ЧИСЛЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Доц. др. Асан ОМУРАЛИЕВ

Кыргызско-Турецкий университет «Манас», инженерный факультет

Статья посвящена численному решению сингулярно возмущенной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения методом, основанным на синтезе метода регулязации С.А.Ломова [1] и метода прямых [2], когда пограничный слой возникает на обеих концах.

В настоящее время существуют достаточное количество численных методов решения жестких задач [3] - [9]. К классу жестких задач относятся и сингулярно возмущенные задачи, численным решениям которых посвящены [2], [3], [4], [5], [9] и другие. Во всех указанных работах по численному решению сингулярно возмущенных задач при дискретизации исходной задачи используется так называемый параметр подгонки [2], он содержит нерегулярную зависимость от малого параметра, которая входит туда в виде экспоненциальной функции. Эти методы позволяют построить решения точностью порядка h или h^2.

Анализ работ по численным алгоритмам решения жестких задач показывает, что построенные алгоритмы устойчивы, если получаемое решение содержит экспоненциальную функцию типа пограничного слоя. Функция типа пограничного слоя может входить в решение задачи как линейным, так и нелинейным образом. Данная работа является продолжением работы [8] и обобщает результаты на сингулярно возмущенную краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, когда пограничный слой возникает на обоих концах отрезка. Здесь функция пограничного слоя входит в решение линейным образом. Результаты работы анонсированы в [7]. Идея применяемого метода заключается в следующем: сначала методом Ломова исходная задача расширяется в пространство большой размерности, полученное при этом расширенное уравнение является уравнением с частными производными, но с постоянными коэффициентами и регулярным по малому параметру, когда малый параметр стремится к нулю. Следует отметить, что в полученном уравнении сохраняется структура исходного уравнения, поэтому построенное решение соответствует структуре фундаментального решения исходного уравнения. Построенное нами решение имеет точность $O(\varepsilon h+\varepsilon^2)$ в первом и $O(\varepsilon h)$во втором подходе.

Рассмотрим

$$Lu\equiv\varepsilon^2 u^{''}(x,\varepsilon) - a(x)\, u(x,\varepsilon) = f(x) \quad \forall x\in(0,1],$$

$$u|_{x=0}=h_1,\ \ u|_{x=1}=h_2, \qquad (1)$$

при следующих предположениях:

1. функции $a(x), f(x) \in C^2[0,1]$
2. $a(x)>0\ \forall x\in[0,1]$.

Наряду с независимой переменной x введем в рассмотрение дополнительное независимое переменное по формуле

$$t_j=\varphi_j(x)/\varepsilon=(-1)^{j-1}\frac{1}{\varepsilon}\int_{j-1}^{x}\sqrt{a(s)}ds,\ j=1,2 \qquad (2)$$

и вместо искомой функции $u(x,\varepsilon)$,будем изучать расширенную функцию $\tilde{u}$ (x,t,ε), $(t=(t_1,t_2))$ такую, что

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)|_{t=\varphi(x)/\varepsilon}\equiv u(x,\varepsilon), \quad M=(x,t),\ \varphi=(\varphi_1,\varphi_2) \qquad (3)$$

Используя (2) и (3), найдем

$$u'(x,\varepsilon)\equiv\Big(\partial\tilde{u}/\partial x+\sum_{j=1}^{2}(\varphi'_j(x)/\varepsilon)\,\partial\tilde{u}/\partial t_j\Big)\Big|_{t=\varphi(x)/\varepsilon}$$

$$u''(x,\varepsilon)\equiv\left(\partial^2\tilde{u}/\partial x^2+(1/\varepsilon^2)D_t\tilde{u}+(1/\varepsilon)L_\varphi\tilde{u}\right)\Big|_{t=\varphi(x)/\varepsilon}$$

$$D_t\equiv\sum_{j=1}^{2}a(x)\partial^2/\partial t_j^2,$$

$$L_\varphi\equiv\sum_{j=1}^{2}(2\varphi_j'(x)\partial^2/(\partial x\partial t_j)+\varphi_j''(x)\partial/\partial t_j], \qquad (4)$$

тогда, на основании (3) и (4), естественно поставить расширенную задачу

$$\tilde{L}\tilde{u}\equiv a(x)(L_1+\varepsilon L_2+\varepsilon^2 L_3)\tilde{u}=f(x) \qquad (5)$$

$$\tilde{u}(0,0,\varphi_2(0)/\varepsilon,\varepsilon)=h_1,\quad \tilde{u}(1,\varphi_1(1)/\varepsilon,0,\varepsilon)=h_2, \qquad (6)$$

$$L_1\equiv\sum_{j=1}^{2}\partial^2_{t_j}-1,\quad L_2\equiv\sum_{j=1}^{2}(2\varphi_j'(x)\partial^2_{xt_j}+\varphi_j''(x)\partial_{t_j}),\quad L_3\equiv\partial_x^2.$$

Задача (5),(6) регулярна по ε при ε→0 и для оператора L выполняется условие

$$\tilde{L}\tilde{u}\,|_{t=\varphi(x)/\varepsilon}\equiv Lu. \qquad (7)$$

Уравнение (5) является уравнением в частных производных, но с постоянными коэффициентами и главной частью которого являются члены не содержащие малый параметр.

К задаче (5),(6) применим метод прямых [6], для чего положим

$$x=x_i=ih,\ i=0,1,\dots,n,\ h=1/n,$$

$$f_i=f(x_i),\ a_i=a(x_i),\ \tilde{u}(x_i,t,\varepsilon)=u_i(t)$$

и первую производную по x, входящую в это уравнение, заменим разностным соотношением

$$\partial_x \tilde{u}\ |_{x=ih}=\frac{u_{i+1}(t)-u_i(t)}{h},$$

тогда

$$\varepsilon L_2\tilde{u}\ |_{x=ih}=\sum_{j=1}^{2}\partial_t\ [2\ \varphi_{ji}\frac{u_{i+1}(t)-u_i(t)}{h}+\varphi''_j(x_i)\ u_i(t)].$$

На основании последнего, вместо уравнения (5) получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\widetilde{R}\,u_i\equiv a_iL_1u_i+\sum_{j=1}^{2}\ \{\varepsilon\,\partial_{t\,j}\ [2\ \varphi'_j(x_i)\frac{u_{i+1}(t)-u_i(t)}{h}+\varphi''_j(x_i)\ u_i(t)]\ \}+$$

$$\varepsilon^2\partial_x^2\,u_i(t)=f_i,\ i=0,1,2,...,n, \tag{8}$$

граничные условия для этого уравнения запишутся

$$u_0(0,\varphi_2(0)/\varepsilon)=h_1,\ u_n(\varphi_1(1)/\varepsilon,0)=h_2. \tag{9}$$

Вычислим невязку получающую при аппроксимации, для чего левую часть уравнения (8) запишем в виде:

$$\widetilde{R}\,\tilde{u}(x,t,\varepsilon)\equiv a(x)L_1\tilde{u}(x,t,\varepsilon)+$$

$$\sum_{j=1}^{2}\varepsilon\,\partial_{t_j}\Big[2\varphi_j(x)\frac{\widetilde{u}(x+h,t,\varepsilon)-\widetilde{u}(x,t,\varepsilon)}{h}+\varphi_j''(x)\,\tilde{u}(x,t,\varepsilon)\Big]+$$

$$\varepsilon^2\partial_x^2\,\tilde{u}(x,t,\varepsilon).$$

Используя точную формулу разностного соотношения для первой производной, это уравнение запишем

$$\widetilde{R}\,\tilde{u}(x,t,\varepsilon)\equiv a(x)L_1\tilde{u}(x,t,\varepsilon)+\text{[illegible]}$$

$$\sum_{j=1}^{2}\varepsilon\Big[2\varphi_j'(x)\,\partial^2_{xt_j}\,\tilde{u}(x,t,\varepsilon)+\varepsilon\frac{h}{2}\widetilde{u}_x''(\varsigma,t,\varepsilon)+\varphi_j''(x)\,\partial_{t_j}\,\tilde{u}(x,t,\varepsilon)\Big]+$$

$$\varepsilon^2\partial^2_x\,\tilde{u}(x,t,\varepsilon),$$

где ζ некоторая точка отрезка $[x,x+h]$. Будем считать, что решение исходной задачи имеет ограниченные производные по x до второго порядка, при таком предположении и на основании (5) это уравнение перепишется

$$\widetilde{R}\,\tilde{u}(x,t,\varepsilon)=\widetilde{L}\,\tilde{u}+O(\varepsilon h+\varepsilon^2).$$

Положим в обеих частях данного уравнения $t=\varphi(x)/\varepsilon$, тогда, на основании (7), оно перепишется

$$\widetilde{R}\,\tilde{u}(x,t,\varepsilon)\big|_{t=\varphi(x)/\varepsilon}=Lu(x,\varepsilon)+O(\varepsilon h+\varepsilon^2)$$

или в силу (1)

$$\widetilde{R}\,\tilde{u}(x,t,\varepsilon)|_{t=\varphi(x)/\varepsilon}=f(x)+O(\varepsilon h+\varepsilon^2). \qquad (10_1)$$

Краевые условия аппроксимируются точно. Таким образом, имеет место аппроксимация порядка $\varepsilon h+\varepsilon^2$.

Отбрасывая в уравнении (8) члены порядка $O(\varepsilon h+\varepsilon^2)$, получим

$$a_iL_1u_i+\sum_{j=1}^{2}\{\varepsilon\,\partial_{t_j}\,[2\,\varphi'_j(x_i)\frac{u_{i+1}(t)-u_i(t)}{h}+\varphi''_j(x_i)\,u_i(t)]\}=f_i. \qquad (8_1)$$

Задача (8_1),(9) позволяет получать приближенные значения решения $\tilde{u}(x,t,\varepsilon)$ задачи (5),(6) на прямых $x=ih,\ i=0,1,2,\dots,n$. Сужение построенного таким образом решения посредством регуляризующих функций $t_j=\varphi_j(x_i)/\varepsilon,\ j=1,2,$ $\varphi_j(x_i)=\varphi_j(x_{i-1})\pm h\sqrt{a(x_i)},\ i=0,1,\dots,n,\ \varphi_1(x_0)=0,\ \varphi_2(x_n)=0$ дает приближенные значения решения исходной задачи.

Çàäà÷ó (8_1),(9) áóäåì ðåøàòü â êëàññå ôóíêöèé

$$U=\{u_i(t):u_i(t)=c_{1,i}exp(-t_1)+c_{2,i}exp(-t_2)+v_i,\ i=0,1,\dots,n\}, \qquad (11)$$

которая является естественным классом решения этой задачи. Подставим функцию (11) непосредственно в задачу (8_1),(9)

$$\sum_{j=1}^{2}\{2\,\varphi'_j(x_i)[\,c_{j,i+1}-c_{j,i}]+\varphi''_j(x_i)c_{j,i}]\}exp(t_j)-a_iv_i=f_i,$$

$$c_{1,0}+c_{2,0}exp(\varphi_2(0)/\varepsilon)+v_0=h_1,\quad c_{1,n}exp(\varphi_1(1)/\varepsilon)+c_{2,n}+v_n=h_2.$$

Отсюда выбирая величины $c_{j,i}, v_i$, как решения сеточных уравнений

$$2\varphi'_j(x_i)c_{j,i+1}+[h\varphi''_j(x_i)-2\varphi'_j(x_i)]c_{j,i}=0, \qquad a_iv_i=-f_i \qquad (12)$$

при начальном условии

$$c_{1,0}=h_1-v_0,\ c_{2,n}=h_2-v_n,\ i=0,1,\dots,n,\ j=1,2 \qquad (13)$$

удовлетворим задачу (8_1),(9). В начальном условии (13) отброшены члены содержащие экспоненциальные функции $exp(\varphi_2(0)/\varepsilon)$ и $exp(\varphi_1(1)/\varepsilon)$, как величин пренебрежимо малых. При таком выборе произвольных $c_{j,i}, v_i$ функция

$u_i(t)=c_{1,i}exp(t_1)+c_{2,i}exp(t_2)+v_i$

будет решением задачи (8_1),(9) для любого номера $i=0,1,...,n$.

Таким образом, наш подход позволил свести решение краевой задачи к решению задачи Коши для сеточной системы. При j=1 сеточное уравнение (12) решается при начальном условии $c_{1,0}=h_1-v_0$, при j=2 это уравнение решается при начальном условии $c_{2,n}=h_2-v_n$

Теперь в задаче (5),(6) дополнительно заменим и вторую производную разностным соотношением

$$\partial^2_x \tilde{u}\ |_{x=ih}=\frac{u_{i+1}(t)-2u_i(t)+u_{i-1}(t)}{h^2},$$

тогда вместо уравнения (8_1) получим уравнение

$$\widetilde{R}\, u_i \equiv a_i L_1 u_i+\sum_{j=1}^{2}\{\varepsilon\, \partial_{t_j}\ [2\varphi'_j(x_i)\frac{u_{i+1}(t)-u_i(t)}{h}+\varphi''_j(x_i)u_i(t)]+$$

$$\varepsilon^2\frac{u_{i+1}(t)-2u_i(t)+u_{i-1}(t)}{h^2}\}=f_i \qquad , i=0,1,...,n,$$

которого снова обозначим через (8_1).

Проводя такие же выкладки, что и выше, вычислим невязку. Заменив разностные соотношения точными формулами, имеем

$$\widetilde{R}\, \tilde{u}\ (x,t,\varepsilon)= a(x)L_1\, \tilde{u}\ (x,t,\varepsilon) +$$

$$\sum_{j=1}^{2}\ \varepsilon\, [2\varphi'_j(x)\, \partial^2_{xt_j}\ \tilde{u}\ (x,t,\varepsilon)+\varphi''_j(x)\, \partial_{t_j}\ \tilde{u}\ (x,t,\varepsilon)]+$$

$$\varepsilon^2\partial^2_x\, \tilde{u}\ (x,t,\varepsilon)+\varepsilon\frac{h}{2}\widetilde{u}''(\varsigma_1)+\varepsilon^2\frac{h^2}{24}\widetilde{u}^{(4)}(\varsigma_2),$$

где ζ_1, ζ_2 некоторые точки отрезка $[x,x+h]$. Будем считать, что решение исходой задачи имеет ограниченные производные до четвертого порядка, при таком предположении и на основании (5) это уравнение запишется

$$\widetilde{R}\,\tilde{u}\ (x,t,\varepsilon)=\widetilde{L}\,\tilde{u}+O(\varepsilon h).$$

Произведем сужение этого уравнения посредством регуляризующей функции $t=\varphi(x)/\varepsilon$, тогда на основании (7) оно перепишется

$$\widetilde{R}\,\tilde{u}\ (x,t,\varepsilon)|_{t=\varphi(x)/\varepsilon}=Lu(x,\varepsilon)+O(\varepsilon h)$$

или в силу (1)

$$\widetilde{R}\,\tilde{u}\ (x,t,\varepsilon)|_{t=\varphi(x)/\varepsilon}=f(x)+O(\varepsilon h). \qquad (10_2)$$

В данном случае вместо задачи (12), (13) получим задачу

$$2\varphi'_j(x_i)c_{j,i+1}+[h\varphi''_j(x_i)-2\varphi'_j(x_i)]c_{j,i}=-p[c_{j,i+1}-2c_{j,i}+c_{j,i-1}],$$

$$a_iv_i=p^2[v_{i+1}-2v_i+v_{i-1}]-f_i,\ \ p=\varepsilon/h,$$

$$c_{1,0}=h_1-v_0,\ c_{2,n}=h_2-v_n,\ i=0,1,...,n,\ j=1,2. \qquad (14)$$

Решение сеточных уравнений (14) может быть построено общеизвестными методами, как краевая задача для сеточного уравнения, но при этом потребуется дополнительное условие на другом конце отрезка. В нашем случае мы можем выбрать это условие в виде $c_{1,n}=0$, а для второго уравнения- $c_{2,0}=0$. Чтобы облегчить процесс построения решения системы (14) мы применим подход, используемый в асимптотических методах решения сингулярно возмущенных задач. Учитывая, что решение задачи (5),(6) строится с точностью $O(\varepsilon h+\varepsilon^2)$ или $O(\varepsilon h)$, то в асимптотическом разложении должны участвовать два члена $(u_0+\varepsilon u_1)$. Причем, функция u_1 выражается через функцию u_0. Такой же подход будет принят и здесь, а именно, значения $c_{j,i}, v_i$ входящие в правые части системы (14) будут определены из предельной при $\varepsilon\rightarrow 0$ задачи, т.е.

$$2\varphi'_j(x_i)c_{j,i+1}+[h\varphi''_j(x_i)-2\varphi'_j(x_i)]c_{j,i}=0,$$

$a_i v_i = -f_i, \qquad c_{1,0}=h_1-v_0,\ c_{2,n}=h_2-v_n,\ i=0,1,...,n,\ j=1,2.$

Обозначая решения этой задачи через $c^0_{j,i},\ v^0_i,$ для определения $c_{j,i}, v_i$ получим задачу

$$2\varphi'_j(x_i)c_{j,i+1}+[h\varphi''_j(x_i)-2\varphi'_j(x_i)]c_{j,i}=-p[c^0_{j,i+1}-2c^0_{j,i}+c^0_{j,i-1}],$$

$$a_i v_i=0, \qquad c_{1,0}=-v_0,\ c_{2,n}=-v_n,\ i=0,1,...,n,\ j=1,2 \qquad (15)$$

По аналогии с асимптотическими методами, выражение $p^2[v^0_{i+1}-2v^0_i+v^0_{i-1}]$ должно участвовать в определении коэффициента при ε^2. В данном подходе при построении решения участвуют члены порядка $O(\varepsilon)$, поэтому члены порядка $O(\varepsilon^2)$ не вошли в уравнение (15).

Воспользовавшись тем, что выражение $(1-h\varphi''_j(x_i)/(2\varphi'_j(x_i))^n$ ограничено для всех $i\leq n=1/h$, нетрудно установить устойчивость разностных схем (12),(13) и (15).

Произведем операцию сужение, для чего в построенное решение $u_i(t)$ вместо t_1,t_2 положим

$$t_1=\varphi_1(x_i)/\varepsilon=\varphi_1(x_{i-1})/\varepsilon+\frac{h}{\varepsilon}\sqrt{a(x_{i-1})},\ \varphi_1(0)=0,\ i=1,2,...,n,$$

$$t_2=\varphi_2(x_{i-1})/\varepsilon=\varphi_2(x_i)/\varepsilon+\frac{h}{\varepsilon}\sqrt{a(x_i)},\ \varphi_2(x_n)=0,\ i=n,n-1,...,1,$$

мы получим

$$u_\varepsilon(x_i,h)\equiv u_i(\varphi_1(x_i)/\varepsilon,\varphi_2(x_i)/\varepsilon)=c_{1,1}exp(-\varphi_1(x_i)/\varepsilon)+c_{2,1}exp(-\varphi_2(x_i)/\varepsilon)+v_i$$

приближенные значения решения исходной задачи (1).

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия 1) и 2).Тогда для решений $u(x,\varepsilon)$ исходной задачи и задачи (8_1),(9) имеет место сходимости:

$$||u(x_i,\varepsilon)-u_\varepsilon(x_i,h)||<c\varepsilon(h+\varepsilon)$$

для первого подхода и

$$||u(x_i,\varepsilon)-u_\varepsilon(x_i,h)||<c\varepsilon h$$

для второго подхода, здесь константа c не зависит от h и ε.

ЛИТЕРАТУРА

С.А.Ломов, Введение в общую теорию сингулярных возмущений.-М.:Наука, 1981-400 с.

И.С.Березин, Н.П.Жидков, Методы вычислений. II. М:.1962, 639.

E.P.Doolan, J.J.H.Miller, W.H.A.Schilders, Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers. BOOLE PRESS, Dublin, 1980 – 200 c.

Ю.В.Ракитский, С.М.Устинов, И.Г.Черноруцкий, Численные методы решения жестких систем.-М.: Наука, 1979 –208 с.

А.И.Задорин, О численном решении третьей краевой задачи для уравнения с малым параметром.// Журн.вычисл.математ. и математ. физики, 24, №7(1984), 1008-1015.

С.Н.Скляр, О дискретизации задач с пограничным слоем при помощи одного проекционного варианта интегральных тождеств. III. Самосопряженное уравнение // Изв.АН Кирг.ССР.физ.-тех. и математ. науки, №4(1989),3-11.

А.С.Омуралиев, Численное решение двух точечной сингулярно возмущенной краевой задачи.// Тезисы докл.математ.и механиков Киргизии. Фрунзе 1987.

А.С.Омуралиев, Численная регуляризация краевой задачи с пограничным слоем, возникающимся на одном конце.//Вестник Ошского ГУ,сер.физмат., №4(2001),101-104.

Eugene O'Riordan, Singularly Perturbed Finite Element Methods.// Numerical Math. 44(1984) , 425-434.