МЕТОД СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК В ПРОБЛЕМЕ МИНИМИЗАЦИИ ЗАГРЯЗНЕНИЙ АТМОСФЕРЫ ЧАСТИЦАМИ ВРЕДНЫХ ПРИМЕСЕЙ

Проф. Др. Рамиз РАФАТОВ

Кыргызско –Турецкий Унивеситет Манас Институт Естественных Наук

В предположении, что управляемый объект описывается нестационарным интегро-дифференциальным уравнением переноса со специальными краевыми условиями, а управляющие параметры входят в правую часть уравнений с помощью дельта-функций, минимизируется интегральный квадратичный функционал, характеризующий затраты на управление, а также зависящий от средне-квадратического отклонения концентрации частиц от желаемого конечного состояния. Условия оптимальности выводятся с помощью принципа максимума Понтрягина, из которых получаются формулы, дающие синтез оптимального управления в задаче минимизации загрязнений атмосферы частицами вредных примесей. Данное интегро-дифференциальное уравнение переноса и получаемое в задаче сопряженное уравнение с помощью ортогональных сферических функций сводятся к бесконечной системе дифференциальных уравнений с частными производными, к так называемым уравнениям метода сферических гармоник.

1. Постановка задачи и получение условий оптимальности. Процесс распространения **в** атмосфере частиц вредных примесей описывается интегро-дифференциальным уравнением вида [1,2,3]:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + div(\vec{v}\psi) + \sigma\psi(t,\vec{r},\vec{v}) - \alpha\Delta\psi - \beta\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \qquad \textbf{(1.1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\delta(\vec{v}-\vec{v}_i) + \frac{c}{4\pi}\int_{\Omega} g(t,\vec{r},\vec{v}.\vec{v}')\psi(t,\vec{r},\vec{v}')d\Omega'$$

с краевыми условиями

$$\psi(t,\vec r,\vec v)\big|_{t\le 0}=\psi_0(t,\vec r)\ , \qquad (1.2)$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}-\lambda\psi\right)\Big|_{\Gamma_0}=0\ , \qquad (1.3)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}\Big|_{\Gamma_1}=0\ , \qquad (1.4)$$

$$\psi(t,\vec r,\vec v)\big|_{\Gamma_\delta}=0 \quad \text{при} \quad (\vec v,\vec n)\neq 0\ , \qquad (1.5)$$

где $\vec n-$ единичный вектор нормали к внешней стороне поверхности Γ области G цилиндрической формы с основаниями Γ_0 , Γ_1 и боковой поверхностью Γ_δ .

Здесь $\vec v=(u,v,w)\in\Omega-$ единичный вектор скорости, удовлетворяющий условию неразрывности

$$div(\vec v)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\ ,$$

причем $w=0$ на основаниях $z=-a$ (Γ_0) и $z=+a$ (Γ_1) области G .

Предполагается, что в точках $\vec r_i=\vec r(x_i,y_i z_i)$ $(i=1,2,...,n)$ области Γ_0 расположено n промышленных объектов, выбрасывающих частицы вредных примесей, мощности которых характеризуются функциями $u_i(t)$ $(i=1,2,...,n)$.

В уравнении (1.1) $\psi(t,\vec r,\vec v)$ означает плотность вредных примесей в момент времени t в переменной точке $\vec r=\vec r(x,y,z)$ области G, имеющих скорости $v=v(\vec u,\vec v,\vec w)\in\Omega;\sigma,c-$ положительные постоянные, характеризующие среду G , где происходит перенос частиц вредных примесей, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}-$ оператор Лапласа, $\alpha,\beta-$коэффициенты горизонтального и вертикального турбулентного обмена, $g(t,\vec r,\vec v.\vec v')-$ функция , характеризующая рассеяние частиц вредных примесей,

$\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$, $\delta(\vec{v}-\vec{v}_i)$ – дельта- функции Дирака. Коэффициент λ в условии (1.3) характеризует вероятность снова попасть в атмосферу субстанций, выпавших на поверхность земли . Условие (1.5) означает, что частицы, вылетевшие из области G , не возвращаются внутрь данного объема.
Допустимыми управлениями считаются всевозможные функции $u(t)=(u_1(t),...,u_n(t))\in \in L_n^2[0,T]$.
Задача оптимального управления формулируется следующим образом:

Требуется найти такие $u_i(t)$ $(i=1,2,...,n)$, которые вместе с соответствующим им решением $\psi(t,\vec{r},\vec{v})$ задачи (1.1) – (1.5) доставляли бы наименьшее возможное значение следующему интегральному квадратичному функционалу

$$J[u]=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\int_0^T u_i^2(t)dt+\int_G dG\int_\Omega[\psi(T,\vec{r},\vec{v})-\psi_1(\vec{r},\vec{v})]^2 d\Omega \text{ ,} \quad \textbf{(1.6)}$$

где $\psi_1(\vec{r},\vec{v})\in W^{1,0}(G\mathrm{X}\Omega)$ – желаемое конечное состояние концентрации $\psi(t,\vec{r},\vec{v})$ частиц вредных примесей в момент времени $t=T$ в переменной точке $(\vec{r},\vec{v})$ области $G\mathrm{X}\Omega$, $\gamma_i=const\succ 0$ $(i=1,2,...,n)$.

Воспользуемся результатами работ $[2,3]$, и оптимальное управление для вышесформулированной задачи построим в виде

$$u_i(t)=\frac{1}{2\gamma_i}\Phi(t,\vec{r}_i,\vec{v}_i) \quad (i=1,2,...,n), \qquad (1.7)$$

где $\Phi(t,\vec{r},\vec{v})$ – решение сопряженной краевой задачи :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+div(\vec{v}\Phi)-\sigma\Phi(t,\vec{r},\vec{v})+\alpha\Delta\Phi(t,\vec{r},\vec{v})+\beta\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+$$

$$+\frac{c}{4\pi}\int_\Omega g(t,\vec{r},\vec{v}'.\vec{v})\Phi(t,\vec{r},\vec{v}')d\Omega'=0 \text{ ,} \qquad (1.8)$$

$$\Phi(T,\vec{r},\vec{v})=-2[\psi(T,\vec{r},\vec{v})-\psi_1(\vec{r},\vec{v})] \text{ ,} \qquad (1.9)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\lambda\Phi\right)_{\Gamma_0}=0 \text{ ,} \qquad (1.10)$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{\Gamma_1} = 0 \;, \qquad (1.11)$$

$$\left.\Phi(t,\vec{r},\vec{v})\right|_{\Gamma_\delta} = 0 \qquad \text{при} \qquad (\vec{v},\vec{n}) \ge 0 \;. \qquad (1.12)$$

Здесь $\psi_1(\vec{r},\vec{v}) -$ функция, участвовавшая в формулировке функционала (1.6).

Таким образом, для построения оптимального управления в сформулированной выше задаче минимизации загрязнений атмосферы частицами вредных примесей по формулам (1.7), необходимо найти функцию $\Phi(t,\vec{r},\vec{v}) -$ решение краевой задачи (1.8) – (1.12).

Подставив (1.7) в (1.1), получим следующее уравнение переноса :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + div(\vec{v}\Psi) + \sigma\psi(t,\vec{r},\vec{v}) - \alpha\Delta\psi(t,\vec{r},\vec{v}) - \beta\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \qquad (1.13)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\gamma_i}\Phi(t,\vec{r}_i,\vec{v}_i)\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\delta(\vec{v}-\vec{v}_i) + \frac{c}{4\pi}\int_{\Omega} g(t,\vec{r},\vec{v}.\vec{v}')\psi(t,\vec{r},\vec{v}')d\Omega'$$

с краевыми условиями в виде (1.2) – (1.5).

Для решения уравнений (1.8) и (1.13) с краевыми условиями (1.9) – (1.12) и (1.2) и (1.5) будем применять метод сферических гармоник, для чего в следующем пункте приведем краткие сведения о сферических функциях [4,5].

2.Сферические функции. Известно, что полиномы Лежандра

$$\mathrm{P}_k(\mu) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{d\mu^k}(\mu^2-1)^k, k = 0,1,2,... \qquad (2.1)$$

являются единственным линейно независимым решением в $C^2[-1,1]$ уравнения Лежандра [5,6]:

$$\left[(1-\mu^2)\mathrm{P}'\right]' + k(k+1)\mathrm{P} = 0 \qquad (2.2)$$

и образуют ортогональную систему в $L^2[-1,1]$:

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_i(\mu)\mathrm{P}_k(\mu)d\mu = \frac{2}{2k+1}\delta_{ik} \;, \qquad (2.3)$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \qquad (2.4)$$

символ Кронекера.

Введем теперь присоединенные функции Лежандра $\mathrm{P}_{km}(\mu)$, связанные с полиномами Лежандра (2.1) по формулам

$$\mathrm{P}_{km}(\mu) = (1-\mu^2)^{m/2}\mathrm{P}_k^{(m)}(\mu), k = 0,1,2,...; m = 0,1,2,...,k. \qquad (2.5)$$

С помощью присоединенных функций Лежандра (2.5) образуются сферические гармоники $[5,6]$:

$$\mathrm{Y}_{km}(\vec{v}) = \mathrm{Y}_{km}(\mu,\varphi) = \left[\frac{2k+1}{4\pi}\frac{(k-|m|)!}{(k+|m|)!}\right]^{1/2}(-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\mathrm{P}_{k|m|}(\mu)e^{im\varphi} \qquad (2.6)$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица,

$$\mu = \cos\theta, r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta, \varphi -$$

сферические координаты точки $M(r,\varphi,\theta)$.

Можно показать, что любая функция $f(\vec{v}) \in L^2(\Omega)$ разложима в ряд
по полной системе сферических гармоник (2.6) . Это следует из того, что при каждом $m \geq 0$ система присоединенных функций Лежандра

$$\mathrm{P}_{km}(\mu), k = m, m+1,...$$

(см.(2.5) , (2.1) – (2.4)) полна и ортогональна в $L^2[-1,1]$, причем

$$(\mathrm{P}_{km},\mathrm{P}_{jm}) = \int_{-1}^{1}\mathrm{P}_{km}(\mu)\mathrm{P}_{jm}(\mu)d\mu = \frac{(k+m)!}{(k-m)!}\frac{2}{2k+1}\delta_{jk} \qquad (2.7)$$

Сферические гармоники $\mathrm{Y}_{km}, m = 0,\pm 1,\pm 2,...,\pm$ порядка k , определенные по формулам (2.6) , можно представить еще и в виде

$$Y_{km}(\mu, \varphi) = \begin{cases} P_{km}(\mu)\cos m\varphi, m = 0,1,\ldots,k, \\ P_{k|m|}(\mu)\sin|m|\varphi, m = -1,-2,\ldots,-k; k = 0,1,\ldots \end{cases} \quad (2.8)$$

Линейные комбинации сферических функций Y_{km} порядка k:

$$Y_k(\vec{v}) = \sum_{m=-k}^{k} a_{km} Y_{km}(\vec{v})$$

с произвольными коэффициентами a_{km} также являются сферическими функциями порядка k.

Сферические функции $\{Y_{km}\}$ образуют полную и ортогональную систему в пространстве $L^2(\Omega)$, причем они могут быть нормированы по k и m:

$$\int_{\Omega} Y^*_{km}(\vec{v}) Y_{k'm'}(\vec{v}) d\Omega = \delta_{kk'}\delta_{mm'}, \quad (2.9)$$

где знак * означает комплексное сопряжение.

Сферические функции Y_{km}, определяемые по формулам (2.6) удовлетворяют равенствам

$$P_k(\vec{v}.\vec{w}) = \frac{4\pi}{2k+1}\sum_{m=-k}^{k} Y^*_{km}(\vec{v}) Y_{km}(\vec{w}) =$$

$$= \frac{4\pi}{2k+1}\sum_{m=-k}^{k} Y_{km}(\vec{v}) Y^*_{km}(\vec{w}), \ k = o,1,2,\ldots \quad (2.10)$$

Равенства (2.10) называются теоремой сложения $[5]$. Здесь $\vec{v}, \vec{w}$ – два произвольных единичных вектора из Ω.

В дальнейших наших исследованиях нам будут необходимы соотношения

$$\mu P_k(\mu) = \frac{1}{2k+1}\left[(k+1)P_{k+1}(\mu) + kP_{k-1}(\mu)\right], k = 0,1,2,\ldots, \quad (2.11)$$

которые можно доказать с помощью равенств (2.1) – (2.4) .

2. Вывод уравнений метода сферических гармоник. Решение интегро-дифференциального уравнения (1.8) будем искать в виде ряда по сферическим гармоникам (2.6)

$$\Phi(t,\vec{r},\vec{v})=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left(\frac{2k+1}{4\pi}\right)^{1/2}\Phi_{km}(t,\vec{r})\mathrm{Y}_{km}(\vec{v}) \quad .(3.1$$

Функцию $g(t,\vec{r},\vec{v}'.\vec{v})$ можно разложить по полиномам Лежандра (2.10)

$$g(t,\vec{r},\vec{v}'.\vec{v}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}g_k(t,\vec{r})\mathrm{P}_k(\vec{v}'.\vec{v})$$

или в силу (2.10)

$$g(t,\vec{r},\vec{v}'.\vec{v}) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} g_k(t,\vec{r})\mathrm{Y}^*_{km}(\vec{v})\mathrm{Y}_{km}(\vec{v}) \quad . \qquad (3.3)$$

Подставив разложения (3.1) – (3.3) в уравнение (4.8) , умножив результат на $\mathrm{Y}^*_{km}(\vec{v})$ и проинтегрировав по $d\Omega$, приходим к бесконечной системе дифференциальных уравнений с частными производными относительно неизвестных функций $\Phi_{km}(t,\vec{r})$.

Чтобы урезать эту систему, достаточно предположить, что производные функций $\Phi_{km}(t,\vec{r})$ обращаются в нуль при $k=L+1$.

Это называется P_L – приближением.Оно приводит к системе $(L+1)^2$ дифференциальных уравнений для $(L+1)^2$ неизвестных $\Phi_{00},\Phi_{01},\Phi_{02},\ldots,\Phi_{LL}$.

Аналогично, решение интегро-дифференциального уравнения переноса (1.13) будем искать в виде ряда по сферическим гармоникам (2.6):

$$\psi(t,\vec{r},\vec{v})=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left(\frac{2k+1}{4\pi}\right)^{1/2}\psi_{km}(t,\vec{r})\mathrm{Y}_{km}(\vec{v}) \quad .(3.4)$$

Умножив обе части равенств (3.1) , (3.4) на $\mathrm{Y}^*_{kj}(\vec{v})d\Omega$ и проинтегрировав по Ω, а также учитывая соотношения (2.9), получим выражения для коэффициентов $\Phi_{km}(t,\vec{r})$ и $\psi_{km}(t,\vec{r})$:

$$\Phi_{km}(t,\vec{r})=\left(\frac{4\pi}{2k+1}\right)^{1/2}\int_{\Omega}\Phi(t,\vec{r},\vec{v})\mathrm{Y}^*_{km}(\vec{v})d\Omega, \quad (3.5)$$

$$\psi_{km}(t,\vec{r})=\left(\frac{4\pi}{2k+1}\right)^{1/2}\int_{\Omega}\psi(t,\vec{r},\vec{v})\mathrm{Y}^*_{km}(\vec{v})d\Omega \quad (3.6)$$

Рассуждая так же, как и выше, мы получим $\mathrm{P}_L -$приближение и систему $2(L+1)^2$ дифференциальных уравнений для $2(L+1)^2$ неизвестных:

$\psi_{00}, \psi_{01}, \psi_{02}, \dots, \psi_{LL}; \Phi_{00}, \Phi_{01}, \Phi_{02}, \dots, \Phi_{LL}$.

В общем случае полученные таким образом уравнения весьма сложны. Но если есть какая либо симметрия (например, плоская, сферическая, цилиндрическая), разложения функций ψ и Φ принимают более простой вид , и соответствующие уравнения метода сферических гармоник значительно упрощаются. Так в случае плоской симметрии в $\mathrm{P}_L -$приближении система, рассматриваемая в следующем пункте состоит из $2(L+1)$, а не $2(L+1)^2$ совместных дифференциальных уравнений с частными производными.

4. Уравнения метода сферических гармоник в плоской геометрии. Предположим, что функции $\psi(t,\vec{r},\vec{v})$ и $\Phi(t,\vec{r},\vec{v})$ зависят лишь от координат t, z и величины $\mu = \vec{v}.\hat{z}$, где $\vec{v} \in \Omega -$по-прежнему единичный вектор скорости, а $\hat{z} -$единичный вектор оси OZ. В дальнейшем всюду, ради удобства записи, переменную z будем обозначать через x, а вместо коэффициента β будем писать α . Тогда из (3.1) и (3.4) получим

$$\Phi(t,x,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^{k} \Phi_k(t,x) \mathrm{Y}_{km}^*(\hat{x}) \mathrm{Y}_{km}(\vec{v})$$

или

$$\Phi(t,x,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \Phi_k(t,x) \mathrm{P}_k(\mu), \tag{4.1}$$

$$\psi(t,x,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^{k} \psi_k(t,x) \mathrm{Y}_{km}^*(\hat{x}) \mathrm{Y}_{km}(\vec{v})$$

или

$$\psi(t,x,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \psi_k(t,x) \mathrm{P}_k(\mu), \tag{4.2}$$

Уравнения (1.8) и (1.13) здесь принимают вид :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\sigma\Phi(t,x,\mu)+\alpha\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+$$
$$+\frac{c}{2}\int_{-1}^{1} g(t,x,\vec{v}'.\vec{v})\Phi(t,x,\mu')d\Omega'=0\ , \quad \textbf{(4.3)}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}+\sigma\psi(t,x,\mu)-\alpha\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}= \qquad (4.4)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\gamma_i}\Phi(t,x_i,\mu_i)\delta(x-x_i)\delta(\mu-\mu_i)+\frac{c}{2}\int_{-1}^{1} g(t,x,\vec{v}'.\vec{v})\Phi(t,x,\mu')d\Omega'$$

<u>Краевые условия (1.2) – (1.5) и (1.9) – (1.12) в этом случае принимают вид</u>

$$\psi(t,x,\mu)\big|_{t\le 0}=\psi_0(x,\mu)\ , \qquad (4.5)$$
$$\psi(t,-a,\mu)=0 \quad \text{при} \quad 0<\mu\le 1$$
$$\psi(t,+a,\mu)=0 \quad \text{при} \quad -1\le\mu<0 \qquad (4.6)$$
$$\Phi(T,x,\mu)=-2\left[\psi(T,x,\mu)-\psi_1(x,\mu)\right]\ , \qquad (4.7)$$
$$\Phi(t,-a,\mu)=0 \quad \text{при} \quad -1\le\mu<0$$
$$\Phi(t,+a,\mu)=0 \quad \text{при} \quad 0<\mu\le 1 \qquad (4.8)$$

В формулах (4.6) и (4.8) число $a=const>0$ равно половине толщины плоской пластины, начало координат помещено в центре этой пластины. А в формулах (4.5) и (4.7) указаны начальное и “конечное” условия для неизвестных $\psi(t,x,\mu)$ и $\Phi(t,x,\mu)$, соответственно.

Формулы (3.2) и (3.3) в этом случае принимают вид

$$g(t,x,\vec{v}'.\vec{v})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}g(t,x)\mathrm{P}_k(\vec{v}'.\vec{v})$$

или

$$g(t,x,\vec{v}'.\vec{v})=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} g_k(t,x)\mathrm{Y}^*_{km}(\vec{v}')\mathrm{Y}_{km}(\vec{v}) \quad (4.9)$$

Подставив теперь разложения (4.1) и (4.9) в интегральный член уравнения (4.3) (обозначим его через J), получим [6]:

$$J=\frac{c}{2}\sum_{,k,k'=0}^{\infty} g_k(t,x)\Phi_{k'}(t,x)\int_{-1}^{1}\sum_{m=-k}^{k}\sum_{m'=-k'}^{k'}\mathrm{Y}_{km}(\vec{v})\mathrm{Y}^{*}_{k'm'}(\hat{x})\mathrm{Y}_{k'm'}(\vec{v}')\mathrm{Y}^{*}_{km}(\vec{v})d\Omega'$$

или

$$J=\frac{c}{2}\sum_{,k=0}^{\infty} g_k(t,x)\Phi_k(t,x)\sum_{m=-k}^{k}\mathrm{Y}_{km}(\vec{v})\mathrm{Y}^{*}_{km}(\vec{x}) \qquad (4.10)$$

Здесь при интегрировании мы воспользовались соотношением ортогональности (2.9) . Применив еще раз теорему сложения, получим

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}J_k\mathrm{P}_k(\mu)\ , \quad (4.11)$$

где

$$J_k=\frac{c}{2}g_k(t,x)\Phi_k(t,x) \quad (4.12)$$

Подставим теперь разложения функций Φ и J из (4.1) , (4.11) в уравнение
(4.3) . В результате получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}\mathrm{P}_k(\mu)\left[\frac{\partial\Phi_k(t,x)}{\partial t}+\mu\frac{\partial\Phi_k(t,x)}{\partial x}-\sigma\Phi_k(t,x)+\right.$$

$$\left.+\alpha\frac{\partial^2\Phi_k(t,x)}{\partial x^2}+\frac{c}{2}g_k(t,x)\Phi_k(t,x)\ \right]=0 \quad (4.13)$$

В силу (2.11) уравнение (4.13) можно переписать в виде

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+1)\mathrm{P}_{k+1}(\mu)\frac{\partial\Phi_k(t,x)}{\partial x}+k\mathrm{P}_{k-1}(\mu)\frac{\partial\Phi_k(t,x)}{\partial x}\right]+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}\left[\frac{\partial\Phi_k(t,x)}{\partial t}-\sigma\Phi_k(t,x)+\alpha\frac{\partial^2\Phi_k(t,x)}{\partial x^2}+\frac{c}{2}g_k(t,x)\Phi_k(t,x)\right]=0$$

Умножим это уравнение на $\mathrm{P}_j(\mu)$ и проинтегрируем по $d\Omega=2\pi d\mu$. В силу (2.3) получим

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} + \frac{k}{2k+1}\frac{\partial \Phi_{k-1}}{\partial x} + \frac{k+1}{2k+1}\frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial xx} + \alpha \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} +$$

$$+\left[\frac{c}{2} g_k(t,x) - \sigma\right]\Phi_k(t,x) = 0, \; k = 0,1,2,... \qquad (4.14)$$

Система (4.14) является бесконечной последовательностью уравнений относительно $\Phi_k(t,x)$, причем уравнение для $\Phi_k(t,x)$ связано с уравнениями для $\Phi_{k-1}(t,x)$ и $\Phi_{k+1}(t,x)$. Для того, чтобы оборвать эту последовательность, достаточно предположить , что

$$\frac{\partial \Phi_{L+1}(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_{L+1}(t,x)}{\partial x} = 0,$$

где $L-$некоторое конкретное значение k.

Получающаяся таким образом система уравнений называется P_L $-$приближением:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} + \dfrac{k}{2k+1}\dfrac{\partial \Phi_{k-1}}{\partial x} + \dfrac{k+1}{2k+1}\dfrac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial x} + \\ +\left[\dfrac{c}{2} g_k(t,x) - \sigma\right]\Phi_k(t,x) = 0, k = 0,1,2,...,L-1, \\ \dfrac{\partial \Phi_L}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial^2 \Phi_L}{\partial x^2} + \dfrac{L}{2L+1}\dfrac{\partial \Phi_{L-1}}{\partial x} + \left[\dfrac{c}{2} g_L(t,x) - \sigma\right]\Phi_L(t,x) = 0 \end{cases}$$

(4.15)

При $L = 1$, то есть, в P_1 $-$приближении здесь получим всего два связанных уравнения для $\Phi_0(t,x)$, $\Phi_1(t,x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \left[\dfrac{c}{2} g_0(t,x) - \sigma\right]\Phi_0(t,x) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial x} + \left[\dfrac{c}{2} g_1(t,x) - \sigma\right]\Phi_1(t,x) = 0. \end{cases} \qquad (4.16)$$

Рассматривая P_3 − приближение, получим следующие четыре уравнения Метода сферических гармоник в плоской геометрии относительно незвестных функций $\Phi_0(t,x),\Phi_1(t,x),\Phi_2(t,x),\Phi_3(t,x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial t}+\alpha\dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}+\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x}+\left[\dfrac{c}{2}g_0(t,x)-\sigma\right]\Phi_0(t,x)=0, \\ \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial t}+\alpha\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}+\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial x}+\dfrac{2}{3}\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x}+\left[\dfrac{c}{2}g_1(t,x)-\sigma\right]\Phi_1(t,x)=0, \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial t}+\alpha\dfrac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2}+\dfrac{2}{5}\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x}+\dfrac{3}{5}\dfrac{\partial \Phi_3}{\partial x}+\left[\dfrac{c}{2}g_2(t,x)-\sigma\right]\Phi_2(t,x)=0, \\ \dfrac{\partial \Phi_3}{\partial t}+\alpha\dfrac{\partial^2\Phi_3}{\partial x^2}+\dfrac{3}{7}\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x}+\left[\dfrac{c}{2}g_3(t,x)-\sigma\right]\Phi_3(t,x)=0. \end{cases}$$

(4.17)

С целью получения краевых условий для уравнений (4.16) или (4.17) , по аналогии с равенствами (4.1), разложим по сферическим гармоникам функцию $\psi_1(x,\mu)$, входящую в конечное условие (4.7) . В результате получим

$$\psi_1(x,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}\psi_{1k}(x)\mathrm{P}_k(\mu) . \qquad (4.18)$$

Здесь $\mathrm{P}_k(\mu)$ − полиномы Лежандра, определяемые по формулам (2.1), и удовлетворяющие условиям ортогональности (2.3). Отсюда получаем

$$\psi_{1k}(x)=2\pi\int_{-1}^{1}\psi_1(x,\mu)\mathrm{P}_k(\mu)d\mu \ , \quad k=0,1,2,... \qquad (4.19)$$

Аналогично из (4.1) , (4.2) и (2.3) будем иметь

$$\Phi_k(t,x)=2\pi\int_{-1}^{1}\Phi(t,x,\mu)\mathrm{P}_k(\mu)d\mu \ , \quad k=0,1,2,... \qquad (4.20)$$

$$\psi_k(t,x)=2\pi\int_{-1}^{1}\psi(t,x,\mu)\mathrm{P}_k(\mu)d\mu \ , \quad k=0,1,2,... \qquad (4.21)$$

Теперь очевидно, что “конечное” условие (4.7) превратится в условия :

$$\Phi_k(T,x)=-2\left[\psi_k(T,x)-\psi_{1k}(x)\right], \ k=0,1,2,... \qquad (4.22)$$

Аналогичными рассуждениями начальное условие (4.5) можно превратить в условия вида :

$$\psi_k(t,x)\big|_{t\le 0}=\psi_{0k}(x)\ ,\ k=0,1,2,... \qquad (4.23)$$

где

$$\psi_{0k}(x)=2\pi\int_{-1}^{1}\psi_0(x,\mu)\mathrm{P}_k(\mu)d\mu\ ,\ k=0,1,2,... \qquad (4.24)$$

С целью нахождения граничных условий, соответствующих условиям (1.5) , (1.12) (или (4.6),(4.8)), воспользуемся равенствами (4.20) , (4.21) . В результате получим

$$\psi_k(t,-a)=2\pi\left\{\int_{-1}^{0}\psi(t,-a,\mu)\mathrm{P}_k(\mu)d\mu+\int_{0}^{1}\psi(t,-a,\mu)\mathrm{P}_k(\mu)d\mu\right\}=$$

$$=2\pi\int_{-1}^{0}\psi\ (t,-a,\mu)\mathrm{P}_k(\mu)d\mu\ . \qquad (4.25)$$

$$\Phi_k(t,-a)=2\pi\left\{\int_{-1}^{0}\Phi(t,-a,\mu)\mathrm{P}_k(\mu)d\mu+\int_{0}^{1}\Phi(t,-a,\mu)\mathrm{P}_k(\mu)d\mu\right\}=$$

$$=2\pi\int_{0}^{1}\Phi(t,-a,\mu)\mathrm{P}_k(\mu)d\mu\ . \qquad (4.26)$$

Из тех же соотношений при $x=+a$ получим выражения для $\psi_k(t,+a),\Phi_k(t,+a)$:

$$\psi_k(t,+a)=2\pi\int_{0}^{1}\psi\ (t,+a,\mu)\mathrm{P}_k(\mu)d\mu\ , \qquad (4.27)$$

$$\Phi_k(t,+a)=2\pi\int_{-1}^{0}\Phi(t,+a,\mu)\mathrm{P}_k(\mu)d\mu\ . \qquad (4.28)$$

Система уравнений (4.15) или в частности системы (4.16) (либо (4.17) должны быть решены при краевых условиях (4.22) , (4.26) , (4.28).

Теперь выведем уравнения метода сферических гармоник для интегро-дифференциального уравнения переноса (4.4). С этой целью разложим $\delta(\mu-\mu_i)$ в ряд по полиномам Лежандра (2.1) :

$$\delta(\mu-\mu_i)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}\delta_k^i \mathrm{P}_k(\mu)\ , \qquad (4.29)$$

где δ_k^i – коэффициенты разложения, пока неизвесты. Для их нахождения, умножим обе части этого равенства на $\mathrm{P}_j(\mu)$ и проинтегрируем по $d\Omega=2\pi d\mu$. В результате, в силу (2.3) , (2.4) , получим

$$2\pi\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_j(\mu)\delta(\mu-\mu_i)d\mu=2\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}\delta_k^i\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_k(\mu)\mathrm{P}_j(\mu)d\mu=$$

$$=2\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}\delta_k^i\frac{2}{2k+1}\delta_{jk}=\delta_j^i,j=0,1,2,...$$

или

$$\delta_k^i=2\pi\mathrm{P}_k(\mu_i),i=1,2,...,n;k=0,1,2,... \qquad (4.30)$$

Из (4.29) и (4.33) имеем

$$\delta(\mu-\mu_i)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{2}\mathrm{P}_k(\mu_i)\mathrm{P}_k(\mu)\ ,\ i=1,2,...,n. \qquad (4.31)$$

Подставив это и (4.2) в уравнение (4.4), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}\mathrm{P}_k(\mu)\left\{\frac{\partial\psi_k}{\partial t}+\mu\frac{\partial\psi_k}{\partial x}+\left[\sigma-\frac{c}{2}g_k(t,x)\right]\psi_k(t,x)-\alpha\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x^2}-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\gamma_i}\delta(x-x_i)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2j+1}{2}\Phi_j(t,x_i)\mathrm{P}_j(\mu_i)\mathrm{P}_k(\mu_i)\ \right\}=0\,. \qquad (4.32)$$

Вводя обозначения

$$\mathrm{A}_{ijk}=\frac{2j+1}{4\gamma_i}\mathrm{P}_j(\mu_i)\mathrm{P}_k(\mu_i),i=1,2,...,n;k=0,1,2,... \qquad (4.33)$$

из (4.32) будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}\mathrm{P}_k(\mu)\left\{\frac{\partial\psi_k}{\partial t}+\mu\frac{\partial\psi_k}{\partial x}+\left[\alpha-\frac{c}{2}g_k(t,x)\right]\psi_k(t,x)-\right.$$

$$\left.-\alpha\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x^2}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{A}_{ijk}\Phi_j(t,x_i)\delta(x-x_i)\ \right\}=0$$

В силу тождеств (2.11) это уравнение можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}\left\{\frac{\partial\psi_k}{\partial t}\mathrm{P}_k(\mu)+\frac{1}{2k+1}\frac{\partial\psi_k}{\partial x}\left[(k+1)\mathrm{P}_{k+1}(\mu)+k\,\mathrm{P}_{k-1}(\mu)\right]+\right.$$

$$+\left[\sigma-\frac{c}{2}g_k(t,x)\right]\psi_k(t,x)\mathrm{P}_k(\mu)-\alpha\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x^2}\mathrm{P}_k(\mu)-$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{A}_{ijk}\Phi_j(t,x_i)\delta(x-x_i)\mathrm{P}_k(\mu)\right\}=0.$$

Умножим это уравнение на $\mathrm{P}_m(\mu)$ и проинтегрируем по $d\Omega=2\pi d\mu$.В силу (2.3) , (2.4) будем иметь

$$\frac{\partial\psi_k}{\partial t}+\frac{1}{2k+1}\left[k\frac{\partial\psi_{k-1}}{\partial x}+(k+1)\frac{\partial\psi_{k+1}}{\partial x}\right]+$$

$$+\left[\alpha-\frac{c}{2}g_k(t,x)\right]\psi_k(t,x)-\alpha\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x^2}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{A}_{ijk}\Phi_j(t,x_i)\delta(x-x_i),\ k=0,1,2,... \tag{4.34}$$

Мы здесь также получили бесконечную последовательность уравнений, но теперь уже относительно неизвестных $\psi_k(t,x)$. Здесь также как и выше уравнение для $\psi_k(t,x)$ связано с уравнениями для $\psi_{k-1}(t,x)$ и $\psi_{k+1}(t,x)$. Вдобавок здесь имеются еще и $\Phi_j(t,x_i),\ j=0,1,2,...,$ значения которых должны были быть найдены из системы (4.15) и соответствующих им краевых условий (4.22),(4.26), (4.28). Оборвем эту последовательность, предположив, что

$$\frac{\partial\psi_{L+1}(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial\psi_{L+1}(t,x)}{\partial x}=0,\Phi_{L+1}(t,x_i)=0,i=1,2,...,n,$$

где число $L-$ то же, что и в (4.16).

Таким образом и для фукций $\psi_k(t,x)$ получается система уравнений в P_L- приближении :

$$\frac{\partial\psi_k}{\partial t}+\frac{1}{2k+1}\left[k\frac{\partial\psi_{k-1}}{\partial x}+(k+1)\frac{\partial\psi_{k+1}}{\partial x}\right]+$$

$$+\left[\alpha-\frac{c}{2}g_k(t,x)\right]\psi_k(t,x)-\alpha\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x^2}= \qquad (4.35)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{L}\mathrm{A}_{ijk}\Phi_j(t,x_i)\delta(x-x_i),$$

$$k=0,1,2,...,L-1;$$

$$\frac{\partial\psi_L}{\partial t}+\frac{L}{2L+1}\frac{\partial\psi_{L-1}}{\partial x}+\left[\sigma-\frac{c}{2}g_L(t,x)\right]\psi_L(t,x)-\alpha\frac{\partial^2\psi_L}{\partial x^2}= \qquad (4.36)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{L}\mathrm{A}_{ijL}\Phi_j(t,x_i)\delta(x-x_i)$$

При $L=1$, то есть в P_1- приближении система (4.35), (4.36) примет вид

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\left[\sigma-\frac{c}{2}g_0(t,x)\right]\psi_0(t,x)= \qquad (4.37)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{1}\mathrm{A}_{ij0}\Phi_j(t,x_i)\delta(x-x_i)$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+\left[\sigma-\frac{c}{2}g_1(t,x)\right]\psi_1(t,x)= \qquad (4.38)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{1}\mathrm{A}_{ij1}\Phi_j(t,x_i)\delta(x-x_i)$$

В P_3-приближении получим четыре уравнения вида :

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\left[\sigma-\frac{c}{2}g_0(t,x)\right]\psi_0(t,x)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{3}\mathrm{A}_{ij0}\Phi_j(t,x_i)\delta(x-x_i)$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+\frac{2}{3}\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\left[\sigma-\frac{c}{2}g_1(t,x)\right]\psi_1(t,x)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{3}\mathrm{A}_{ij1}\Phi_j(t,x_i)\delta(x-x_i)$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{2}{5}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{3}{7}\frac{\partial\psi_3}{\partial x}+\left[\sigma-\frac{c}{2}g_2(t,x)\right]\psi_2(t,x)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{3}\mathrm{A}_{ij2}\Phi_j(t,x_i)\delta(x-x_i)$$

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2}+\frac{3}{7}\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\left[\sigma-\frac{c}{2}g_3(t,x)\right]\psi_3(t,x)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{3}\mathrm{A}_{ij3}\Phi_j(t,x_i)\delta(x-x_i) \qquad (4.39)$$

Таким образом в P_3-приближении необходимо решать вместе четыре уравнения (4.39) и четыре уравнения (4.17). К этой системе восьми уравнений с восемью неизвестными

$$\psi_0(t,x),...,\psi_3(t,x);\Phi_0(t,x),...,\Phi_3(t,x)$$

надо присоединить начальные условия (4.23) , (4.24) и “конечные” условия (4.22) при $k=0,1,2,3$ и граничные условия (4.25) – (4.28) при тех же значениях индекса k.

Ввиду громоздкости этих и предыдущих соотношений, мы в следующем пункте подробнее рассмотрим только лишь P_1- приближение.

С целью нахождения граничных условий, соответствующих условиям (1.3), (1.10) на нижнем основании Γ_0 области $G(x=-a)$ и (1.4) , (1.11) на верхнем основании Γ_1 этой области $(x=+a)$, разложим в ряды по сферическим гармоникам функции $\psi,\frac{\partial\psi}{\partial x}$ и $\Phi,\frac{\partial\Phi}{\partial x}$,участвующие в вышеназванных условиях.

В результате получим следующие соотношения :

$$\left(\frac{\partial\psi_k(t,x)}{\partial x}-\lambda\psi_k(t,x)\right)_{x=-a}=0, \qquad (4.40)$$

$$\frac{\partial \psi_k(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=+a} = 0, k = 0,1,2,... \tag{4.41}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_k(t,x)}{\partial x} - \lambda \Phi_k(t,x) \right)_{x=-a} = 0, \tag{4.42}$$

$$\frac{\partial \Phi_k(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=+a} = 0, k = 0,1,2,... \tag{4.43}$$

5. P_1 – Метод сферических гармоник в плоской геометрии. Для простоты изложения рассмотрим случай, когда в вышеприведенных уравнениях

$g_0(t,x) = g_1(t,x) = \dfrac{2\sigma}{c}$ для всех точек $(t,x) \in [0T]X[-a;a]$.

В этом случае система (4.16) принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \alpha \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \dfrac{1}{3} \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

К этой системе необходимо присоединить условия (4.22) и (4.27) , (4.28) при $k = 0,1$. Система уравнений (4.37) , (4.38) запишется следующим образом :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_0}{\partial t} - \alpha \dfrac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=0}^{1} A_{ij0} \Phi_j(t,x_i) \delta(x - x_i), \\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial t} - \alpha \dfrac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \dfrac{1}{3} \dfrac{\partial \psi_0}{\partial x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=0}^{1} A_{ij1} \Phi_j(t,x_i) \delta(x - x_i) \end{cases} \tag{5.2}$$

Здесь коэффициенты A_{ijk} определяются по формулам (4.33) .

К системам (5.1) , (5.2) необходимо присоединить начальные и “конечные” условия (см . (4.22) , (4.23)) :

$$\begin{cases} \psi_k(t,x)\big|_{t\le 0} = \psi_{0k}(x), \\ \Phi_k(T,x) = -2[\psi_k(T,x) - \psi_{1k}(x)], \end{cases} \qquad k = 0,1. \tag{5.3}$$

Здесь $\psi_{0k}(x), \psi_{1k}(x)$ $(k = 0,1)$ - известные функции, определяемые равенствами (4.24) , (4.19) . Еще имеются граничные условия (4.25) – (4.28), (4.40) – (4.43) , из которых имеем

$$\begin{aligned} &\frac{\psi_k(t,-a)}{\partial x} - \lambda\psi_k(t,-a) = 0 \\ &\frac{\partial\Phi_k(t,-a)}{\partial x} - \lambda\Phi_k(t,-a) = 0 \end{aligned} \qquad k = 0,1. \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\psi_k(t,+a)}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial\Phi_k(t,+a)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \qquad k = 0,1. \tag{5.5}$$

Можно показать, что количество дополнительных условий (5.3) – (5.5) для систем (5.1) и (5.2) равно 12 . Общее решение этих систем относительно неизвестных функций $\Phi_0(t,x), \Phi_1(t,x), \psi_0(t,x), \psi_1(t,x)$ содержит также 12 произвольных постоянных (или функций), которые могут быть определены из вышеназванных условий .

Задачу (5.2) удобно привести к эквивалентной форме без $\delta -$ функций $[7]$. Для этого в предположении, что

$$-a \,\pi\, x_1 \,\pi\, x_2 \,\pi \ldots \pi\, x_n \,\pi +a, x_i - x_{i-1} = \frac{2a}{n+1}, i = 2,3,\ldots,n$$

проинтегрируем обе части каждого из уравнений системы (5.2) в точках $x = x_i (i = 1,2,\ldots,n)$:

$$\int_{x_i-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} \left(\frac{\partial\psi_0}{\partial t} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)dx = \alpha\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\bigg|_{x_i+\varepsilon/2} - \frac{\partial\psi_0}{\partial x}\bigg|_{x-\varepsilon/2}\right) + \sum_{j=0}^{1} \mathrm{A}_{ij0}\Phi_j(t,x_i)$$

,

$$\int_{x_i-\varepsilon/2}^{x_i+\varepsilon/2}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+\frac{1}{3}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\right)dx=\alpha\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\Big|_{x_i+\varepsilon/2}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\Big|_{x_i-\varepsilon/2}\right)+\sum_{j=0}^{1}\mathrm{A}_{ij1}\Phi_j(t,x_i)$$

.

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем важные соотношения :

$$\alpha\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\Big|_{x_i+}-\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\Big|_{x_i-}\right)+\sum_{j=0}^{1}\mathrm{A}_{ij0}\Phi_j(t,x_i)=0,$$

(5.6.i)

$$\alpha\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\Big|_{x_i+}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\Big|_{x_i-}\right)+\sum_{j=0}^{1}\mathrm{A}_{ij1}\Phi_j(t,x_i)=0,$$

Теперь будем рассматривать $n+1$ областей :

$$[0;T]X[-a;x_1],[0;T]X[x_1;x_2],...,[0;T]X[x_{n-1};x_n],[0;T]X[x\ ;a],$$

а решения задачи (5.6.i) в этих областях будем обозначать

$$\{(\psi_{01-};\psi_{11-}),(\psi_{01+};\psi_{11+})\},\{(\psi_{02-};\psi_{12-}),(\psi_{02+};\psi_{12+})\},...,\{(\psi_{0n-};\psi_{1n-}),(\psi_{0n+};\psi_{1n+})\}$$

соответственно, то есть будем рассматривать задачи

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi_{0i-}}{\partial t}+\dfrac{\partial\psi_{1i-}}{\partial x}-\alpha\dfrac{\partial^2\psi_{0i-}}{\partial x^2}=0\\[2mm] \dfrac{\partial\psi_{1i-}}{\partial t}+\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial\psi_{0i-}}{\partial x}-\alpha\dfrac{\partial^2\psi_{1i-}}{\partial x^2}=0,i=1,2,...,n\end{cases}\qquad(5.7.\text{i})$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi_{0i+}}{\partial t}+\dfrac{\partial\psi_{1i+}}{\partial x}-\alpha\dfrac{\partial^2\psi_{0i+}}{\partial x^2}=0\\[2mm] \dfrac{\partial\psi_{1i+}}{\partial t}+\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial\psi_{0i+}}{\partial x}-\alpha\dfrac{\partial^2\psi_{1i+}}{\partial x^2}=0,i=1,2,...,n\end{cases}\qquad(5.8.\text{i})$$

Здесь решение $(\psi_{01-};\psi_{11-})$ системы (5.7.1) должно удовлетворять следующим условиям (см. (4.23) , (5.4) и (5.5)) :

$$\psi_k(t,x)\big|_{t\le 0}=\psi_{0k}(x),\quad -a\le x\ \pi\ x_1,\qquad(5.9)$$

$$\frac{\partial\psi_k(t,-a)}{\partial x}=\lambda\psi_k(t,-a),\ \ k=0,1,\ \ t\in[0;T],$$

а решение $(\psi_{01+};\psi_{11+})$ системы $(5.8.n)-$ условиям

$$\psi_k(t,x)\big|_{t\le 0}=\psi_{0k}(x),\quad x_n\le x\le a,$$

$$\frac{\partial\psi_k(t,+a)}{\partial x}=0,\;\; k=0,1,\;\; t\in[0;T]. \qquad (5.10)$$

Связь решений задач $(5.7.i),(5.8.i),(5.9)$ и (5.10) осуществляется с помощью
соотношений (см . $(5.6.i)$)

$$\alpha\left(\frac{\partial\psi_{0i+}}{\partial x}-\frac{\partial\psi_{0i-}}{\partial x}\right)+\sum_{j=0}^{1}\mathrm{A}_{ij0}\Phi_j(t,x_i)=0\ ,$$

$$\alpha\left(\frac{\partial\psi_{1i+}}{\partial x}-\frac{\partial\psi_{1i-}}{\partial x}\right)+\sum_{j=0}^{1}\mathrm{A}_{ij1}\Phi_j(t,x_i)=0 \qquad (5.11)$$

при $x=x_i(i=1,2,...,n).$

Предполагая решение задачи непрерывным по x во всех точках $[-a;a]$, включая $x=x_i(i=1,2,...,n),$ приходим к условиям

$$\psi_{0i+}=\psi_{0i-};\psi_{1I+}=\psi_{1i-} \text{ при } x=x_i(i=1,2,...,n). \qquad (5.12)$$

Таким образом, функции $u_i(t),(i=1,2,...,n)$ оптимального управления в поставленной задаче минимизации загрязнений атмосферы частицами вредных примесей, где критерием качества служит интегральный квадратичный функционал (1.6) , определяются по формулам (1.7) . Функции $\Phi(t,\vec{r}_i,\vec{v}_i),(i=1,2,...,n),$ входящие в эти формулы находятся в результате решения задач (1.8) – (1.12) и (1.1) – (1.5) . Методом сферических гармоник $[4,5,6]$ эти задачи сводятся к бесконечной последовательности дифференциальных уравнений с частными производными со специальными краевыми условиями. Путем урезания $[4,6]$ эта система сводится к P_L- проблеме (4.15),(4.35),(4.36) , которую можно решить приближенно $[8]$, применив какую – либо разностную схему.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Егоров, Р. Рафатов, Математические методы оптимизации процессов теплопроводности и диффузии (Изд. Илим, Бишкек, 1990), стр. 231.

2. Р. Рафатов, Вестник КГНУ, Труды Международной научной конференции “ Проблемы математики и информатики в XXI веке”. Сер. 3. Естественно-технические науки. Вып. 4 . 2000, стр. 212.

3. Р. Рафатов, Кыргыз-Турк Манас Университети, Табигий илимдер журналы, Бишкек, 2001, стр.106 .

4. У. Султангазин, Вестник КГНУ. ”. Сер. 3. Естественно-технические науки. Вып. 5. 2001 , стр. 15.

5. В. Владимиров, Уравнения математической физики (Изд. Наука, Москва, 1967), стр. 350.

6. К. Кейз, П. Цвайфель, Линейная теория переноса (Изд. Мир, Москва, 1972), стр. 231.

7. Г. Марчук, Математическое моделирование в проблеме окружающей среды (Изд. Наука, Москва, 1982), стр. 29.

8. А. Самарский, Введение в теорию разностных схем (Изд. Наука, Москва, 1971), стр. 356.