

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ İSPAT YAPMAYA YÖNELİK GÖRÜŞLERİ

Sevgi MORALI, Işıkhan UĞUREL

Buca Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, İzmir.

Elif TÜRNÜKLÜ, Sibel YEŞİLDERE

Buca Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, İzmir.

Özet

Matematiksel ispat yapma evrensel olarak kabul edilmiş kural ve yöntemleri olan, matematiğin temel süreçlerinden biridir. Bu çalışmada, matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşlerinin ne olduğu araştırılmıştır. İspata ilişkin görüşler öğretmen adaylarının ispat becerilerine ilişkin varsa sorunları ortaya çıkarma ve gidermede ilk adımı oluşturacak bilgiyi sağlayacaktır. Veriler, geliştirilen bir ölçek ile toplanmıştır. Elde edilen sonuçlar öğretmen adaylarının büyük kısmının ispat yapmaya yönelik ya görüşlerinin olmadığını ya da görüşlerinin yetersiz olduğunu ortaya çıkarmaktadır.

Anahtar Kelimeler: *İspat, Matematik Öğretmeni Yetiştirme*

THE VIEWS OF THE MATHEMATICS TEACHERS ON PROVING

Abstract

Mathematical proof, which has internationally accepted rules and methods, is one of the fundamental processes of mathematics. In this study, teacher candidates' views on proof are searched. These views on proof could supply information to reveal teacher candidates' possible problems concerning proofs and to overcome these difficulties. Data is gathered by a scale. Results showed that majority of the teacher candidates either having no specific opinions on doing of mathematical proofs or their opinions were less than satisfactory.

Key words: *Proof, Mathematics Teacher Education*

1. Giriş

İnsan, bildiği şeylerin doğru ya da yanlış olduğuna gerekçe göstererek karar verme eğilimine sahiptir. Bilgiye gerekçe göstermenin, az ya da çok güvenilir, birçok yolu vardır. Bu yollardan biri, deneme yanılmayla doğruluğuna karar vermektir. Fakat bu yöntemin, deneyime güvenmede düşülen hatalara benzer dezavantajları vardır. Bu yöntem doğruluğu ispatlamada geçerli olsaydı, asal sayılar kümesinin sonlu olduğuna, hem de hiç şüphe etmeksizin, inanılmış olunurdu. Matematik dünyası, Euclid'in eski olsa bile, güzelliğinden bir şey yitirmeyen, matematikçilerin çok iyi bildiği ispatı sayesinde bu yanlışya düşmekten kurtulmuştur.

Günlük yaşamda birçok şeyin doğruluğu, örneğin yiyecek seçimi, deneyimler temel alınarak gerçekleştirilir. Bununla beraber birçok seçimin doğruluğu için, bu yöntem yeterli değildir. Örneğin çalışma odasındaki masanın yerinin doğruluğu ışık alacağı pencereye ya da uzanılacak kitaplığa yakınlığı gibi faktörler göz önüne alınarak, deneyimlerden yararlanarak yapılabilirken, birkaç katlı bir bina inşa etmede aynı yöntem yeterli olmayacaktır.

Doğruluğa gerekçe göstermenin bir başka yolu da; benzerine bakmaktır. Örneğin, iki saat ders çalışarak sınavda başarılı olan arkadaşını gören bir öğrenci kendisinin de iki saat çalışarak aynı dersten başarılı olabileceğini düşünür. Bunun geçerli bir yöntem olmadığını öğrenci olmuş herkes deneyimleriyle bilir. Çünkü aynı koşullar bir başkası için geçerli olmayabilir.

Parçalardan bütüne gitmede (tümevarım), bir yargıya varmada yaygın yöntemlerden biridir. Örneğin çocukken bir köpek tarafından ısırılan bir kişinin bütün köpeklerin aynı şeyi yapacağına karar vermesi bu tür gerekçelendirmeye bir örnektir. Ancak bunun geçerliliği de, bu örnek için tartışmalıdır.

Matematikselsel doğrulamada ve diğer bilim alanlarında bir şeyin kesin doğruluğunun belirlenmesinde, bireysel deneyimler ya da otoriteye danışmak yeterli olmamaktadır. Örneğin, tarihi bir bilginin doğruluğu için bu konudaki otoriteye gönderme yapılabilir. Ancak matematikte, bir önerme ya da teorem ya da bir ifadenin doğruluğuna ya da yanlışlığına karar verme ispat yapma adı verilen bir süreç sonrasında olur. İspat yapma süreci evrensel olarak kabul gören yöntemlerden oluşur. İspat yapma ana hatlarıyla tümevarım ve tümdengelim olmak üzere iki yoldan yapılabilir [1]. Tümdengelim de kendi içinde doğrudan ispat, olmayana ergi, çelişki bulma gibi adlarla çeşitli yollara ayrılır.

Matematikselsel ispatın tarihçesine bakılacak olursa, bugün anlaşıldığı anlamıyla ispatın kaynağını M.Ö. IV. yüzyılda yayınlanan, Euclid'in "Elements" i oluşturmaktadır. Euclid'e göre ispat yapma süreci, dört aşamadan oluşmaktadır. Bu aşamalar; sonucu doğrulama, başkasını ikna etme, bir sonuç bulma ve sonuçları didaktik (tümdengelimsel) bir sistem içine yerleştirmedir [2]. İspat, bugün anladığımız anlamına, 19 yy. da Abel, Bolzano, Cauchy, Lagrange, Wierstrasse gibi matematikçiler tarafından getirilmiştir [2]. 1950-1960 arasındaki yeni matematik hareketi sırasında ispatın önemi geometri dışındaki alanlarda da vurgulanmıştır [3].

İspat süreci üç farklı, fakat, birbirleri ile ilişkili aşamalardan oluşmaktadır. Bu aşamalar; ispat yapılacak şeyin araştırılması, ispatın düzenlenmesi (organizasyonu), diğer kişilere açıklanması (anlatılması, sunulması) olarak sıralanabilir. Matematikçi, önce eldeki problem ya da ifadeyi analiz eder, daha önce yapılmış ispata da bakarak ifadenin doğru olup olmadığını araştırır ve daha önceden ispatlanmış teoremlerden hareketle nasıl üretilebileceğini inceler. Bu süreç ispatın yapılması ya da ifadenin yanlış olduğunun gösterilmesiyle biter. Fakat bir ispat ancak matematik dünyası tarafından kabul gördükten sonra bir ispat olur [3].

Matematik Eğitimi ve İspat

Matematikte ispatın yeri ve öneminin artmasıyla birlikte, çeşitli yaş gruplarındaki öğrencilerin ispat yaparken düşünsel süreçleri ve gelişimleri matematik eğitimi alanında araştırma konusu olmuştur. Ancak ispat yapmak, gerek ilk, orta öğretim, gerekse yüksek öğretim aşamasında olsun, yer aldığı eğitimin her aşamasında, öğrencilerin sıkıntı

çektikleri, başarılı olamadıkları, başarılı olamayacaklarına inandıkları, korktukları, genellikle sevilmeyen bir süreç olarak yapıldığı araştırmaların sonucunda sorun olarak ortaya çıkmıştır [4], [2], [5], [6], [7]. Öğrencilerin ispat yapmayı öğrenmede veya ispat çalışmanın gerekliliğini kavramada çektikleri güçlük, istisnasız ispatın öğretimi konusunda gerçekleştirilen bütün eğitim araştırmalarında çözümlenmeye çalışılan ana sorun olmuştur. “Neden bunu kanıtlamak zorundayız?” sorusu, öğrencilerce en sık sorulan sorudur [6]. Öğrenciler ispat yapmanın anlamlılığını, öğretmenin beklentisini yerine getirmek ve sınavları geçmenin ötesinde görememektedirler [8].

Çeşitli okul seviyelerindeki öğrencilerin ispata ilişkin düşüncelerinin yanı sıra, öğrencilerin ispat yapma düzeyleri ve ispat yapmada karşılaştıkları sorunlar üzerine de çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Hem lise hem de üniversite düzeyinde öğrencilerin ispat yapma düzeyleri düşük bulunmuştur. Almeida araştırmasında öğrencilerin ispat yapmada son yıllarda okullardaki programlarda yapılan kısıtlamalardan kaynaklanan bazı zorluklar yaşadıklarını ifade etmiştir [8]. İspat yapmada öğrencilerin sorunlarının genelde konu ile ilgili genel bir görüşleri olmadığından kaynaklandığı ifade edilmiş ve bu durum, ilişkili bir yapıya sahip matematiği kavramada ve etkili matematik eğitimi vermede engel teşkil edeceği ifade edilmiştir [5].

Lise düzeyinde Özer ve Arıkan'ın yaptığı çalışmada çalışmaya katılan öğrencilerin hemen hepsinin ispat becerilerinin olmadığı ortaya çıkmıştır [4]. Sorulan sorulara öğrenciler sayısal değerler vererek sadece tek örnekle ispatlar yaparak yanıt verdikleri ifade edilmiştir. Ancak uygun eğitim ile bu becerilerin geliştirilebileceği ifade edilmiştir [4]. Aynı sonuca Almeida bir çalışmasında da ulaşmıştır. Almeida, öğrencilerin gerek programdan gerekse öğretim biçiminden kaynaklanan ispat yapma yetersizliklerinin uygun eğitim ile geliştirilebileceğini, öğrencilerin bu konuda bir potansiyellerinin olduğunu ortaya koymuştur.

Okullarda lise düzeyinde ispat ile ilgili olarak, matematiği öğretim biçiminden kaynaklanan öğrencilerin ispata ilişkin (yaklaşımlarının,) becerilerinin sonucu tümevarımsal olarak teyit etme veya görsel ispat düzeyinde kaldığı ifade edilmiştir. Bu da ispat sürecinin (sezgisel- deneme ve yanılma- speculation-conjecture- ispat) yalnızca son ayağının dikkate alındığı veya bilindiğini göstermektedir. Almeida'a göre bu durum, bir matematikçinin matematiği yapılandığı yol ile matematiği öğretme yolunun farklılığından kaynaklanmaktadır.

Öğrencilerin ispat yapma becerilerine bakıldığında genelde matematiğin formalist yapısı açısından eksikliğinin sorun yarattığı görülmüştür. Bu da matematiksel bazı önemli sorunları ortaya çıkmasına sebep olmaktadır. Bunlar,

- Öğrenciye informal bir şekilde ifade edilen ispat, formal bir şekilde ortaya konulandan kavraması daha kolay gelmektedir.
- Formal olarak bir ispat yapılsa bile öğrenci güvenmemekte ve deneysel örnekleri ile karşılaştırma ihtiyacı duymaktadır.
- Öğrenci yalnızca öğretmenin yönlendirmeleri ile ispat yapabilmektedir [9].

Dreyfus'a göre ispat yapma becerisi bilginin değişik türlerine sahip olmayla ilgilidir. Dreyfus ispat ile ilgili uygun kavram ve işlemleri anlayan öğrencilerde bile sorun yaşandığı tespit edilmiştir, yaptığı araştırma neticesinde ispat yapmadaki sorunların giderilmesinde öğrencilerin değişik muhakeme etme (akıl yürütme) biçimlerini bilmeleri ve açıklama, tartışma ve ispat arasındaki farklılıkları ortaya koyabilme gerekliliği üzerine vurgu yapmıştır [5].

Matematik Öğretmeni Yetiştirme ve İspat

Matematik, sıkça değinildiği gibi, her aşamasında daha önceki bilgilerin ve edinilmiş becerilerin kullanımını gerektiren, bilgilerin sadece üst üste yığıldığı değil aynı zamanda iç içe de geçtiği bir bilim dalıdır. Matematik öğretmen adaylarının üniversite eğitimleri göz önüne alındığında, üst düzeyde ispat yapma becerilerinin olması gereği ortaya çıkmaktadır.

Matematik öğretmeni yetiştirmede alan bilgisinin oluşmasını sağlayan birçok temel derste yer alan konuların temellerini, tarih boyunca değişmeyen tanım ve teoremler oluşturmaktadır. Bunların en bilinenlerinden birkaçı; birden büyük her tam sayının asal sayıların çarpımı şeklinde ve tek şekilde yazılabileceğini ifade eden ve matematiğin temel taşlarını oluşturan sayıların yapısı hakkında çok önemli bilgi veren Aritmetiğin Temel Teoremi; kompleks katsayılı n . dereceden bir polinomun en az bir kompleks kökü bulunacağını ifade eden Cebirin Temel Teoremi; bir dik üçgende dik kenarların kareleri toplamının hipotenüsün karesine eşit olduğunu ifade eden ve geometride ilk ve orta öğretimde de sürekli kullanılan Pisagor Teoremi, analizde Ortalama Değer Teoremi olarak sıralanabilir. Bu temel teoremlerin ispatlarını yapıldıkları şekliyle çalışıp, tüm aşamalarındaki düşünme süreçlerini takip edebilmek de daha sonra karşılaşılan bir problemin üstesinden gelebilmek için gereken beceriye katkısı olacak çağrışımların yapılabilmesini kolaylaştıran önemli bir çalışmadır. Aslında ispatın amacı sadece bir önermenin doğruluğunu bütün şüphelerden arındırmak değil, aynı zamanda bize doğrulamaların birbirine olan bağımlılığını göstermek şeklinde de ifade edilebilir [3].

Bu araştırmanın yapıldığı hem ilköğretim hem de orta öğretim matematik öğretmenliği bölümleri programları incelendiğinde, birinci sınıfın ilk döneminde yer alan Soyut Matematik derslerinde matematiksel ispat başlı başına bir ders konusu olarak öğrencilerin karşısına, hem de dersin ilk birkaç haftası içinde, çıkmaktadır ve bu konunun içinde ispatın tanımı ve kısaca tarihçesi de verilerek matematik dünyasında günümüzde kabul edildiği şekliyle sınıflandırılması verilmekte, bu sınıflandırmada yer alan her bir yöntem isimleri ve kullanılma gerekçeleri de açıklanarak örneklendirilmektedir [10].

Alan derslerinin hemen hepsinde ispatla karşılaşmanın kaçınılmaz olduğu matematikte, bu konuya lisans eğitiminin bu kadar başlangıcında yer verilmesinin nedenlerinin başında; öğrencilerin diğer derslerde herhangi bir ispatla karşılaştıklarında hangi yöntemin kullanıldığını ayırt etmelerini ya da hangi yöntemin kullanılabileceğini belirlemelerini sağlamak gelmektedir. Öğretmen adaylarının ispat beceri düzeyleri hem birer matematikçi hem de birer matematik öğretmeni olarak sahip olmaları gereken düzey ile ortaya çıkacaktır.

Öğretmen adayların öğretmenlik yapacakları yaş gruplarına kazandırmaları gereken ispat becerilerinin ne düzeyde ve nasıl olması gereği eğitim programları incelendiğinde ortaya çıkmaktadır. İlköğretim 6-8 sınıf öğrencilerinde ispat ne düzeyde verilmeli ve olmalıdır diye araştırıldığında NCTM standartlarında akıl yürütme ve ispat kriterlerine rastlanmaktadır [11]. NCTM ye göre öğrenciler kuralları fark etme, olası bir genellemeye ilişkin varsayımda bulunma ve tahminleri-varsayımları değerlendirme ve matematiksel tartışmaları oluşturma ve değerlendirme gibi becerileri sağlamaları gereği ortaya konulmuştur. Matematikte akla yakın tahminleri formüle etme, bunları test etme, bunu muhakeme ederek diğer tahminleri(varsayımları) de değerlendirerek sunma gibi faaliyetlerin, okul içi etkinliklerde yer almasının gereği üzerinde durulmuştur. Bu

etkinliklerin genelde gerçek yaşam problemlerinden ve matematiğin kendi iç dünyasından doğacağı ifade edilmektedir [11]. Öğretmene düşen görev de; bu tür öğrenme ortamları yaratıp, öğrencilerin muhakeme etme ve ispat becerilerini geliştirmek olacaktır. Öğrencilerin hem tümevarımsal hem tümdengelsel muhakeme becerileri geliştirilmelidir.

Türkiye’de Milli Eğitim’in yeni matematik programları incelendiğinde, ilköğretim 6-8 sınıflarda matematik öğretiminde teorem, aksiyom gibi kavramların olmaması sebebiyle açıkça ispat yapmaktan bahsetmek güçtür. Yeni ilköğretim matematik öğretim programına bakıldığında genel hedeflerinden birinin, ‘mantıksal tüme varım ve tümden gelimle ilgili çıkarımlar yapabilecektir’ olduğu göze çarpmaktadır [12]. Bu hedefin gerçekleştirilmesi, özellikle matematiksel problemlerin çözümünde ve geometrik kuralların nereden geldiğini anlamada önem kazanmaktadır. İlköğretimde matematik öğretiminde, matematiksel bilginin ispatına dayalı olarak yapılandırılmış etkinlikler yoluyla matematiksel bilgiye ulaşıldığı görülmektedir. Örneğin “bir dik üçgende hipotenüs uzunluğunun karesi, dik kenarların uzunlukları karesinin toplamına eşittir” kuralı kareli kağıtlarla çeşitli dik üçgenlerin oluşturulduğu bir etkinliğe dayandırılarak anlatılmakta ve buradan hareketle de yukarıda bahsedilen genellemeye ulaşılmaktadır.

Ülkemizde öğretim programlarını yeniden yapılandırma çalışmalarının sonucunda oluşturulan “Ortaöğretim Matematik (9,10,11 ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı” na bakıldığında “Mantık Öğrenme Alanı” içerisinde, “İspat Yöntemleri Alt Öğrenme Alanı” nda ispat kavramına yönelik iki kazanıma rastlanmaktadır. Bunlar “tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar, bir teoremin hipotezini ve hükmünü belirtir” ve “ispat yöntemlerini kullanarak basit ispatlar yapar” ifadeleridir [13]

Eski öğretim programını aksine yeni programda hem kazanımlara yönelik etkinlikler kısmında hem de açıklamalar kısmında kazanımlara ilişkin yeterli açıklama ve örneklere yer verilmektedir. İspat yöntemleri bir şema içerisinde tanıtılmış; Tümevarım ve Tümden Gelim başlıkları altında iki bölümde ele alınmıştır [13].

Öğrencilerin öğrenmeleri beklenen matematiksel bilgilerin dayanaklarını anlamaları öğrenmeyi kalıcı hale getirmelerinde yararlı olacaktır. Ayrıca, kendilerine verilen bir problem için geliştirdikleri çözüm yolunu matematiksel ifadelerle savunmalarına da katkıda bulunacaktır. Bu nedenle gerek ilköğretim gerekse ortaöğretim matematik öğretiminde matematiksel ispat yapma üzerinde durulması, öğrencilerin matematiksel düşüncelerinin gelişmesi yönünden önemli olacaktır.

Yapılan çeşitli araştırmalarda üniversite düzeyindeki öğrencilerin ispat yapma sürecinde çeşitli sorunlar yaşadıkları ortaya konulmuştur ve öğretmenlerin, öğrencilere ispatın ve ispat yapmanın doğasından oldukça yoksun etkinlikleri sundukları görülmüştür [5]. Knuth ve Elliott’un yaptığı bir araştırmada matematik öğretmen adaylarının ispata ilişkin yorumlarının, değerlendirmelerinin matematik camiasının kabul ettiği normlardan farklı olduğunu ortaya koymuştur [5]. Ayrıca pek çok öğretmenin, öğretmenliğe başladıkları ilk yıllarda, öğrencilerin ispat yapma becerilerine ilişkin sınırlı beklentileri olduğunu tespit etmiştir [5]. İspat sürecinde öğrencilerin yaşadığı sorunları şu şekilde özetlemek mümkün olacaktır:

- Anlama, takdir etme ve ispatı oluşturmada zorluklar,
- Akıl yürütme adımlarını takip edememe,

- Çoğunluğunun yarı-formal düzeyde olduğu, formelleştirme yapamadıkları,
- En basit ispatların bile öğrenci için temel zorluk oluşturması,
- Öğrencilere bir ispat formal olarak verildikten sonra verilen bir probleme öğrencilerin kayda değer bir yüzdesi az önce ispatladıklarına tamamen aykırı sonuçlar bulabilmektedirler.

Jones, matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin kavramsallaştırmaları üzerinde bir araştırma yapmıştır [5]. Diğer çalışmalardan farklı bir sonuca ulaşmamış, öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin becerilerinin yeterli düzeyde olmadığı sonucuna ulaşmıştır. Ancak bu çalışmada diğer çalışmalardan farklı olarak, matematik öğretmen adaylarının yüksek seviyede olanları da dahil olmak üzere, etkili matematik öğretimi için gerekli matematiksel bilgiye sahip olmadıkları ve bu şekilde mezun oldukları tespit edilmiştir. Bu araştırma üst düzeydeki öğretmen adaylarının teknik açıdan ispatı daha akıcı bir şekilde yapabildiklerini ancak, bunun onların kavramsal açıdan derinlemesine matematiksel bilgiyle ilişkilendirmelerini garantilemediğini ortaya koymuştur [5].

Matematikte ve matematik eğitiminde ispatın anlam ve önemi hızla artarken, ileride matematikçi olabilecek öğrencileri yetiştirecek matematik öğretmen ve öğretmen adaylarının ispat yapma düzeyleri ve bu konudaki algı ve görüşleri önemli olacaktır. Almeida'nın bazı araştırmalardan ulaştığı sonuca göre, öğretmenlerin ispata ilişkin algıları ve deneyimleri öğrencilerin ispat becerilerini kazanma süreçlerinde etkili olduğunu ifade etmiştir [2]. Matematik öğretmenlerinin, derslerini etkili bir şekilde yapılandırabilmeleri için, kazandıracakları kavramın nereden geldiğini, hangi matematiksel bilgi veya ilke üzerine kurulu olduğunu bilmeleri gerekmektedir. Bunun için de kendilerinin matematiksel ispat yapma yönüyle donanımlı olmalarını gerektirmektedir.

Bu araştırmanın amacı, matematik öğretmen adaylarının ispata ilişkin görüşlerini tespit etmektir. İspata ilişkin görüşler öğretmen adaylarının ispat becerilerine ilişkin varsa sorunları ortaya çıkarma ve gidermede ilk adımı oluşturacak bilgiyi sağlayacaktır.

2. Yöntem

Araştırma, betimsel bir çalışmadır. Matematik öğretmen adaylarının ispat ve ispat yapmaya ilişkin görüşlerini almaya yönelik geliştirilen bir ölçek kullanılmıştır.

2.1. Veri Toplama Aracı

Matematik öğretmen adaylarının ispata ilişkin görüşlerini almak amacıyla, Almeida'nın [9] in çalışmasında kullandığı ölçek geliştirilerek kullanılmıştır. Oluşturulan ölçek pilot çalışması yapılarak gerekli maddeler atılmak suretiyle son hali ile örnekleme uygulanmıştır. Ölçek 5 li likert tipi ölçektir. Yanıt seçeneği tamamen katılıyorum ile kesinlikle katılmıyorum arasında derecelenmektedir. Ölçek ek1' de verilmektedir.

Ölçeğin güvenirliği 0.80 olarak belirlenmiştir. Ölçeğin yapı geçerliğini belirlemek için faktör analizi yapılmıştır. Buna göre ölçek yedi faktörlüdür. Yedi faktörün ölçeğe ilişkin açıkladıkları toplam varyans %59'dur. Faktör döndürme sonrasında ölçeğin birinci faktörünün dört maddeden, ikinci faktörünün dört maddeden, üçüncü faktörünün dört maddeden, dördüncü faktörünün iki maddeden, beşinci faktörünün üç maddeden,

altıncı faktörünün iki maddeden ve yedinci faktörünün bir maddeden oluştuğu belirlenmiştir. Yapılan değerlendirme sonrasında birinci faktörün öğrencilerin kişisel ispat yeterliliklerini (Ek 1’de verilen ölçeğin 14, 18, 19 ve 20 nolu maddeleri), ikinci faktörün öğrencilerin ispat yapmanın önemine yönelik görüşlerini (6, 7, 8 ve 17 nolu maddeler), üçüncü faktörün öğrencilerin ispatın teoremi anlamaya etkisine yönelik görüşlerini (11, 12, 13 ve 16 nolu maddeler), dördüncü faktörün öğrencilerin ispat yapmaya yönelik benlik algılarını (9 ve 10 nolu maddeler), beşinci faktörün öğrencilerin ispat yapmaya yönelik genel görüşlerini (1, 2 ve 4 nolu maddeler), altıncı faktörün öğrencilerin örnek, teoreme bakış açılarını (3 ve 5 nolu maddeler), ve yedinci faktörün öğrencilerin problem çözme ve matematiksel ispat arasındaki ilişkiye yönelik görüşlerini (15 nolu madde) belirlediği ortaya konulmuştur.

2.2. Örneklem

Araştırmanın örneklemini, Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi, İlk ve Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümlerinin birinci ve sonuncu sınıflarında okuyan 337 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Örneklemin 182’si birinci sınıf, 155’i son sınıf öğrencilerinden; 59’ u ortaöğretim, 278’i ilköğretim matematik öğretmenliği bölümleri öğrencilerinden oluşmaktadır. Ölçek eğitim öğretim yılının birinci dönem sonunda uygulanmıştır.

2.3. Verilerin Analizi

Ölçeğe verilen yanıtlar 5-1 arasında puanlanarak SPSS-Win programı yardımı ile analiz edilmiştir. Olumlu veya ispat açısından kabul gören maddeler tamamen katılıyorum 5 puan, kesinlikle katılmıyorum yanıtına 1 verilmek suretiyle puanlama yapılmıştır. Bazı maddeler ters görüş içerdikleri için bu maddeler ters çevrilerek analiz edilmiştir. Analizde frekans dağılımları, ilişkisiz örneklem t- testi ve tek yönlü varyans analizi (anova) kullanılmıştır.

3. Bulgular ve Yorum

Kullanılan ölçeğin yukarıda belirtildiği üzere içerik itibari ile 7 başlıkta gruplamak mümkün olmuştur. Bunun yanı sıra maddelere bakıldığında da 5 temel içeriğinin olduğu söylenebilir. Bunlardan biri ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliğe karar vermede etkili olacak, ispat yapmanın önemi, ispatın teoremi anlamaya etkisi, örnek- teoreme ilişkin bakış açısı, problem çözme ve ispat yapma ilişkisine ilişkin görüşlerdir. Diğerleri daha çok duyuşsal olan doğrudan olmasa da dolaylı olarak gene de ispat yapma becerileri ile ilgili olabilecek görüşlerdir.

Ölçeğe verilen yanıtlardan her bir birey için toplam puanları alınarak değerlendirme yapıldığında, elde edilen bulgunun pek de istenilen düzeyde olmadığı görülmektedir. Ölçekte her madde için 3,5 üstü bir puanın yüksek ve istenilen bir puan olduğu düşünülürse, toplamda 70 ($3,5 \times 20 = 70$) puan üzeri alan kişilerin görüşleri istenilen yöndedir. Aynı düşünce ile bir madde için 2,5 ve altı puan düşük düzeyde bir puan kabul edilirse, toplamda 60 ($2,5 \times 20 = 60$) ve altı puan alan kişilerin görüşleri istenilmeyen yöndedir. Toplamda 70-61 arası puan alanlar genelde kararsız guruba konulabilir. Bu değerlendirme sistemine göre, ölçekteki tüm maddeler toplamında 70

puan üzeri alan kişilerin %36,8; 60 puan ve altı alanların %21,4 olduğu hesaplanmıştır. Bu verilerden, ne olumlu görüş bildirenlerin ne de olumsuz görüş bildirenlerin yüzde değerlerinin yüksek olmadığı görülmektedir. Olumlu görüş bildirenlerin oranının düşük olması araştırmaya katılan matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin becerilerine ilişkin kavramsal yeterliliklerinin düşük olabileceği anlamına gelebilir.

Toplamda kararsız olarak kabul edilenler ise, örneklemdaki toplam kişilerin %41,8'ini oluşturmaktadır. Kararsızların yüksek oranda olmaları, oldukça ilginç bir sonuçtur. Ölçekteki çoğu maddeye bakıldığında sorulan sorulara ilişkin kararsızlık aslında ispat yapmaya ilişkin kavramsallaştırmanın istenilen düzeyde olmadığı anlamına da gelebilir. Maddeler bazında elde edilen veriler değerlendirilecek olursa, ispat ve ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliğe yönelik maddelere bakıldığında görüşlerin genelde istenilen yönde olduğu görülmektedir. Bu maddelerden bir kısmı tablo 1 de verilmiştir (1, 2, 3, 5, 11, 12, 13, maddeler). Sadece öğretmen adayları bir teoremin farklı ispatlarını görmenin o teoremi daha iyi anlama konusunda olumsuz görüş bildirmişlerdir. Ayrıca tabloda sunulan 3. madde “Bir sonucun örnekle gösterildiğini görmek, o sonucun neden doğru olduğunu anlamama her zaman yardımcı olmaz” ifadesinde kararsız kaldıkları söylenebilir. Bu durum, öğretmen adaylarının sayısal değerlere dayanan ispatlamaya eğilimli olduklarını gösterebilir. Aslında böyle bir kanıt yolu matematikte kabul görmeyen bir yöntemdir. Ancak alandaki bazı araştırmalarda da benzer sonuçlara rastlanmıştır [4], [2]. Diğer taraftan öğretmen adayları sadece örnekler yardımı ile de ispat yapılamayacağı görüşünde de (çok yüksek oranda olmasa da) birleşmişlerdir.

Tablo 1. İspat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklere yönelik maddelerin ortalamaları

		5		4		3		2		1		ort
		f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	
		Madde	1	125	37,1	169	50,1	35	10,4	5	1,5	
2	107		31,8	185	54,9	27	8,0	16	4,7	2	0,6	4,12
3	56		16,6	157	46,6	35	10,4	78	23,1	1	0,3	3,50
5	61		18,1	181	53,7	45	13,4	42	12,5	8	2,4	3,72
11	87		25,8	192	57	38	11,3	18	5,3	2	0,6	4,02
12	4		1,2	16	4,7	41	12,2	184	54,6	9	2,7	1,97
13	109		32,3	189	55,2	34	10,1	7	2,1	1	0,3	4,17

İspat yapmaya yönelik benlik algısına ilişkin maddelere (10 ve 14 maddeler) ait frekans ve yüzde dağılımları tablo 2 de verilmiştir.

Tablo 2. İspat yapma benlik algısına ilişkin frekans ve yüzde dağılımları

Madde		5		4		3		2		1		ort
		f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	
		10	18	5,3	66	19,6	138	40,9	91	27	24	
14	7	2,1	107	31,8	93	27,6	102	30,3	28	8,3	2,89	

Araştırmaya katılan öğrencilerin kendi kendine ispat yapabilmeye, kendilerine güvenmede, genelde kararsız kaldıkları görülmüştür (%40,9 kararsız). Bu kendilerini ispat yapma açısından pek tanımadıklarını, becerilerinin pek farkında olmadıklarını gösterebilir. Bunun yanı sıra ispatı anlama ile ilgili maddeye her türlü yanıtlara ait oranların birbirlerine yakın değerlerde (%38,6 olumlu; %33,9 olumsuz; %27,6 kararsız) olduğu elde edilen verilerdendir. İspatı anlamada zorluk çekenler ve çekmeyenlerin yüzde değerleri oldukça yakındır. Öğretmen adayların kendilerini bu kadar açıkça tanıyıp ifade edebiliyor olmaları olumlu karşılanırken, zorluk çekenlerin sayısı önemsiz sayılmayacak kadar çoktur. Geleceği yetiştirecek bu bireyler için bu tür bir sonuç olumsuzluk teşkil etmektedir.

Öğretmen adaylarının ispat yapmanın gerekliliği ve önemi üzerine görüşlerine bakıldığında, ispat yapmanın teorik matematik için vazgeçilmez olduğunu düşünmelerine karşın, ispatın çok açık sonuçlar için gereksiz olduğuna ilişkin fikirlerinin daha baskın olduğu görülmektedir. İspat yapmanın gerekliliği ve önemi üzerine görüşlere (4, 6, 8, 17., maddeler) ait frekans ve yüzde dağılımları tablo 3 de verilmiştir.

Tablo 3. İspat yapmanın önemine ilişkin görüşler

Madde		5		4		3		2		1		ort
		f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	
		4	137	40,7	145	43	39	11,6	11	3,3	5	
6	65	19,3	145	43,0	49	14,5	45	13,4	33	9,8	3,48	
8	31	9,2	125	37,1	67	19,9	72	21,4	42	12,5	3,09	
17	23	6,8	131	38,9	93	27,6	65	19,3	25	7,4	3,18	

Matematik öğretmen adaylarının ispata ilişkin genel görüşlere (7, 15, 16, 19, 20., maddeler), ait frekans ve yüzde dağılımları tablo 4' te verilmiştir.

Tablo 4. İspat yapmaya ilişkin genel görüşler

		5		4		3		2		1		ort
		f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	
Madde	7	6	1,8	26	7,7	49	14,5	178	52,8	78	23,1	2,12
	15	63	18,7	166	49,3	60	17,8	38	11,3	10	3	3,69
	16	86	25,5	176	52,2	42	12,5	24	7,1	9	2,7	3,90
	19	9	2,7	90	26,7	81	24,0	125	37,1	32	9,5	2,75
	20	22	6,5	136	40,4	88	26,1	71	21,1	20	5,9	2,75

Adayların ispat yapmaya ilişkin görüşlerine bakıldığında ise genel bir genellemeye varmak mümkün görülmemektedir. Tablo 5 de sunulan değerlere bakıldığında ispat yapmayı seven ve sevmeyenler veya sıkıcı bulan veya bulmayanlar oranları arasında büyük farklar yoktur. Ancak kararsızların sayısının fazla olması ilginç bir veridir.

Tablo 5. İspat yapma ile ilgili duygular

		5		4		3		2		1		ort
		f	%	f	%	f	%	f	%	f	%	
Madde	9	35	10,4	106	31,5	90	26,7	79	23,4	27	8,0	3,12
	18	28	8,3	118	35,0	87	25,8	71	21,1	33	9,8	3,11

Maddeler bazında incelenen bu verilere göre genelde belirtilen görüşlerin istenilen yönde olmadığı, bazı maddelerde belli yönde bir görüş tespit etmek mümkün olmamıştır. Çıkan en ilginç sonuç ise bu örnekteki kişilerde kararsızların çoğunlukta olmasıdır. Bu kararsızlık duygularına da yansımıştır. Kararsızlık aslında ispat konusu bağlamında düşünüldüğünde aynı zamanda olumsuzluğu yansıtmaktadır.

Tablo 6. Öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerinin sınıflara göre dağılımı

Varyansın Kaynağı	Kareler Toplamı	sd	Kareler Ortalaması	F	p
Gruplararası	488,468	3	162,823	1,968	,119
Gruplarıçi	27547,38	333	82,725		
Toplam	28035,85	336			

Öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerinin, sınıflara göre farklılık gösterip göstermediği, varyans analizi ile araştırılmıştır. Analiz sonuçları, öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinde sınıflara göre anlamlı bir fark olmadığını göstermektedir ($F_{(488-27547)}=1,968, p>,05$). Değerler, tablo 6'da sunulmaktadır.

Öğretmen adaylarının öğrenim gördükleri süre içerisinde aldıkları matematik derslerinin yoğunluğunun, ispata yönelik görüşlerine etkisi olup olmadığı araştırılmıştır. Elde edilen veriler tablo 7’de verilmektedir.

Tablo 7. Birinci sınıftaki öğretmen adayları ile son sınıfta öğrenim gören öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri arasındaki ilişki

Sınıf düzeyi	N	\bar{X}	S	sd	t	p
Birinci sınıf	182	66,29	9,81	335	2,4	0,17
Son sınıf	155	68,67	9,10			

Öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşleri, birinci sınıfta ve son sınıfta olmalarına göre anlamlı bir farklılık göstermemektedir ($p > .05$). Öğretmen adaylarının, matematiğin doğasını daha iyi anlamalarının beklenmesine karşın, iki grubun ortalamaları birbirine yakın olduğu görülmektedir.

4. Sonuç ve Öneriler

Yapılan araştırmanın bulgularına bakıldığında, öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri tam olarak oluşmadığı görülmektedir. Bu durum öğretmen adaylarının ispat yapmanın, matematik ve matematik öğretimi açısından önemini bilmedikleri ve üzerine düşünmediklerini göstermektedir. Öğretmen adaylarının aldıkları eğitim boyunca yüzlerce teorem ve bunların ispatlarını öğrendikleri göz önüne alınırsa, öğrenilen bilgilerin belki de ezbere dayalı edinildiği düşünülebilir.

İspat yapma, ilköğretim ve orta öğretim matematik programlarında yer almaktadır. Bu nedenle öğretmenlerin kendilerini bu alanda geliştirerek, ispat yapma merkezli matematik etkinliklerini geliştirebilecek duruma getirmeleri gerekmektedir. Öğrenciler, bu tarz etkinliklerle matematiksel bilgilerin ortaya çıkış yollarının farkına vararak, matematiğin tadına varacaklardır.

Öğretmenlerin kendilerinin matematiksel ispat yapma yeterliliklerinin eksikliği, derslerinde kullanma sıklıklarını etkileyecektir. Bu nedenle öğretmen yetiştiren kurumlarda gerek pür matematik derslerinde, gerekse matematik öğretimi derslerinde önemle üzerinde durulması gerekmektedir. Bu çalışmada, içlerinde matematiksel ispat yapma becerisi gelişmiş öğretmen adaylarının bile, matematiksel ispat yapmaya yönelik olumlu görüşlerinin olmadığı göze çarpmaktadır. Dolayısıyla öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerinin geliştirilmesinin yanı sıra, ispat yapmanın yeni matematiksel düşüncelerin gelişimine ve matematiğin doğasını anlamaya olan katkılarına dikkat çekmek gerekmektedir.

Matematiksel ispat yapma üzerine yapılan çalışmalar artırılması gerekmektedir. Matematiksel ispatın gerekliliği, matematiksel düşünmenin gelişimi üzerine etkileri araştırılarak ortaya konmalıdır. Matematik öğretmenlerinin ispat düzeyleri ve öğrencilerine bunu öğretme yolları üzerine sınırlı sayıda araştırma olduğu da ifade edilmektedir [5]. Öğretmenlerin derslerde ispata zaman ayırması ile kavramsal öğrenmenin ne düzeyde gerçekleştiğini ortaya koyan araştırmalar, ispat yapmanın matematik öğretimindeki önemi vurgulayacaktır.

Kaynaklar

1. ÇALLIALP, F. (1999). Örnekler İle Soyut Matematik, Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi Yayınları, 3. Baskı, İstanbul.
2. ALMEIDA, D. (2003). "Engendering proof attitudes: can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?", International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol. 34, no.4, p. 479-488.
3. LEE, J. K. (2002). "Philosophical perspectives on proof in mathematics education", Philosophy of Mathematics Education, vol.16, <http://www.ex.ac.uk/~PERnest/pome16/docs/lee.pdf> (02-Temmuz-2005).
4. ÖZER, Ö. ve ARIKAN, A. (2002). "Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri" V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 16-18 Eylül, Ankara, Bildiriler Kitabı Cilt II, s.1083-1089.
5. JONES, K. (2000). "The student experience of mathematical proof at university level", International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol. 31, no.1, p. 53-60.
6. de VILLIERS, M. (1990). "The role and function of proof with sketchpad" Pythagoras, vol.24, p.17-24.
7. RAMAN, M. (2003). "What are they and how can they help us understand how people view proof?", Educational Studies in Mathematics, vol.52, p.319-325.
8. ALMEIDA, D. (2000). "A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications form mathematics education", International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol. 31, no.6, p. 869-890.
9. ALMEIDA, D. (2001). "Pupils' proof potential", International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol. 32, no.1, p. 53-60.
10. DEÜ (2002). Buca Eğitim Fakültesi Kataloğu
11. NCTM (2003). "Reasoning and proof standard for grades 6-8", <http://standards.nctm.org/document/chapter6/reas.htm> (14-Ekim-2003).
12. MEB (2005). İlköğretim Okulu Matematik Dersi 6-8 Sınıflar Öğretim Programı, http://ttkb.meb.gov.tr/ogretmen/modules.php?name=Downloads&d_op=viewdownload&cid=34 (28-Aralık-2005).
13. MEB (2005). Ortaöğretim Matematik (9,10,11 ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı, http://ttkb.meb.gov.tr/ogretmen/modules.php?name=Downloads&d_op=viewdownload&cid=34 (28-Aralık-2005)

EK-1

Değerli öğrenciler,

Bu anket “matematiksel ispat yapma” ya yönelik görüşlerinizi almak amacıyla hazırlanmıştır. Bu araştırmadan elde edilen veriler, bilimsel bir araştırmada kullanılacaktır. Lütfen soruları dikkatlice okuyarak eksiksiz yanıtlayınız. Teşekkür ederiz.

Bölüm: (Ö.Ö) / (İ.Ö)

Sınıf:

İFADE		Tamamen katılıyorum	Katılıyorum	Kararsızım	Katılmıyorum	Kesinlikle katılmıyorum.
1.	Matematiksel bir ispat olguları hem gerçekler, hem de açıklar.					
2.	Matematiksel bir sonuç ispatlandığında doğru olduğuna inanırım.					
3.	Bir sonucun örnekle gösterildiğini görmek, o sonucun neden doğru olduğunu anlamama her zaman yardımcı olmaz.					
4.	İspat, teorik matematik için vazgeçilmezdir.					
5.	Matematikte sadece örnekler yardımı ile bir şeyin doğru olup olmadığını anlayabiliriz.					
6.	İspatları neden yapmamız gerektiğini <u>anlamıyorum</u> : derste gördüğümüz bütün sonuçlar daha önceden ünlü matematikçiler tarafından şüphe götürmez bir şekilde kanıtlanmış.					
7.	İspatlar bazen pek de açıkça anlaşılmayan stratejiler içerirler.					
8.	Eğer matematikte bir sonuç açıkça doğruysa ispatlanmasının bir anlamı yoktur.					

9.	Matematiksel ispat yapmayı seviyorum.					
10.	Kendi kendime ispat yapabilme becerime güveniyorum.					
11.	Bir ispatın aşamaları üzerinde çalışmak, neden doğru olduğunu anlamama yardımcı oluyor.					
12.	Bir teoremin farklı ispatlarını görmek onu daha iyi anlamama yardımcı oluyor.					
13.	Matematiksel bir ispat, başka matematiksel sonuçlara da bağlıdır.					
14.	İspatları anlamada genellikle zorlanıyorum.					
15.	İspat yapmak bir anlamda problem çözmedir.					
16.	Matematiksel ispatları yalnızca profesyonel matematikçiler yapabilir.					
17.	Bence teoremi (yada önermeyi) bilmek ispatını yapmaktan daha önemlidir.					
18.	İspatlarla uğraşmak çok sıkıcıdır.					
19.	Genelde bir teoremin ne ifade ettiğini anlamama rağmen ispatını anlamada zorlanıyorum.					
20.	Bir ispatı ancak sınıfta hoca yapınca anlayabiliyorum.					