ifade) yöntemiyle yazılmış olan fonksiyonların cebirsel formüllerle temsili mümkün olmayabilir. Bu gerçek, öğrencilerin büyük bir kısmı tarafından göz ardı edilmiştir.

Öğrencilerin fonksiyon kavramının temsilleri (grafikler, cebirsel ifadeler, v.s.) arasında ilişkilendirmeler yapabilmeleri, gerektiğinde birinden diğerine rahat bir şekilde geçebilmeleri fonksiyon denilen soyut matematiksel düşünceyle ilgili bilgi derinliklerinin en önemli göstergelerinden biridir (Thompson, 1994). Bu tür düşünsel beceriler geliştirmiş olan öğrenciler fonksiyonlarla ilgili bilgilerini uyarlayarak matematiğin farklı alanlarıyla ilgili problem çözümlerinde rahatça kullanabilirler. Anketteki 11. soru, öğrencilerin fonksiyon bilgilerini bu açıdan incelemek amacıyla kullanılmıştır. Sonuçlar, katılımcıların sadece %14'lük bir kesiminin cebirsel ve grafiksel yapılar arasında ilişkilendirmeler yapabildiklerini ve bunun sonucu olarak da fonksiyon bilgilerini adapte ederek ikinci derece denklemlerle ilgili verilen soruyu doğru olarak yanıtladıklarını göstermektedir. Katılımcıların dörtte birlik kesimi, cebirsel yaklaşımlar sergilemişler ve $\Delta = b^2 - 4ac$ ve $x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$ formüllerini kullanılarak soruyu çözmeye çalışmışlar ancak sorunun cebirsel çözümü matematiksel olarak mümkün olmadığı için sonuca ulaşamamışlardır. %24'lük bir kesim ise 'ikinci dereceden bir denklemin iki tane kökü vardır' şeklindeki teorik bilgileri tekrar etmekle birlikte sorunun çözümüne ilişkin hiçbir mantıklı açıklama getirememişler ve %37'lik bir kesim ise soruyu yanıtsız bırakmıştır. Bu veriler, -Even'ın (1988) çalışmasındaki gibi- öğretmen adaylarının çok az bir kısmının fonksiyonların cebirsel ve grafiksel formları arasında ilişkilendirmeler yapabildiklerini ve fonksiyon bilgilerini adapte ederek farklı alanlardaki problem çözümlerinde kullanabilme becerisi geliştirmiş olduklarını göstermektedir.

Epistemolojik olarak polinom, x ve y gibi değişkenleri içeren terimlerin toplamından oluşan cebirsel bir ifadedir ve bu ifadedeki değişkenlerin katsayıları reel sayı, üsleri de doğal sayılar olmak zorundadır. Üniversite ve lise matematik müfredatında polinomlara ilişkin bu formatta bir anlayış ön planda tutulmakla birlikte polinomların özel bir fonksiyon türü olduğu gerçeği de öğrencilerin dikkatlerine sunulmaktadır. Bir manada öğrenciler, 'polinomlar ailesi, fonksiyonlar ailesinin bir alt kümesidir' düşüncesiyle gizli veya açık bir şekilde yüz yüze gelmektedir. Aldıkları eğitimin etkisiyle olsa gerek katılımcıların %63'lük bir kesimi her polinomun bir fonksiyon olduğu fakat her fonksiyonun bir polinomu temsil etmeyebileceği gerçeğini vurgulamışlar ve düşüncelerini uygun örnekler üzerinden detaylı bir şekilde açıklamışlardır. 3. ve 9. sorulara verilen yanıtları bir bütün olarak değerlendirdiğimizde ise öğrencilerin üçte ikilik bir kesiminin polinom kavramını hem statik bir cebirsel ifade hem de IR den IR ye dönüştürme yapan bir fonksiyon olarak algıladıkları anlaşılmaktadır. Bu ise katılımcıların kayda değer bir kesiminin polinom kavramıyla ilgili doğru, zengin ve adapte edilebilir bir bilgi geliştirmiş olduklarını ve bu kavramı yerine göre iki farklı şekilde anlayabildiklerini göstermektedir. Polinom-denklemler kavramları arasındaki içeriksel farkı anlama konusunda ise öğrenci başarısının %30'a düştüğü görülmüştür (Tablo 7 ye bakınız). Bu gruptaki öğrencilerin, polinom-denklemler ilişkisine dair dü-

şünce derinlikleri, Ö42 öğrencisiyle yapılan mülakatta genel hatlarıyla görülmektedir. Öğrenciler, polinomları sadece cebirsel bir ifade olarak görürken, denklemi ortamdaki değişken(ler)in alacağı bazı değerler için sağlanan bir denklik hali olarak değerlendirmektedirler. %59'luk bir dilim ise polinom ve denklemin aynı şeyler olduğu düşüncesini belirtmişler ve gerekçe olarak da denklem ve polinomların cebirsel ifadelerden oluştuğu gerçeğini belirtmişlerdir ki, bu da yine bu kavramlara dair geliştirdikleri kavram imajları ile hareket ettiklerini göstermektedir.

Özet olarak bu çalışmada, 'kişi bilmediği şeyi öğretemez' düşüncesinden hareketle öğretmen adaylarının fonksiyon, denklem ve polinom kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkilere dair bilgileri incelenmiştir. Çalışmanın bulguları öğretmen adaylarının özellikle fonksiyon, denklem ve polinom kavramları arasındaki içeriksel farkı ve benzerlikleri anlamada oldukça yetersiz kaldıklarını göstermektedir. Bu bilgi eksikliğinin öğretmenlerin mesleki hayatlarındaki başarılarını negatif yönde etkileyeceği ise kuşkusuzdur (Even, 1988; Wilson, 1994). Sonuç olarak, öğretmen adaylarının bilgi eksiklikleri eğitim fakültelerinde yürütülen matematik programının içeriğinden ve yürütülen öğretim yaklaşımlarından kaynaklanıyor olabilir. Dolayısıyla yapılacak yeni bir çalışmayla eğitim fakültelerinde okutulan matematik programının içeriği, sınıf içi öğretim yaklaşımları ve bunların öğrencilerin bilgi gelişimi üzerindeki etkileri bir bütün olarak değerlendirilmeli ve elde edilecek yeni bulgular ışığında öğretmen adaylarının mesleğe daha donanımlı olarak hazırlanmalarının yolları araştırılmalıdır. Bu noktada, Milli Eğitim Bakanlığı'nın ilköğretim ve lise matematik programlarını (Milli Eğitim Bakanlığı, 2005a, 2005b) yapılandırmacı yaklaşıma dayalı olarak güncellemesi ve Türkiye'de öğretmen yetiştirme sorumluluğunu üstlenen Eğitim Fakültelerinin programlarının da Yükseköğretim Kurulu Başkanlığı (YÖK) tarafından benzer anlayışla revize edilmesi (YÖK Raporu, 2007) ileriye dönük iyi işaretler olarak düşünülmektedir.

5. KAYNAKLAR

1. Askew, M., Brown, M., Rhodes, V., William, D. & Johnson, D. (1996), '*Effective Teachers of Numeracy*', London: King's College.
2. Ball, D. L. (1991), '*Research on Teaching Mathematics: Making Subject-Matter Knowledge Part of the Equation*', in J. Brophy (Ed.), *Advances in Research on Teaching*, Greenwich, CT: JAI Press, 2, pp. 1-48.
3. Bayazit (2006), '*The Relationship between Teaching and Learning Through the Context of Functions*', Unpublished PhD Thesis, University of Warwick, United Kingdom.
4. Breidenbach, D., Dubinsky, Ed., Hawks, J., & Nichols, D. (1992), '*Development of the Process Conception of Function*', *Educational Studies in Mathematics*, 23(3), pp. 247-285.
5. Bromme, R. (1995), '*What Exactly Is Pedagogic Content Knowledge? Critical Remarks Regarding a Fruitful Research Program*', in S. Hopmann & K. Riquarts (Eds.), *Didactic and/or Curriculum*, IPN Schriftenreihe, Kiel: IPN, 147, pp. 205-216.

6. [Creswell, J. W.](#) (1998). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five traditions*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
7. DeMarois, P & Tall, D. (1996). Facets and Layers of the Function Concept. *Proceedings of PME 20, Valencia*, vol. 2, 297-304.
8. Dubinsky, Ed. & Harel, G. (1992), 'The Nature of the Process Conception of Function', in G. Harel & Ed. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, United States of America: Mathematical Association of America, pp. 85-107.
9. Eisenberg, T. (1991), 'Function and Associated Learning Difficulties', in D.O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 140-152.
10. Even, R. & Tirosh, D. (2001), 'Teacher Knowledge and Understanding of Students' Mathematical Learning', in L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*, USA: Laurence Erlbaum, pp. 219-240.
11. Even, R. (1988, July). *Pre-service teachers conceptions of the relationships between functions and equations*. Paper presented at the Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education XI (PME XII), Hungary.
12. Even, R. (1990), 'Subject Matter Knowledge for Teaching and the Case of Functions', *Educational Studies in Mathematics*, 21(6), pp. 521-544.
13. Even, R. (1992), 'The Inverse Function: Prospective Teachers' Use of Undoing'. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 23(4), pp. 557-562.
14. Even, R. (1993), 'Subject-Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge: Prospective Secondary Teachers and the Function Concept', *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(2), pp. 94-116.
15. Ginsburg, H. (1981), 'The Clinical Interview in Psychological Research on Mathematical Thinking: Aims, Rationales, Techniques', *For the Learning of Mathematics*, 1(3), pp. 57-64.
16. Hadjidemetriou, C. & Williams, J. (2001), 'Children's Graphical Conceptions: Assessment of Learning for Teaching', in M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Netherlands: Program Committee, 3, pp. 89-96.
17. Heibert, J., Lafevre, P. (1986), 'Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics', New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc.
18. Hitt, F. (1998), 'Difficulties in Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function', *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), pp. 123-134.
19. Leinhardt, G. (2001), 'Instructional Explanations: A Commonplace for Teaching and Location of Contrast', in V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (4th ed.), Washington, DC: American Educational Research Association, pp. 333-357.
20. Marks, R. (1990), 'Pedagogical Content Knowledge: From a Mathematical Case to a Modified Conception', *Journal of Teacher Education*, 41(3), pp. 3-11.
21. Merriam, S. B. (1988), 'Case Study Research in Education: Qualitative Approach', London: Jossey-Bass Publishers.

22. Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994), '*Qualitative Data Analysis: An Expanded Sourcebook*', London: Sage Publications
23. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2005a). *İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı*, Ankara.
24. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2005b). *Orta Öğretim Matematik (9,10,11 ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı*, Ankara.
25. Norman, A. (1992), '*Teachers' Mathematical Knowledge of the Concept of Function*', in G. Harel & Ed. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy*, United States of America: Mathematical Association of America, pp. 215-232.
26. Piaget, J. (1972), '*Psychology and Epistemology: Towards a Theory of Knowledge*', Singapore: Pte Ltd.
27. Sfard, A. (1992), '*Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification-The Case of Function*', in Harel & Ed. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy*, United States of America: Mathematical Association of America, pp. 59-85.
28. Sherin, M. G., Sherin, B. L. & Madanes, R. (2000), '*Exploring Diverse Account of Teacher Knowledge*', *Journal of Mathematical Behaviour*, 18(3), pp. 357-375.
29. Shulman, L. (1986), '*Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching*', *Educational Researcher*, 15, pp. 4-14.
30. Skemp, R. R. (1987), '*The Psychology of Learning Mathematics*', Great Britain: Richard Clay Ltd.
31. Stake, R. E. (1995), '*The Art of Case Study Research*', London: Sage Publication Inc.
32. Tall, D. & Vinner, S. (1981), '*Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity*', *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 151-169.
33. Thompson, P. W. (1994), '*Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum*', in Ed. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, I, CBMS Issues in Mathematics Education*, 4, pp. 21-44.
34. Tirosh, D., Even, R., & Robinson, N. (1998), '*Simplifying Algebraic Expressions: Teacher Awareness and Teaching Approaches*', *Educational Studies in Mathematics*, 35, pp. 51-64.
35. Vinner, S. (1983), '*Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function*', *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), pp. 293-305.

36. Vinner, S. (1992), 'The *Function Concept as a Prototype for Problems in Mathematics Learning*', in G. Harel & Ed. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy*, United States of America: Mathematical Association of America, pp. 195-213.
37. Watkins, C. & Mortimore, P. (1999), '*Pedagogy: What Do We Know?*', in P. Mortimore (Ed.), *Understanding Pedagogy and its Impact on Learning*, London: Paul Chapman Publishing Ltd, pp. 1-20.
38. Wilson, M. R. (1994). One preservice secondary teacher's understanding of function: The impact of a course integrating mathematical content and pedagogy. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(4), 346- 370.
39. Wilson, S. M., Shulman, L. S. & Richert, A. E. (1987), '*150 Different Ways*' of *Knowing: Representations of Knowledge in Teaching*', in J. Calderhead (Ed.), *Exploring Teachers' Thinking*, London: Cassel Education Ltd, pp. 104-124.
40. Yin, R. K. (2003), '*Case Study Research: Design and Methods*', United Kingdom: Sage Publications Ltd.
41. YÖK Raporu. (2007). *Eğitim Fakültelerinde Uygulanacak Yeni Programlar Hakkında Açıklama*. <http://www.yok.gov.tr/egitim/ogretmen/aciklama.doc> adresinden 1 Nisan 2007 tarihinde alınmıştır.