Eylül 2009 Cilt:17 No:3 Kastamonu Eğitim Dergisi 933-940

FEKETE-SZEGÖ PROBLEMİ ÜZERİNE

Halit ORHAN, Ömer DURMAZPINAR, Hükmi KIZILTUNÇ

Atatürk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Erzurum

Özet

$\alpha\ (0\le\alpha<1),\ \lambda\ (0\le\lambda\le 1)$ ve $\beta>0$ *olmak üzere*

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{\lambda z^2 f'''(z)+(2\lambda+1)zf''(z)+f'(z)}{\lambda z^2 g''(z)+zg'(z)}\right)>0$$

eşitsizliğini sağlayan, Δ *birim diskinde tanımlı normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı* $H(\alpha,\beta,\lambda)$ *ile gösterilsin.* $g(z)$, *birim diskte*

$$\left|\arg\left(z\frac{\lambda z^2 f'''(z)+(2\lambda+1)zf''+f'(z)}{\lambda z^2 f''(z)+zf'(z)}-\alpha\right)\right|<\frac{\pi}{2}\beta \qquad (k\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\})$$

eşitsizliğini sağlayan, normalize edilmiş analitik fonksiyonların $P_\alpha(\beta,\lambda)$ *ile gösterilen sınıfına ait bir fonksiyon olsun.* $f\in H(\alpha,\beta,\lambda)$ *fonksiyonu* $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$ *ile verilsin.* $3(2\lambda+1)\mu\ge 4(\lambda+1)^2$ *olduğunda* $\left|a_3-\mu a_2^2\right|$ *fonksiyoneli için kesin üst sınır elde edildi.*

ON THE FEKETE-SZEGÖ PROBLEM

Abstract

For $\alpha\ (0\le\alpha<1),\ \lambda\ (0\le\lambda\le 1)$ *and* $\beta>0$, *let* $H(\alpha,\beta,\lambda)$ *be the class of normalized functions defined in the unit disk* Δ *by*

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{\lambda z^2 f'''(z)+(2\lambda+1)zf''(z)+f'(z)}{\lambda z^2 g''(z)+zg'(z)}\right)>0.$$

Let $g(z)$, *be the function belong to the class of normalized functions* $P_\alpha(\beta,\lambda)$ *which is provide the inequality*

$$\left|\arg\left(z\frac{\lambda z^2 f'''(z)+(2\lambda+1)zf''+f'(z)}{\lambda z^2 f''(z)+zf'(z)}-\alpha\right)\right|<\frac{\pi}{2}\beta \qquad (k\in \mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\})$$

in the unit disk Δ. *For* $f\in H(\alpha,\beta,\lambda)$ *and given by* $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$, *a sharp upper bound is obtained for* $\left|a_3-\mu a_2^2\right|$ *when* $3(2\lambda+1)\mu\geq 4(\lambda+1)^2$.

1. GİRİŞ

$\Delta=\{z:|z|<1\}$ açık birim diskinde analitik,

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \tag{1.1}$$

biçimindeki fonksiyonların ailesi A olsun. Ayrıca Δ birim diskinde analitik ve ünivalent olan fonksiyonların sınıfı S ile gösterilsin. A sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonu, bazı $\alpha\ (0\leq\alpha<1)$, $\beta\ (0<\beta\leq 1)$ değerleri için

$$\left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-\alpha\right)\right|<\frac{\pi}{2}\beta \quad (z\in\Delta) \tag{1.2}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, Δ diskinde α tipi β mertebeden güçlü olarak yıldızıldır denir ve $\tilde{S}_{\alpha}^{*}(\beta)$ ile gösterilir.

Eğer $f\in A$ fonksiyonu $\alpha\ (0\leq\alpha<1)$, $\beta\ (0<\beta\leq 1)$ değerleri için

$$\left|\arg\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\alpha\right)\right|<\frac{\pi}{2}\beta \quad (z\in\Delta) \tag{1.3}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, Δ diskinde α tipi β mertebeden güçlü olarak konvekstir denir ve bu tür fonksiyonların sınıfı $\tilde{C}_{\alpha}(\beta)$ ile gösterilir.

$f(z)\in A$ fonksiyonu, eğer tüm $z\in\Delta$ ve bazı $\alpha\ (0\leq\alpha<1)$, $\lambda\ (0\leq\lambda\leq 1)$, $\beta\ (0<\beta\leq 1)$ değerleri için

$$\left|\arg\left(z\frac{\lambda z^2 f'''(z)+(2\lambda+1)zf''+f'(z)}{\lambda z^2 f''(z)+zf'(z)}-\alpha\right)\right|<\frac{\pi}{2}\beta \tag{1.4}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, $P_{\alpha}(\beta,\lambda)$ sınıfındadır denir.

Burada özellikle $P_\alpha(\beta,0)=\tilde{C}_\alpha(\beta)$ eşitliği vardır. $\mu \in \mathbb{C}$ için Fekete-Szegö [3] analitik ünivalent fonksiyonların S sınıfı için $\left|a_3-\mu a_2^2\right|$ modülünün maksimum değerini elde etmiştir. S nin değişik fonksiyonlarında, değişik yöntemlerle $\left|a_3-\mu a_2^2\right|$ için üst sınır bulma problemi bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır [4, 5, 6, 7, vs.].

Biz bu çalışmada Kamali ve Akbulut [1] tarafından negatif katsayılı fonksiyonlar için çalışılmış $C(n,\lambda,\alpha)$ sınıfını Fekete-Szegö problemi için inceleyip, Jahangiri [2]' nin yöntemini kullanarak $\left|a_3-\mu a_2^2\right|$ fonksiyoneli için kesin üst sınır elde ettik.

1.1. Tanım: f, A ya ait bir fonksiyon, $\alpha\ (0\le\alpha<1)$, $\lambda\ (0\le\lambda\le1)$ ve $\beta>0$ olsun. Bu takdirde $f\in H(\alpha,\beta,\lambda)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $g(z)=z+b_2z^2+b_3z^3+\ldots$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{\lambda z^2 f'''(z)+(2\lambda+1)zf''(z)+f'(z)}{\lambda z^2 g''(z)+zg'(z)}\right)>0 \qquad (z\in\Delta) \tag{1.5}$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde $g\in P_\alpha(\beta,\lambda)$ fonksiyonunun var olmasıdır.

Ayrıca, $H(\alpha,\beta,0)=M(\alpha,\beta)$ eşitliği kolayca yazılır. $M(\alpha,\beta)$ sınıfı Frasin *et al.* [8] tarafından çalışılmıştır.

2. TEMEL SONUÇLAR

Temel sonuçlarımızı türetmek için aşağıdaki Yardımcı Teoreme ihtiyacımız vardır.

2.1. Yardımcı Teorem: $h\in P$ olsun. Yani, h, Δ birim diskinde analitik ve $z\in\Delta$ için $\operatorname{Re}h(z)>0$ olmak üzere $h(z)=1+c_1z+c_2z^2+\ldots$ biçiminde verilsin. Bu takdirde

$$\left|c_2-\frac{c_1^2}{2}\right|\le 2-\frac{\left|c_1^2\right|}{2}$$

eşitsizliği yazılır [9].

2.2. Teorem: (1.1) ile verilen $f(z)$ fonksiyonu $H(\alpha,\beta,\lambda)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde $0\le\alpha<1,\ 0\le\lambda\le1,\ \beta\ge1$ ve $3(2\lambda+1)\mu\ge4(\lambda+1)^2$ için

$$\left|a_3-\mu a_2^2\right|\le$$

$$\frac{\beta^2\left[6\left[3(2\lambda+1)\mu-4(\lambda+1)^2\right]+\alpha(2^5(\lambda+1)^2-2^3(\lambda+1)^2\alpha-3^2(2\lambda+1)\mu)\right]}{3\mathrm{x}12(2\lambda+1)(2-\alpha)(\lambda+1)^2(1-\alpha)}$$

$$+\frac{\left[3^2(2\lambda+1)\mu-2^3(\lambda+1)^2\right](1+2\beta-\alpha)}{3\mathrm{x}12(2\lambda+1)(\lambda+1)^2(1-\alpha)} \tag{2.1}$$

eşitsizliği yazılır.

İspat: $f(z)\in H(\alpha,\beta,\lambda)$ olsun. (1.5) ifadesinden $q(z)=1+q_1z+q_2z^2+\ldots$ ile verilen $q\in P$ ve $z\in\Delta$ için

$$\lambda z^3f'''(z)+(2\lambda+1)z^2f''(z)+zf'(z)=\left[\lambda z^2g''(z)+zg'(z)\right]q(z) \tag{2.2}$$

eşitliği yazılır. (2.2) denkleminin her iki yanındaki aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitlenirse,

$$4(\lambda+1)a_2=q_1+2(\lambda+1)b_2 \tag{2.3}$$

ve

$$3^2(2\lambda+1)a_3=q_2+2(\lambda+1)b_2q_1+3(2\lambda+1)b_3 \tag{2.4}$$

eşitlikleri elde edilir. (1.4) eşitsizliğinden $p(z)=1+p_1z+p_2z^2+\ldots$ ile verilen $p\in P$ ve $z\in\Delta$ için

$$\lambda z^3g'''(z)+(2\lambda+1)z^2g''(z)+zg'(z)-\alpha\left[\lambda z^2g''(z)+zg'(z)\right]$$

$$=\left[\lambda z^2g''(z)+zg'(z)\right](p(z))^{\beta} \tag{2.5}$$

eşitliği yazılır. Böylece, (2.5) denkleminin her iki yanındaki aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitlenirse,

$$2(1-\alpha)(\lambda+1)b_2=\beta p_1 \tag{2.6}$$

ve

$$3(2-\alpha)(2\lambda+1)b_3=\beta\left(p_2+\frac{\beta(3-\alpha)+\alpha-1}{2(1-\alpha)}p_1^2\right) \tag{2.7}$$

eşitlikleri elde edilir. (2.3), (2.4), (2.6) ve (2.7) ifadelerinden

$$a_3-\mu a_2^2=\frac{1}{3^2(2\lambda+1)}(q_2-\frac{1}{2}q_1^2)+\frac{2^3(\lambda+1)^2-3^2(2\lambda+1)\mu}{3^2\text{x}4^2(\lambda+1)^2(2\lambda+1)}q_1^2$$

$$+\frac{\beta}{3^2(2\lambda+1)(2-\alpha)}(p_2-\frac{1}{2}p_1^2)+\frac{\left[2^3(\lambda+1)^2-3^2(2\lambda+1)\mu\right]\beta}{3^2\text{x}2^3(\lambda+1)^2(2\lambda+1)(1-\alpha)}p_1q_1$$

$$+\frac{\left[24(\lambda+1)^2+2^3\alpha^2(\lambda+1)^2+3^2(2\lambda+1)\alpha\mu-(18(2\lambda+1)\mu+2^5(\lambda+1)^2\alpha)\right]\beta^2}{3^2\text{x}4^2(\lambda+1)^2(2\lambda+1)(1-\alpha)^2(2-\alpha)}p_1^2 \quad (2.8)$$

eşitliği yazılır. Şimdi, $a_3-\mu a_2^2$ ifadesinin pozitif olduğunu kabul edelim. Böylece $\mathrm{Re}(a_3-\mu a_2^2)$ değerini tahmin etmeye çalışacağız. $p_1=2re^{i\theta}$, $q_1=2\mathrm{Re}^{i\phi}$, $0\le r\le 1,\ 0\le R\le 1,\ 0\le\theta<2\pi,$ ve $0\le\phi<2\pi$ olarak seçilip, (2.8) eşitliğinde 2.1. Yardımcı Teorem kullanılırsa,

$$3^2(2\lambda+1)\mathrm{Re}(a_3-\mu a_2^2)=\mathrm{Re}(q_2-\frac{1}{2}q_1^2)+\frac{\left[2^3(\lambda+1)^2-3^2(2\lambda+1)\mu\right]}{4^2(\lambda+1)^2}\mathrm{Re}\,q_1^2$$

$$+\frac{\beta}{(2-\alpha)}\mathrm{Re}(p_2-\frac{1}{2}p_1^2)+\frac{\left[2^3(\lambda+1)^2-3^2(2\lambda+1)\mu\right]\beta}{2^3(1-\alpha)(\lambda+1)^2}\mathrm{Re}\,p_1q_1$$

$$+\frac{\left[6\text{x}4(\lambda+1)^2+2^3(\lambda+1)^2\alpha^2+3^2(2\lambda+1)\alpha\mu-(6\text{x}3(2\lambda+1)\mu+2^5(\lambda+1)^2\alpha\right]\beta^2}{4^2(2-\alpha)(\lambda+1)^2(1-\alpha)^2}\mathrm{Re}\,p_1^2$$

$$\le 2(1-R^2)+\frac{2^3(\lambda+1)^2-3^2(2\lambda+1)\mu}{4^2(\lambda+1)^2}4R^2\cos 2\phi$$

$$+\frac{2\beta}{2-\alpha}(1-r^2)+\frac{\left[2^3(\lambda+1)^2-3^2(2\lambda+1)\mu\right]\beta}{2^3(\lambda+1)^2(1-\alpha)}4rR\cos(\theta+\phi)$$

$$+\frac{\left[6\text{x}4(\lambda+1)^2+2^3(\lambda+1)^2\alpha^2+3^2(2\lambda+1)\alpha\mu-(6\text{x}3(2\lambda+1)\mu+2^5(\lambda+1)^2\alpha)\right]\beta^2}{4^2(2-\alpha)(\lambda+1)^2(1-\alpha)}4r^2\cos 2\theta$$

$$\le\frac{3^2(2\lambda+1)\mu-4^2(\lambda+1)^2}{4(\lambda+1)^2}R^2+\frac{2\left[3^2(2\lambda+1)\mu-2^3(\lambda+1)^2\alpha\right]\beta}{2^2(\lambda+1)^2(1-\alpha)}rR$$

$$+\left(\frac{\beta^2\left[6\left[3(2\lambda+1)\mu-4(\lambda+1)^2\right]+\alpha(2^5(\lambda+1)^2-2^3(\lambda+1)^2\alpha-3^2(2\lambda+1)\mu\right]}{4(\lambda+1)^2(1-\alpha)^2(2-\alpha)}-\frac{2\beta}{2-\alpha}\right)r^2$$

$$+\frac{2\beta}{2-\alpha}+2=\psi(r,R) \tag{2.9}$$

eşitsizliği elde edilir. $0\le\alpha<1,\ \ 0\le\lambda\le1,\ \ \beta\ge1$ ve $3(2\lambda+1)\mu\ge4(\lambda+1)^2$ olduğunda α,β,λ ve μ sabit olmak üzere $\psi(r,R)$ fonksiyonunun r ve R ye göre kısmi türevinden,

$$\begin{aligned}\psi_{rr}\psi_{RR}-(\psi_{rR})^2=2^5\beta\{&4\beta(\lambda+1)^4+2^2(\lambda+1)^4+2\alpha[2(\lambda+1)^4\alpha\beta\\&+2(\lambda+1)^4\alpha-4(\lambda+1)^4-7\beta(\lambda+1)^4]\}\\&-36\beta\mu\{6(2\lambda+1)(\lambda+1)^2\beta+2(2\lambda+1)(\lambda+1)^2\\&+2\alpha[(2\lambda+1)(\lambda+1)^2\alpha\beta+(2\lambda+1)(\lambda+1)^2\alpha\\&-2(2\lambda+1)(\lambda+1)^2-4\beta(2\lambda+1)(\lambda+1)^2]\}<0\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu nedenle $\psi(r,R)$ fonksiyonu maksimum değerini sınırlarda alır. Böylece,

$$\psi(r,R)\le\psi(1,1)$$

$$=\frac{\beta^2\left[6\left[3(2\lambda+1)\mu-4(\lambda+1)^2\right]+\alpha(2^5(\lambda+1)^2-2^3(\lambda+1)^2\alpha-3^2(2\lambda+1)\mu)\right]}{4(\lambda+1)^2(1-\alpha)^2(2-\alpha)}$$

$$+\frac{\left[3^2(2\lambda+1)\mu-2^3(\lambda+1)^2\right](1+2\beta-\alpha)}{4(\lambda+1)^2(1-\alpha)} \tag{2.10}$$

biçimindeki istenen eşitsizlik bulunur.

$p_1=q_1=2i$ ve $p_2=q_2=-2$ yazıldığında, (2.1) için eşitlik durumu elde edilir. Eğer yukarıdaki Teoremde $\lambda=1$ yazılırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

1. Sonuç: $f(z)$ fonksiyonu (1.1) deki gibi verilsin ve $f(z) \in H(\alpha,\beta,1)$ olsun. Bu takdirde $0 \le \alpha < 1,\ \beta > 1$ ve $9\mu \ge 16$ için

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \le \frac{\beta^2[6(9\mu-16)+\alpha(128-32\alpha-27\mu)]}{432(1-\alpha)^2(2-\alpha)} + \frac{(2\beta+1-\alpha)(27\mu-32)}{432(1-\alpha)} \tag{2.11}$$

kesin eşitsizliği elde edilir.

Eğer yukarıdaki Teoremde $\lambda = \dfrac{1}{2}$ yazılırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

2. Sonuç: $f(z)$ fonksiyonu (1.1) deki gibi verilsin ve $f(z) \in H(\alpha,\beta,\frac{1}{2})$ olsun. Bu takdirde $0 \le \alpha < 1,\ \beta \ge 1$ ve $2\mu \ge 3$ için

$$\left|a_3 - \mu a_2^2\right| \le \frac{\beta^2[(2\mu-3)+\alpha(4-\alpha-\mu)]}{9(1-\alpha)^2(2-\alpha)} + \frac{(2\beta+1-\alpha)(\mu-1)}{9(1-\alpha)} \tag{2.12}$$

kesin eşitsizliği elde edilir.

3. KAYNAKLAR

[1] M. Kamali and S. Akbulut, On a subclass of certain convex functions with negative coefficients, Applied Math. And Comp., Volume 145, pp. (2003), 341-350.

[2]. M. Jahangiri, A coefficient inequlity for a class of close-to convex functions, Math. Japon., 41 (1995), No. 3 557-559.

[3]. M. Fekete-Szegö, Eine Bemerkung uber ungrade schlicht funktionen., J. London Math. Soc. 8 (1933), 85-89 (German).

[4]. W. Koepf, On the Fekete-Szegö problem for close-to convex functions, Proc. Amer. Math. Soc. 101 (1987), no. 1, 89-95.

[5]. H. Orhan and M. Kamali, On The Fekete-Szegö Problem, Applied Math. And Comp., Volume 144, (2003), pp. 181-186.

[6]. R. R. London, Fekete-Szegö inequlities for close-to convex functions, Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993), no. 4, 947-950.

[7]. H. R. Abdel-Gawad and D. K. Thomas, The Fekete-Szegö problem for strongly close-to convex functions, Proc. Amer. Math. Soc. 114 (1992), no. 2, 345-349.

[8]. B. A. Frasın and M. Darus, On the Fekete-Szegö Problem, Internet. J. Math. Sci., Vol. 24, No. 9 (2000) 577-581.

[9]. Ch. Pommerenke, Univalent Functions. Studia Mathematica Mathematische Lehrbucher. Vandenhoeck & Ruprecht, 1975.