Ekim 2008 Cilt:16 No:2 Kastamonu Eğitim Dergisi 581-588

AYRIŞIMLAR İÇİN YENİ BİR ÖZDEŞLİK

Göksal BİLGİCİ
Kastamonu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi,
Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Eğitimi Bölümü, Kastamonu.

Özet

Dyson, Ramanujan kongruansları için "rank" adını verdiği bir sayma metodu geliştirdikten sonra, Atkin ve Swinnerton – Dyer, ayrışımların rank'a göre özelliklerini ve modulo 5, 7, 11'e göre kongruans özelliklerini hesaplamak için $\prod(1-q^r)^{-1}$ *ayrışım fonksiyonunu q'nun 4., 6. ve 10. dereceden bir polinomu olarak yazmışlar ve bu polinomların katsayılarını sadeleştirmek için y'deki (* $y = q^m$ *) kuvvet serileri arasındaki bir ilişkiyi kullanmışlardır. Bu çalışmada Atkin ve Swinnerton – Dyer'ın verdiği bu ilişki genelleştirilerek, ayrışım fonksiyonu 12. ve 16. dereceden bir polinom olarak sade bir halde yazmak için çok kullanışlı olan yeni sonuçlar verilmiştir.*

Anahtar Kelimeler: *Ayrışımlar, Ayrışım Fonksiyonu, Teta Fonksiyonları*

A NEW IDENTITY FOR THE PARTITIONS

Abstract

After Dyson found a combinatorial method "rank" for the congruences given by Ramanujan, Atkin and Swinnerton – Dyer wrote the partition function $\prod(1-q^r)^{-1}$ *as 4-th, 6-th and 10-th degree polynomials in q to calculate the partition properties in terms of rank and the congruences properties modulo 5, 7, 11 and they used a relation between the power series in y (* $y = q^m$ *) to simplify the coefficients of these polynomials. In this paper, we generalize this relation given by Atkin and Swinnerton – Dyer and we give some new results which are useful when the partition function is written 12-th and 16-th degree polynomials in q in a simpler form.*

Keywords: *Partitions, Partition Function, Theta Functions*

1.Giriş

Sayılar teorisinde önemli bir problem tamsayıları parçalamaktır. Bir tamsayı çarpımsal ve toplamsal olarak iki şekilde parçalanır. Pozitif bir tamsayıyı toplamsal olarak parçalamak ile ayrışım teorisi ilgilidir.

Tanım 1. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r > 0$ ve $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$ olmak üzere sonlu $\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_r)$ dizisine *n*'nin bir ayrışımı ve bu dizideki her bir λ_i pozitif tamsayısına parça denir. *p(n)* ile *n*'nin ayrışımları sayısı gösterilir ve *p*(*0*):=1 olarak tanımlanır.

Örnek 2. 5'in ayrışımları; (5), (4 1), (3 2), (3 1 1), (2 2 1), (2 1 1 1), (1 1 1 1 1) dir ($p(5)$=7).

n büyüdükçe $p(n)$ oldukça hızlı büyüyen bir sayıdır. $p(5) = 7$, $p(10) = 42$, $p(20) = 627$, $p(50) = 204226$, $p(100) = 190569292$ ve $p(200) = 3972999029388$ dir.

$\{p(n)\}_{n\geq 0}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$ serisidir ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^r}, \qquad |q|<1 \tag{1}$$

dir.

Ayrışım teorisinin hikayesi Ortaçağa kadar uzanmasına rağmen ilk önemli sonuçlar, bu teorinin kurucusu olarak bilinen Euler tarafından verilmiştir. Bir çok matematikçi bu teoriye katkıda bulunmuştur. Bunlardan bazıları Legendre, Ramanujan, Hardy, Rademacher, Sylvester, Selberg ve Dyson'dır. Bu teorideki dönüm noktası 1919 yılında Hindistan asıllı matematikçi Ramanujan'ın vermiş olduğu aşağıdaki üç kongruanstır:

$$p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$$
$$p(7n+5) \equiv 0 \pmod 7$$
$$p(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}.$$

Ramanujan bu kongruansları vermiş ve analitik yöntemlerle ispatlamıştır (6). Bu kongruanslar başka matematikçiler tarafından da farklı yöntemlerle ispatlanmıştır fakat en ilginç olanı 1944 yılında henüz fizik bölümünde öğrenci iken Dyson'ın vermiş olduğu bir sayma tekniğidir (4). Dyson bir ayrışımın rank'ını

"en büyük parça – parça sayısı"

olarak tanımlamıştır. Rank, Ramanujan'ın ilk iki kongruansını ispatlayan güzel bir sayma tekniğidir fakat üçüncü kongruans için netice vermemektedir. Dyson bunun üzerine rank'a benzer bir teknik bulunabileceğini ve bu tekniğe de "crank" adını vermek istediğini belirtmiştir. Dyson sadece iddialarda bulunmuş herhangi bir ispat vermemiştir. Dyson'ın tüm iddiaları 1954 yılında Atkin ve Swinnerton – Dyer tarafından ispatlanmıştır(2). Dyson'ın crank'ı 1988 yılında Andrews ve Garvan tarafından bulunmuştur (1).

Atkin ve Swinnerton – Dyer, Ramanujan kongruansları ve Dyson'ın iddialarını ispatlamak için kullanışlı bir yöntem vermişlerdir. Bu yöntem, verilen bir m pozitif tamsayısı için q'daki bir kuvvet serisini, katsayıları y'de ($y = q^m$) kuvvet serisi olan q'nun $(m-1)$ – inci dereceden bir polinomu olarak yazmaktır.

Bu çalışmada, Atkin ve Swinnerton – Dyer'ın notasyonunu tercih edeceğiz ve m'yi asal kabul edeceğiz.

$$(z;q)_\infty = \prod_{r=1}^{\infty}(1-zq^{r-1})$$

ve

$$P(z,q) := [z;q]_\infty := (z;q)_\infty (z^{-1}q;q)_\infty = \prod_{r=1}^{\infty}(1-zq^{r-1})(1-z^{-1}q^r) \tag{2}$$

olarak tanımlayalım. $P(z,q)$ fonksiyonu $0 < z_1 \leq |z| \leq z_2$ halka sınırlı bölgesinde tek değerli analitik bir fonksiyondur ve aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$P(z^{-1}q,q)=P(z,q), \qquad P(zq,q)=-z^{-1}P(z,q). \tag{3}$$

a, m ile bölünmesin. Bu durumda (2) eşitliğini kullanarak

$$P(a):=P_m(a):=P(y^a,y^m)=\prod_{r=1}^{\infty}(1-y^{m(r-1)+a})(1-y^{mr-a}) \tag{4}$$

$$P(0):=P_m(0):=\prod_{r=1}^{\infty}(1-y^{mr}) \tag{5}$$

tanımlarını yapalım. Burada $P(0)$, $P(a)$ tanımında a yerine sıfır yazılarak elde edilen bir ifade değildir. (3) ten

$$P(m-a)=P(a), \quad P(-a)=P(m+a)=-y^{-a}P(a) \tag{6}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülebilir.

Atkin ve Swinnerton – Dyer, ayrışımların kongruans özelliklerini ve rank'a göre özelliklerini hesaplamak için aşağıdaki iki lemmayı kullanmışlardır (2):

Lemma 3.

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3 \equiv P(0)\sum_{c=0}^{(m-3)/2}(-1)^c(2c+1)q^{\frac{1}{2}c(c+1)}P\left(\frac{m-1}{2}-c\right) \quad (\bmod m). \tag{7}$$

Lemma 4.

ebob(6, n) = 1 ve $n=6\lambda+\mu$ $(\mu=\pm 1)$ olmak üzere;

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)=(-1)^{\lambda}q^{\frac{1}{2}\lambda(3\lambda+\mu)}P(0)\left[1+\sum_{c=1}^{(m-1)/2}(-1)^c q^{\frac{1}{2}c(3c-m)}\frac{P(2c)}{P(c)}\right] \tag{8}$$

dir.

Atkin ve Swinnerton – Dyer, sadeleştirmeler için P(a) kuvvet serileri arasındaki bir ilişkiye ihtiyaç duymuşlardır. Bu ilişki Lemma 5'te verilmiştir.

Lemma 5: $b,c,d,b\pm c,c\pm d,b\pm d$ lerin hiç birisi m ile bölünmesin. Bu durumda

$$P^2(b)P(c+d)P(c-d)-P^2(c)P(b+d)P(b-d)+y^{c-d}P^2(d)P(b+c)P(b-c)=0$$

dır.

Lemma 5, m = 5 durumunda sonuç vermez. m = 7 için tek eşitlik, m = 11 durumunda 10 eşitlik ve m = 13 için ise toplam 20 eşitlik vermektedir.

Hirschhorn,

$$48\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{10}=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}(-1)^{m+n}\left\{(6m+3)^3(6n+1)-(6m+3)(6n+1)^3\right\}q^{\frac{1}{2}(3m^2+3m+3n^2+n)}$$

özdeşliğini vermiştir (5). Bu özdeşlik

$$[a;q]_\infty [b;q]_\infty [ab;q]_\infty [ab^{-1};q]_\infty (q)_\infty^2 = [a^3;q^3]_\infty (q^3;q^3)_\infty^2 \{[b^3q;q^3]_\infty - b[b^3q^2;q^3]_\infty\}$$
$$- ab^{-1}[b^3;q^3]_\infty (q^3;q^3)_\infty^2 \{[a^3q;q^3]_\infty - a[a^3q^2;q^3]_\infty\}$$

Winquist özdeşliği (8) ve

$$[z;q]_\infty (q;q)_\infty = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m z^m q^{m(m-1)/2}$$

Jacobi üçlü çarpımı kullanılarak düzenlenirse

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^{10} \equiv P^2(0)\{P(2)P(4)P(5)P(6) + 3P^2(3)P(4)P(6)q - 4P^2(6)P(1)P(5)q^2$$
$$- 4P(2)P(3)P(5)P(6)q^3 P^2(5)P(2)P(3)q^4 + [-2P(2)P(3)P(4)P(6)$$
$$+ 6P(1)P(4)P(5)P(6) + 5yP(1)P(2)P(3)P(5)]q^5 + y^2P^2(1)P(2)P(3)q^6$$
$$- 4P(1)P(2)P(3)P(4)q^7 + 4P^2(4)P(1)P(5)q^8 - 3P^2(2)P(4)P(6)q^9$$
$$+ P(1)P(3)P(4)P(6)q^{10} - 3P(1)P(3)P(4)P(5)q^{11}$$
$$+ 3P(1)P(2)P(5)P(6)q^{12}\} \pmod{13}$$

bulunur. Lemma 3,

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3 \equiv$$
$$P(0)\{P(6) - 3P(5)q - 11yP(1)q^2 + 5P(4)q^3 - 7P(3)q^6 + 9P(2)q^{10}\} \pmod{13}$$

kongruansını ve Lemma 4 ise

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r) = P(0)\left\{\frac{P(4)}{P(2)} - q\frac{P(6)}{P(3)} - q^2\frac{P(2)}{P(1)} + q^5\frac{P(5)}{P(4)} + q^7 + q^9 y\frac{P(1)}{P(6)} - q^{12}\frac{P(3)}{P(5)}\right\}$$

eşitliğini verir.

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^{10}\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3 \equiv \prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^{13} \equiv \prod_{r=1}^{\infty}(1-y^r)$$
$$\equiv P(0)P(1)P(2)P(3)P(4)P(5)P(6) \pmod{13}$$

kongruansında $\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^{10}, \prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)^3$ ve $\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)$ ifadeleri yerine yazıldığında q^0 hariç q'nun diğer tüm katsayıları Lemma 5'den elde edilen 20 denklem ile sadeleşmesi gerekirken aşağıdaki yeni eşitlikle karşılaşılmaktadır:

$$yP(1)P(2)P(3)P(5) - P(2)P(3)P(4)P(6) + P(1)P(4)P(5)P(6) = 0\,.$$

Bu eşitlik akla Lemma 5'in bir genelleştirmesinin olduğunu getirmektedir. Bu genelleştirme 3. bölümde eliptik fonksiyonlar ve teta fonksiyonları kullanılarak izah edilecektir.

2. Teta Fonksiyonları ve Eliptik Fonksiyonlar

$P(a)$ kuvvet serileri aslında Jacobi Teta fonksiyonları olarak karşımıza çıkmaktadırlar. τ kompleks üst yarı düzlemde bir nokta ve $q := e^{\pi i \tau}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $|q| < 1$ dir. Teta fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlanırlar (7):

$$\theta_1(z,q) := -2i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)\pi iz} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2} Sin(2n+1)z$$

$$\theta_2(z,q) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)\pi iz} = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} Cos(2n+1)z$$

$$\theta_3(z,q) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2\pi inz} = 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} Cos2nz$$

$$\theta_4(z,q) := \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2\pi inz} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} Cos2nz.$$

Bu fonksiyonlar z'nin qua – fonksiyonlarıdır. Yani bir gerçek periyodları ve bir de yarı periodları vardır. Örneğin $\theta_4(z,q)$'nun gerçek periyodu π, yarı periyodu ise $\pi\tau$ dur. Ayrıca θ_1 z'nin tek, diğerleri ise çift fonksiyonlarıdır. Teta fonksiyonları $P(a)$ kuvvet serileri ile aşağıdaki gibi ifade edilebilirler;

$$\theta_1(z,q) = iq^{1/4} z^{-1/2} P(z,q^2) P(q^2,q^2)$$
$$\theta_1(z,q) = q^{1/4} z^{-1/2} P(-z,q^2) P(q^2,q^2)$$
$$\theta_3(z,q) = P(-zq,q^2) P(q^2,q^2)$$
$$\theta_4(z,q) = P(zq,q^2) P(q^2,q^2).$$

Teta fonksiyonları arasındaki ilişkiler araştırılırken kullanılan en temel yöntem Teta fonksiyonları ile bir eliptik fonksiyon inşa ettikten sonra eliptik fonksiyonların özelliklerini kullanmaktır.

Tanım 6. Kompleks sayılar üzerinde meromorfik ve iki periyodlu bir fonksiyona eliptik fonksiyon adı verilir. Eliptik fonksiyonun periyodları arasında kalan paralel kenar "hücre" olarak isimlendirilir ve bir eliptik fonksiyonu bir hücrede incelemek yeterlidir.

Eliptik fonksiyonların aşağıdaki iki özelliğine ihtiyaç duyacağız (3), (7):

- f, eliptik fonksiyonunun kutup noktası yoksa f sabit fonksiyondur (Lioville).
- f eliptik bir fonksiyon ve c kompleks bir sayı olmak üzere, $f(z) = c$ eşitliğinin köklerinin sayısı c sayısından bağımsızdır ve $f(z)$'nin kutuplarının sayısına eşittir (bu sayıya f'nin mertebesi denir).

3. Lemma 5'in Genelleştirilmesi

w, x, y, z ile w', x', y', z' kompleks sayıları

$$2w' = -w + x + y + z$$
$$2x' = w - x + y + z$$
$$2y' = w + x - y + z$$
$$2z' = w + x + y - z$$

eşitlikleri ile bağıntılı olmak üzere

$$[r] := \theta_r(w)\theta_r(x)\theta_r(y)\theta_r(z)$$

ve

$$[r]' := \theta_r(w')\theta_r(x')\theta_r(y')\theta_r(z')$$

tanımlarını yapalım.

$$T(z) := \frac{-[1]' + [2]' + [3]' + [4]'}{[3]}$$

fonksiyonu periyodları π ve $\pi\tau$ olan bir eliptik fonksiyondur. Ayrıca $T(z)$ nin bir tek kutup noktası olabilir ve bu nokta da $\theta_3(z)$ nin sıfırıdır. Dolayısıyla T eliptik fonksiyonunun mertebesi ≤ 1 dir, fakat eliptik fonksiyonların mertebeleri 2 den büyük veya eşit olduğundan dolayı bu nokta $T(z)$ nin kutup noktası olamaz. Dolayısıyla Liouville teoreminden $T(z)$ sabit bir fonksiyondur, yani

$$T(z) = A$$

olacak şekilde bir A kompleks sayısı vardır ve buradan da

$$A[3] = -[1]' + [2]' + [3]' + [4]' \tag{9}$$

yazılır. (9) ifadesinde $w = x = y = z = 0$ alınırsa $A = 2$ bulunur. Yani

$$2[3] = -[1]' + [2]' + [3]' + [4]' \tag{10}$$

olur. (10) da w, x, y, z değişkenleri $\frac{1}{2}\pi$ artırılırsa

$$2[4] = [1]' - [2]' + [3]' + [4]' \tag{11}$$

ve (10) ile (11) de w, x, y, z değişkenleri $\frac{1}{2}\pi\tau$ artırılırsa sırasıyla

$$2[2] = [1]' + [2]' + [3]' - [4]' \tag{12}$$

$$2[1] = [1]' + [2]' - [3]' + [4]' \tag{13}$$

elde edilir. (10), (11), (12) ve (13) eşitliklerinden

$$2[4]' = [1] - [2] + [3] + [4] \tag{14}$$

bulunur. (14) de w, x, y, z yerine sırasıyla $w, -x, -y, -z$ alınırsa

$$2\theta_4\left(\frac{-w-x-y-z}{2}\right)\theta_4\left(\frac{w+x-y-z}{2}\right)\theta_4\left(\frac{w-x+y-z}{2}\right)\theta_4\left(\frac{w-x-y+z}{2}\right)$$
$$=\theta_1(w)\theta_1(-x)\theta_1(-y)\theta_1(-z)-\theta_2(w)\theta_2(-x)\theta_2(-y)\theta_2(-z)$$
$$+\theta_3(w)\theta_3(-x)\theta_3(-y)\theta_3(-z)+\theta_4(w)\theta_4(-x)\theta_4(-y)\theta_4(-z) \tag{15}$$

ve (14) de bu kez w,x,y,z yerine sırasıyla $-w,-x,-y,-z$ alınırsa

$$2\theta_4\left(\frac{w-x-y-z}{2}\right)\theta_4\left(\frac{-w+x-y-z}{2}\right)\theta_4\left(\frac{-w-x+y-z}{2}\right)\theta_4\left(\frac{-w-x-y+z}{2}\right)$$
$$=\theta_1(-w)\theta_1(-x)\theta_1(-y)\theta_1(-z)-\theta_2(-w)\theta_2(-x)\theta_2(-y)\theta_2(-z)$$
$$+\theta_3(-w)\theta_3(-x)\theta_3(-y)\theta_3(-z)+\theta_4(-w)\theta_4(-x)\theta_4(-y)\theta_4(-z) \tag{16}$$

elde edilir. (15) eşitliğinden (16) çıkarılıp $\theta_1(z)$ nin tek fonksiyon ve diğerlerinin ise çift fonksiyon olması gerçeği göz önüne alınırsa

$$\theta_1(w)\theta_1(x)\theta_1(y)\theta_1(z)$$
$$-\theta_4\left(\frac{w-x-y-z}{2}\right)\theta_4\left(\frac{-w+x-y-z}{2}\right)\theta_4\left(\frac{-w-x+y-z}{2}\right)\theta_4\left(\frac{-w-x-y+z}{2}\right) \tag{17}$$
$$+\theta_4\left(\frac{-w-x-y-z}{2}\right)\theta_4\left(\frac{w+x-y-z}{2}\right)\theta_4\left(\frac{w-x+y-z}{2}\right)\theta_4\left(\frac{w-x-y+z}{2}\right)=0$$

bulunur. $[a]:=[a;q]_\infty$ olsun. (17) ifadesinde $\alpha=e^{2iw},\beta=e^{2ix},\gamma=e^{2iy},\zeta=e^{2iz}$ alınıp $q^2\to q$ yazılırsa

$$(\alpha\beta\gamma\zeta)^{-1/2}q^{1/2}[\alpha][\beta][\gamma][\zeta]-$$
$$\left[(\alpha\beta^{-1}\gamma^{-1}\zeta^{-1}q)^{1/2}\right]\left[(\alpha^{-1}\beta\gamma^{-1}\zeta^{-1}q)^{1/2}\right]\left[(\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\zeta^{-1}q)^{1/2}\right]\left[(\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\zeta q)^{1/2}\right]+$$
$$\left[(\alpha\beta\gamma\zeta q^{-1})^{-1/2}\right]\left[(\alpha\beta\gamma^{-1}\zeta^{-1}q)^{1/2}\right]\left[(\alpha\beta^{-1}\gamma\zeta^{-1}q)^{1/2}\right]\left[(\alpha\beta^{-1}\gamma^{-1}\zeta q)^{1/2}\right]=0$$

eşitliği elde edilmiş olur. Son olarak $\alpha,\beta,\gamma,\zeta$ ve q yerine sırasıyla y^a,y^b,y^c,y^d ve y^m yazılırsa aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 7. m,a,b,c,d pozitif tamsayılar,

$$x:=\frac{m-(a+b+c+d)}{2}$$

olmak üzere $a,b,c,d,a+x,b+x,c+x,d+x,a+b+x,a+c+x,a+d+x$ ' lerin hiçbirisi m ile bölünmesin. Bu durumda

$$y^aP(a)P(b)P(c)P(d)-P(a+x)P(b+x)P(c+x)P(d+x)$$
$$+P(x)P(a+b+x)P(a+c+x)P(a+d+x)=0$$

dir.

m asal olarak seçildiğinde açık olarak $a+b+c+d$ toplamı bir tek sayı olmalıdır. Bu yüzden a,b,c ve d 'nin hepsi aynı anda ya da ikişer ikişer eşit olamazlar. $m=5$ için

Lemma 5 ve Teorem 7 herhangi bir ilişki vermez. m = 7 için Teorem 7 de $a+b+c+d$ nin alabileceği tek değer 5 dir ve bunun için de $(a,b,c,d)=(1,1,1,2)$ seçilebilir. Bu değerler

$$yP^3(1)P(2)-P^3(2)P(3)+P^3(3)P(1)=0$$

eşitliğini verir. Bu ise Lemma 5 in m = 7 için verdiği sonuçla aynıdır. m = 11 durumunda Lemma 5 toplam 10 eşitlik verirken Teorem 7'den de bu 10 eşitlik elde edilir. m = 13 durumunda Lemma 5 toplam 20 eşitlik verir. Teorem 7 ise bu 20 eşitliğin yanı sıra $(a,b,c,d)=(1,2,3,5)$ seçimi ile

$$yP(1)P(2)P(3)P(5)-P(2)P(3)P(4)P(6)+P(1)P(4)P(5)P(6)=0$$

eşitliğini verir. m = 17 durumunda Teorem 7, Lemma 5'den elde edilen 56 eşitliği verdiği gibi (a,b,c,d) için (1,2,3,5), (1,2,3,7), (1,2,4,6), (1,3,4,5), (1,2,3,9), (1,2,4,8), (1,2,5,7), (2,3,4,6) seçimleri ile sırasıyla aşağıdaki yeni eşitlikleri vermektedir;

$$y^3P(1)P(2)P(3)P(5)-P(4)P(5)P(6)P(8)+P(3)P(6)P(7)P(8)=0$$
$$y^2P(1)P(2)P(3)P(7)-P(3)P(4)P(5)P(8)+P(2)P(5)P(6)P(7)=0$$
$$y^2P(1)P(2)P(4)P(6)-P(3)P(4)P(6)P(8)+P(2)P(5)P(7)P(8)=0$$
$$y^2P(1)P(3)P(4)P(5)-P(3)P(5)P(6)P(7)+P(2)P(6)P(7)P(8)=0$$
$$yP(1)P(2)P(3)P(8)-P(2)P(3)P(4)P(7)+P(1)P(4)P(5)P(6)=0$$
$$yP(1)P(2)P(4)P(8)-P(2)P(3)P(5)P(8)+P(1)P(4)P(6)P(7)=0$$
$$yP(1)P(2)P(5)P(7)-P(2)P(3)P(6)P(8)+P(1)P(4)P(7)P(8)=0$$
$$yP(2)P(3)P(4)P(6)-P(3)P(4)P(5)P(7)+P(1)P(6)P(7)P(8)=0$$

Kaynaklar

1. Andrews, G.E., Garvan, F.G., Dyson's Crank of a Partition, Bulletin of the American Mathematical Society, 167 – 171, 1988.
2. Atkin, A.O.L., Swinnerton – Dyer, H.P.F., Some Properties of Partitions, Proceedings of the London Mathematical Society, 4, 84 – 106, 1954.
3. Chandrasekharan, K., Eliptic Functions, Springer – Verlag, New York, 1985.
4. Dyson, F.J., Some Guesses in Theory of Partitions, Eureka, Cambridge, 8, 10 – 15, 1944.
5. Hirschhorn, M.D., A Generalisation of Winquist's Identity and a Conjecture of Ramanujan, J. Indian Math. Soc., 51, 49 – 55, 1987.
6. Ramanujan, S., Some Properties of $p(n)$, the Number of partitions of n, Paper 25 of Collected Papers of S. Ramanujan, Cambridge University Pres, London, 1927.
7. Whittaker, E.T., Watson, G.N., A Course in Modern Analysis, 4th ed., Cambridge, England, 1990.
8. Winquist, L. An Elementary Proof of $p(11n+6)\equiv 0 \pmod{11}$, J. of Combinatorial Theory, 6, 56 – 69, 1969.