СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА С НЕСТАБИЛЬНЫМ СПЕКТРОМ

Доц.др.Асан ОМУРАЛИЕВ

Кыргызско-Турецкий университет «Манас», инженерный факультет

В статье строится регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной параболической задачи, когда предельный оператор имеет нестабильный спектр и асимптотика содержит угловые погранслойные функции.

Здесь изучается задача

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon\partial_t u - \varepsilon a(x)\partial_x^2 u - b(t)u = f(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega$$

$$u|_{t=0}=h(x),\ u|_{x=0}=u|_{x=1}=0, \qquad (1)$$

в которой при $\varepsilon\to 0$ теряются как граничные, так и начальное условия. Кроме того, предполагаются выполненными следующие условия:

1. функции $h(x),a(x)\in C^{n+1}[0,1]$, $b(x,t),f(x,t)\in C^{n+1}(\overline{\Omega})$;
2. $\forall x\in[0,1]$ функция $a(x)>0$;
3. выполняются условия согласования начального и граничных условий $h(0)=h(1)=0$.

4. функция $b(t)=b_1(t)\prod_{j=0}^{r}(t-t_j)^{k_j}$, $b_1(t)<0$

$\forall t\in[0,T]$, t_j точки отрезка $[0,T]$, $k=k_0+k_1+\dots k_r$.

5. неоднородность $f(x,t)$ уравнения такова, что

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i}\big(f(x,t)\big)\Big|_{t=t_j}=0,\ j=\overline{0,r},\ \ i=\overline{0,k_j-1}.$$

Задачи с условиями 4. для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Ломова изучалась в работах [1],[2]. В указанных работах впервые были введены регуляризующие функции, учитывающие, кроме экспоненциальных существенно особых сингулярностей, и степенной характер сингулярностей при $\varepsilon\to 0$. Как показано, решение исходной задачи наряду с сингулярностями экспоненциального характера включает и два доугих вида сингулярностей

$$\int_0^t \exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s b(\tau)d\tau\Big)ds\,,\ \int_0^t s\exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s b(\tau)d\tau\Big)ds\,,$$

которые при $\varepsilon\to 0$ имеют степенной характер убывания.

В отличие от задачи, изученной в [3], здесь при $\varepsilon\to 0$ теряется и начальное условие, а это приводит к возникновению дополнительного пограничного слоя вдоль $t=0$. Как будет показано ниже, в данной задаче пограничный слой возникает не только вдоль границ $x=0$, $x=1$, $t=0$, но и в угловых точках (0,0), (1,0).

Задачи, когда малый параметр стоит перед всеми производными впервые изучены в работах Бутузова В.Ф. (библиографию см. в [4]) и названы им задачами с угловыми пограничными слоями. Основанный же им метод назван методом угловых пограничных функций. На основе этого метода изучены многие классы задач, и построенная асимптотика содержит как обыкновенные функции пограничного слоя, описывающие пограничные слои вдоль $x=0$, $x=1$, $t=0$ и определяемые из обыкновенных дифференциальных уравнений, так и угловые погранслойные функции определяемые из уравнений параболического типа. Нами построена регуляризованная асимптотика решения, отвечающее структуре фундаментального решения.

П.1.Регуляризация задачи. Для регуляризации задачи (1), мы должны ввести три типа регуляризующих переменных

$$\tau_1=t/\varepsilon, \tau_2=\psi(t)/\varepsilon\equiv\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t b(s)ds\ , \xi_l=\varphi_l(x)/\varepsilon=\frac{(-1)^{l-1}}{\varepsilon}\int_{l-1}^{x}\frac{ds}{\sqrt{a(s)}}\ ,$$

$$\sigma_{j,i}=\int_0^t \exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s b(\tau)d\tau\Big)k_{j,i}(s)ds\equiv p_{j,i}(t,\varepsilon),\quad l=1,2,\quad j=0,1,\dots,r;$$

$$i=0,1,\dots,k_j-1. \qquad \mathbf{(2)}$$

где $k_{ji}(t)$ $(j=0,1,\dots,r;\ i=0,1,\dots,k_j-1)$ базисная система полиномов Лагранжа-Сильвестра [5] относительно многочлена

$$p(t)\equiv\frac{b(t)}{b_1(t)}=\prod_{j=0}^{r}(t-t_j)^{k_j}\ .$$

Перейдем к расширенной задаче, сохраняющей свой порядок при $\varepsilon=0$. Обозначим через $\tilde{u}(x,\ t,\ \xi,\ \tau,\ \sigma,\ \varepsilon)$, $\tau=(\tau_1,\ \tau_2)$, $\xi=(\xi_1,\ \xi_2)$ решение расширенной задачи, а через $u(x,\ t,\ \varepsilon)$ – решение исходной задачи (1). Тогда должно выполняться тождество

$$\tilde{u}(x,t,\xi,\tau,\sigma,\varepsilon)\big|_{\theta=\theta(x,t,\varepsilon),\sigma=p(t,\varepsilon)}\equiv u(x,t,\varepsilon),$$

$$\sigma=(\sigma_{00},\dots,\sigma_{k_0-1};\dots;\sigma_{r,0},\dots,\sigma_{r,k_r-1}),$$

$$\theta=(\xi,\tau)=\theta(x,t,\varepsilon)\equiv(\varphi_1(x)/\varepsilon,\ \varphi_2(x)/\varepsilon,\ t/\varepsilon,\ \psi(t)/\varepsilon). \qquad (3)$$

Используя тот факт, что

$$p'_{j,i}=\frac{1}{\varepsilon}b(t)p_{j,i}+k_{j,I},\quad p_{j,i}(0,\varepsilon)=0,$$

$$q'(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}b(t),\ q(0,\varepsilon)=0,$$

найдем

$$\partial_t u \equiv (\partial_t \widetilde{u}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}[\partial_{\tau_1}+b(t)\partial_{\tau_2}]\,\widetilde{u}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}(b(t)p_{j,i}+\varepsilon k_{j,i}(t))\,\partial_{\sigma_{j,i}}\widetilde{u})|_{\text{¼=¼}(x,t,\varepsilon),\ \sigma=p(t,\varepsilon)},$$

$$\partial_x u \equiv (\partial_x \widetilde{u}+(1/\varepsilon)\sum_{j=1}^{2}\varphi'_j(x)\,\partial_{\xi_j}\widetilde{u})|_{\text{¼=¼}(x,t,\varepsilon),\ \sigma=p(t,\varepsilon)},$$

$$\partial_x^2 u \equiv (\partial_x^2 \widetilde{u}+(1/\varepsilon)^2\sum_{j=1}^{2}(\varphi'_j(x))^2\,\partial_{\xi_j}^2\widetilde{u}+(1/\varepsilon)\sum_{j=1}^{2}[2\varphi'_j(x)\partial^2_{x\xi}\widetilde{u}$$

$$+\varphi''_j(x)\partial_\xi \widetilde{u}\,])|_{\text{¼=¼}(x,t,\varepsilon),\ \sigma=p(t,\varepsilon)}.$$

На основании (1), (3) и последних соотношений для производных, получим расширенную задачу

$$\widetilde{L}_\varepsilon\,\widetilde{u}\ \equiv \varepsilon\partial_t \widetilde{u}+[\partial_{\tau_1}+b(t)\partial_{\tau_2}]\,\widetilde{u}+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}(b(t)p_{j,i}+\varepsilon k_{j,i}(t))$$

$$\partial_{\sigma_{j,i}}\widetilde{u}-D_\xi \widetilde{u}-b(t)\widetilde{u}-\varepsilon L_\xi \widetilde{u}-\varepsilon^2 L_x \widetilde{u}=f(x,t),\qquad M=(x,t,\xi,\tau,\sigma)\in Q,$$

$$\widetilde{u}\,|_{t=\tau=0}=h(x),\ \ \widetilde{u}\,|_{x=j-1,\xi=0}=0,\qquad j=1,2, \tag{4}$$

$$D_\xi \equiv \sum_{j=1}^{2}\partial_{\xi_j}^2,\qquad L_\xi \equiv \sum_{j=1}^{2}L_{\xi_j}\equiv \sum_{j=1}^{2}a(x)[2\varphi'_j(x)\partial_{x\xi}^{2}+\varphi''_j(x)\partial_\xi],$$

$$L_x \equiv a(x)\,\partial_x^2,$$

$Q=\{(x,t,\xi,\sigma,\tau):\ (x,t)\in\overline{\Omega},\xi,\tau,\sigma\geq 0\}.$

Задача (4) регулярна так, что

$$\widetilde{L}_{\varepsilon}\,\widetilde{u}\,|_{\theta=\theta(x,t,\varepsilon,\sigma=p(t,\varepsilon)}\equiv L_{\varepsilon}u. \qquad (5)$$

Если $\widetilde{u}$ решение задачи (4), то её сужение (3) на функциях $\theta=\theta(x, t, \varepsilon)$, $\sigma=p(t,\varepsilon)$ удовлетворяет задаче (1). Кроме того, порядок уравнения (4) не понижается, поэтому его решение можно искать в виде разложения

$$\widetilde{u}\,(M,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i}u_{i}(M)+R_{\varepsilon n}(M). \qquad (6)$$

После известных процедур, для коэффициентов разложения (6) получим следующие итерационные задачи:

$$Tu_0(M)=f(x,t),\ \ M\in Q, \qquad u_0|_{t=\tau=0}=h(x),\ u_0|_{x=j-1,\xi=0}=0,$$

$$Tu_i=-\partial_t u_{i-1}+L_{\xi}u_{i-1}+L_x u_{i-2},\quad u_i|_{t=\tau=0}=0,\ \ u_i|_{x=j-1,\xi=0}=0,\ i=1,2,\dots,n, \qquad (7_i)$$

$$R_{\varepsilon n}(M)=\varepsilon^{n+1}g_{\varepsilon n}(M),\ R_{\varepsilon n}|_{t=\tau=0}=R_{\varepsilon n}|_{x=j-1,\xi=0}=0, \qquad (8)$$

$$T\equiv[\partial_{\tau_1}+b(t)\partial_{\tau_2}]-D_{\xi}-b(t)+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}b(t)p_{ji}\partial_{\sigma_{ji}}\ ,\ j=1,2,$$

$$g_{\varepsilon n}(M)=-\partial_t u_n+L_{\xi}\,u_n+L_x[u_{n-1}+\varepsilon u_n].$$

<u>*П.2. Класс разрешимости итерационных задач.*</u> Введем класс функций, в котором будут решаться итерационные задачи (7):

$$U=\{u(M):$$

$$u(M)=v(x,t)+c(x,t)exp(\tau_2)+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}y_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i}+\sum_{l=1}^{2}[\omega_l(M_l)exp(\tau_2)+$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} z^l_{j,i}(M_l)\sigma_{j,i} +u_l(M_l)],\ c(x,t),v(x,t)\in C^{n+1}(\overline{\Omega}),\ M_j=(x,t,\xi_j,\tau_1,\sigma),$$

$\omega_j(M_j),u_j(M_j)\in C^{n+1}(Q)\}$.

Каждая из задач (7_i) в общем виде запишется

$$Tu(M)=H(M),\ \ M\in Q,\qquad u|_{t=\tau=\sigma=0}=h(x),\ u|_{x=l-1,\xi=0}=0, \qquad (9)$$

$$H(M)=h_1(x,t)+h_2(x,t)exp(\tau_2)+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} h_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i}+$$

$$\sum_{l=1}^{2}[H_{1l}(M_l)exp(\tau_2)+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} P^l_{j,i}(M_l)\sigma_{j,i}+H_{2l}(M_l)].$$

<u>Теорема 1.</u> *Пусть правая часть $H(M)$ уравнения (9) принадлежит классу U и выполнены условия 1)-5). Тогда это уравнение разрешимо в классе U тогда и только тогда, когда коэффициенты функции $u\in U$ удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$-b(x,t)v(x,t)\equiv h_1(x,t),\ \ h_2(x,t)\equiv 0,\ h_{j,i}(x,t)\equiv 0,\ \ T\omega_l\equiv \partial_t\omega_l-\partial^2_{\xi_l}\ \omega_l(M_l)\equiv H_{1l}(M_l),$$

$$Tz^l_{j,i}\equiv P^l_{j,i}(M_l),\ Tu_l\equiv b(t)u_l+H_{2l}(M_l),\ \ j=0,1,\dots,r;\ i=0,1,\dots,k_j-1,\ l=1,2. \qquad (10)$$

<u>*Доказательство.*</u> Пусть правая часть уравнения (9) принадлежит классу U, решение задачи будем определять как элемент класса U

$$u(M)=v(x,t)+c(x,t)exp(\tau_2)+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} y_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i}+\sum_{l=1}^{2}[\omega_l(M_l)exp(\tau_2)+$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} z^l_{j,i}(M_l)\sigma_{j,i}+u_l(M_l)]. \qquad (11)$$

Подставим эту функцию в задачу (9), далее коэффициенты выберем так, чтобы имели место соотношения (10). При подстановке первых двух слагаемых c(x,t)exp(τ_2), $\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} y_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i}$ функции *u(M)* в уравнение (9) левая часть обратиться в тождество, поэтому соответствующие им слагаемые из правой части должны быть равны нулю т.е. $h_2(x,t)\equiv 0$ и $h_{j,i}(x,t)\equiv 0$. Остальные слагаемые выбираются так, чтобы имели место соотношения (10).

Пусть теперь коэффициенты функции u(M) класса U удовлетворяют задачам (10). Сложим уравнения из (10) $\forall l=1,2$; $j=0,1,\ldots,r$; $i=0,1,\ldots,k_j-1$, при этом предварительно умножим соответствующие уравнения на exp(τ_2) и $\sigma_{j,i}$. Мы получим

$$-b(t)v(x,t)+\sum_{l=1}^{2}\{[\,\partial_t\omega_l(M_l)-\partial^2_{\xi_j}\,\omega_l(M_l)]exp(\tau_2)+$$

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}[\partial_t\, z^l_{j,i}(M_l)-\partial^2_{\xi_j}\, z^l_{j,i}(M_l)]\,\sigma_{j,i}+\partial_t u_l(M_l)-\partial^2_{\xi_j}\, u_l(M_l)-$$

$$b(t)u_l(M_l)\}\equiv h_1(x,t)+h_2(x,t)exp(\tau_2)+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} y_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i}+$$

$$\sum_{l=1}^{2}\{H_{1,l}(M_l)exp(\tau_2)+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\; P^l_{j,i}(M_l)\sigma_{j,i}+H_{2l}(M_l)\}.$$

Учитывая, что для слагаемых c(x,t)exp(τ_2), $\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}$ $y_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i}$ входящих в функцию $u\in U$ справедливо тождество

$$b(t)\,\partial_{\tau_2}\,[c(x,t)exp(\tau_2)+\sum_{l=1}^{2}\omega_l(M_l)exp(\tau_2)]-$$

$$b(t)[c(x,t)exp(\tau_2)+\sum_{l=1}^{2}\omega_l(M_l)exp(\tau_2)]+\qquad b(t)$$

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\{\sigma_{j,i}\,\partial_{\sigma_{j,i}}[y_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i}+\sum_{l=1}^{2}z^{l}_{j,i}(M_l)\sigma_{j,i}]-$$

$$b(t)\{\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}[y_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i}+\sum_{l=1}^{2}z^{l}_{j,i}(M_l)\sigma_{j,i}]\}\equiv 0.$$

Включим это тождество в предыдущее тождество, произведя группировку членов получим

$$\partial_{\tau_1}\{v(x,t)+c(x,t)exp(\tau_2)+$$

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}y_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i}+\sum_{l=1}^{2}[\omega_l(M_l)exp(\tau_2)+$$

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\qquad z^{l}_{j,i}(M_l)\sigma_{j,i}\qquad +u_l(M_l)]\}+$$

$$b(t)\,\partial_{\tau_2}\{v(x,t)+c(x,t)exp(\tau_2)+$$

$$+\qquad\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}y_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i}+\sum_{l=1}^{2}[\omega_l(M_l)exp(\tau_2)\qquad +$$

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}z^{l}_{j,i}(M_l)\sigma_{j,i}+u_l(M_l)]\}+$$

$$+\partial_{\tau_1} b(t)\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} \sigma_{j,i} \quad \partial_{\sigma_{j,i}} \{v(x,t)+c(x,t)exp(\tau_2)+$$

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} y_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i} \ +\sum_{l=1}^{2} [\omega_l(M_l)exp(\tau_2) \ + \ \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} z^l_{j,i}(M_l)\sigma_{j,i}$$

$$+u_l(M_l)]\} -$$

$$-D_\xi\{ \quad v(x,t)+c(x,t)exp(\tau_2)+ \quad \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} y_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i}$$

$$+\sum_{l=1}^{2} [\omega_l(M_l)exp(\tau_2) \ + \ \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} z^l_{j,i}(M_l)\sigma_{j,i} \ +u_l(M_l)]\}-$$

$$b(t)\{v(x,t)+c(x,t)exp(\tau_2)+ \quad \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} y_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i}$$

$$+\sum_{l=1}^{2} [\omega_l(M_l)exp(\tau_2) \ + \ \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} z^l_{j,i}(M_l)\sigma_{j,i} \ +u_l(M_l)]\} \ \equiv$$

$$h_1(x,t)+h_2(x,t)exp(\tau_2)+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} y_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i}+\sum_{l=1}^{2}\{H_{1,l}(M_l)exp(\tau_2$$

$$)+$$

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} P^l_{j,i}(M_l)\sigma_{j,i}+H_{2l}(M_l)\}.$$

Отсюда заключаем, что функция $u\in U$ является решением уравнения (9). Теорема доказана.

<u>*Теорема 2.*</u> *Пусть выполнены условия 1)-5) и правая часть $H(M)\in U$ уравнения (9) удовлетворяет соотношениям (10). Тогда при дополнительных условиях*

a) $u|_{t=\tau=\sigma=0}=h(x),\ u|_{,\xi=0}=0,$

b) $L_l u+F(M)\in U,$

c)

$$\frac{d^s}{dt_s}[-\partial_t u+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_l-1} k_{ji}(t)y_{ji}(x,t)+F_2(x,t)]|_{t=t_m}\equiv 0,$$

$$L_l\equiv-\partial_t-\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_l-1} k_{j,i}\partial_{\sigma_{j,i}}+L_\xi,\ \forall m=0,1,\dots,r,\ s=0,1,\dots,k_m-1,\ (12)$$

уравнение (9) однозначно разрешимо в U. Здесь

$$F(M)=F_1(x,t)+F_2(x,t)\exp(\tau_2)+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_l-1} F_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i}+$$

$$\sum_{l=1}^{2}[F_1^l(M_l)\exp(\tau_2)+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_l-1} F^l_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i}+F^l_2(M_l)]$$ – известная функция.

<u>*Доказательство.*</u> Поскольку выполнены условия теоремы 1, то уравнение (9) разрешимо в U и его решение представимо в виде (11), где не найденными являются функции c(x,t), y(x,t). Кроме того произвольные функции войдут и в выражения для $\omega_l(M_l)$, $z^l_{j,i}(M_l)$, $u_l(M_l)$. Для их нахождения будут использованы условия (12).

Подчиняя функцию (11) краевому условию (12 a)), получим

$$c(x,t)|_{t=0}=h(x)-v(x,0),\ \omega_l(M_l)|_{t=\tau_1=0}=0,\ u_l(M_l)|_{t=\tau_1=0}=0,$$

$$\omega_l(M_l)|_{\xi_l=0}=\omega_l^0(x,t),\ u_l(M_l)|_{\xi_l=0}=u_l^0(x,t)$$

$$u_l|_{x=l-1}=-v(l-1,t),\quad z^1_{ji}(M_l)\Big|_{x_l=0}= z^{l0}_{ji}(x,t) \qquad (13)$$

Перед тем, как подчинить функцию условиям b) и c) из (12), выпишем явно решения однородных уравнений для функций ω_l, $z^1_{j,i}$ и u_l при соответствующих краевых условиях из (13). Построим функцию $u_l(M_l)$, для чего произведем подстановку

$$u_l(M_l)=\exp\left(b(t)\tau_1\right)n_l(M_l), \qquad (14)$$

далее сокращая на $\exp\left(b(x)\tau_1\right)$, относительно $n_l(M_l)$ получим задачу

$$\partial_{\tau_1} n_l-\partial^2_{\xi_l} n_l=0, \qquad M_l\in\widetilde{Q}, \qquad n_l\Big|_{t=\tau=0}=0,$$

$$n_l\Big|_{\xi_l=0}=\exp\left(-b(t)\tau_1\right)u^0_l(x,t).$$

Решение этой задачи представится в виде

$$n_l(M_l)=\frac{\xi_l}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau_1}\frac{u^0_l(x,t)\exp(-b(t)y)}{\sqrt{(\tau_1-y)^3}}\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(\tau_1-y)}\right)dy$$

или, производя замену переменных

$$s=\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1-y}},\quad ds=\frac{\xi_l\,dy}{4\sqrt{(\tau_1-y)^3}},\quad y=\tau_1-\left(\frac{\xi_l}{2s}\right)^2,$$

перепишем

$$n_l(M_l)=\frac{2u^0_l(x,t)}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}}^{\infty}\exp\left(-s^2-b(t)\left[\tau_1-\left(\frac{\xi_l}{2s}\right)^2\right]\right)ds.$$

Найденное выражение для $n_l(M_l)$ подставим в соотношение (14), мы получим

$$u_l(M_l) = u_l^0(x,t) I_4(\xi_l, t, \tau_1),$$

$$I_4(\xi_l, t, \tau_1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}}^{\infty} \exp\left(-s^2 + b(t)\left(\frac{\xi_l}{2s}\right)^2 \right) ds,$$

заметим, что $b(t) \le 0 \quad \forall t \in [0,T]$.

Остальные функции определяют формулами

$$\omega_l(M_l)=\omega^0_l(x,t)\,\frac{\xi_l}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(\tau_1 - s)^3}} \exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(\tau_1 - s)}\right) ds \equiv \omega^0_l(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right),$$

$$z^l_{j,i}(M_l)= z^{l0}_{j,i}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right),\ l=1,2.$$

где произвольные функции, входящие в вышеприведенные формулы, определены в точке $x=l-1$ (см. 13):

$\omega^0_l(x,t)|_{x=l-1}=-c(l-1,t)$, $z^{l0}_{j,i}(x,t)|_{x=l-1}=-y_{j,i}(l-1,t)$, $u^0_l(x,t)|_{x=l-1}=-v(l-1,t)$, $l=1,2$. (15)

После определения всех функций, входящих в решение (11) уравнения (9), мы вправе вычислить

$$L_1u\equiv -[\partial_t v(x,t)+\sum_{l=1}^{2}\partial_t(u^0_l(x,t)I_4(t,\xi_l,\tau_1))]-[\partial_t c(x,t)+$$

$$+\sum_{l=1}^{2}\partial_t\omega^0_l(x,t)erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}})]exp(\tau_2)-\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}[\partial_t y_{j,i}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}\partial_t z^{l0}_{j,i}(x,t)$$

$$erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}})]\sigma_{j,i}+a(x)\sum_{l=1}^{2}\{[2w(x)\ \partial_x\omega^0_l(x,t)+w'(x)\ \omega^0_l(x,t)]exp(\tau_2)+$$

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}[2w(x)\ \partial_x z^{l0}_{j,i}(x,t)$$

$$+w'(x)z^{l0}_{j,i}(x,t)]\sigma_{j,i}\}\partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}))+[2w(x)\ \partial_x\ u^0_l(x,t)+\ w'(x)$$

$$u^0_l(x,t)]\partial_{\xi_l}I_4(t,\xi_l,\tau_1)-\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}[y_{j,i}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}z^{l0}_{j,i}(x,t)$$

$$erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}})]k_{j,i}(t),\ \omega(x)=\frac{1}{\sqrt{a(x)}}.$$

Введем обозначения, которые будут использованы в дальнейшем

$$h_2(x,t)\equiv-\partial_t c(x,t)+F_2(x,t),$$

$$h_{ji}(x,t)=-\partial_t y_{ji}(x,t)+F_{ji}(x,t),$$

$$H_{1l}\equiv-\partial_t\omega^0_l erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}\right)+a(x)L^*_2\omega^0_l(x,t)\partial_{\xi_l}\left(erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}\right)\right)+F^l_1(M_l),$$

$$P^l_{ji}(M_l) \equiv -\partial_t z^l_{j,i}(x,t)\, erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}\right) + a(x) L_2 z^l_{ji} \partial_{\xi_l}\left(erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}\right)\right) + F^l_{ji}(M_l),$$

$$H_{2l}(M_l) \equiv -\partial_t\left(u^0_l I_4(t,\xi_l,\tau_1)\right) + a(x) L_2 u^0_l(x,t)\partial_{\xi_l}\left(I_4(t,\xi_l,\tau_1)\right) -$$

$$-\sum_j \sum_i z^l_{ji}(x,t) k_{ji}(x)\, erfc\left(\frac{\xi_{l1}}{2\sqrt{\tau_2}}\right), \qquad (16)$$

$$L_2 \equiv 2w(x)\partial_x + w'(x).$$

Займемся тождествами, приведенными в (10), согласно условию 4) для разрешимости уравнения

$$-b(t)v(x,t) = -\partial_t v + \sum\sum k_{ji}(t) Y_{ji}(x,t) + F_2(x,t) \equiv \alpha(x,t)$$

необходимо и достаточно, чтобы правая часть выделяла множитель $\prod_{j=1}^{r}(t-t_j)^{k_j}$. Это утверждение эквивалентно условиям (12.c)). Действительно, поскольку функция $\alpha(x,t)$ удовлетворяет условию (12.c)), то ее полином $r(t) \equiv r(t,\alpha)$ Лагранжа-Сильвестра равен тождественно нулю, а значит, по свойству полинома Лагранжа-Сильвестра функция $\alpha(x,t)$ представляется в виде $\alpha(x,t) = l(x,t)\prod_{j=1}^{r}(t-t_j)^{k_j}$, где $l(x,t)$ – некоторая известная функция. Выполнение условия (12 с)) можно обеспечить за счет выбора произвольной функции $Y_{ji}(x,t)$:

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i}\left(-\partial_t v(x,t) + \sum_{s_2}\sum k_{ji}(t) Y_{ji}(x,t) + F_1(x,t)\right)_{t=t_j} = 0, \qquad (17)$$

$$j = \overline{0,r}, \quad i = 0, k_j - 1.$$

При дифференцировании произведения воспользуемся формулой Лейбница, затем используем условия

$$\frac{d^{v}k_{ji}(t)}{dt^{v}}l=\delta_{i}^{v}\delta_{j}^{l},\ \ l=\overline{0,r},\ \ v=\overline{0,k_{l}-1}$$

базисной системы $\{k_{ji}(t)\}$ полиномов Лагранжа-Сильвестра. Тогда из системы (17) можем определить значения

$$y_{ji}(x,t)=y_{ji}^{0}(x). \tag{18}$$

Следующими условиями (10) являются тождественные обращения в нуль функций $h_2(x,t)$ и $h_{ji}(x,t)$. Произвольные функции $c(x,t)$ и $y_{ji}(x)$, и обеспечат выполнения этих условий, т.е. положим

$$-\partial_t c(x,t)+F_2(x,t)=0,$$

$$-\partial_t y_{ji}(x,t)+F_{ji}(x,t)=0,\ \ j=\overline{0,r},\ \ i=\overline{0,k_j-1}.$$

Первое уравнение решается при начальном условии из (13), а второе уравнение будет решаться при начальном условии (18).

Правыми частями следующих тождеств из (10) является функция $H_{1l}(M_l)$, $P_{ji}^{l}(M_l)$, $H_{2l}(M_l)$, как видно из (16) они включают слагаемые, содержащие производные по ξ_l. Присутствие в правой части такой производной выведет решение уравнения $Tu=H(M_l)$ из класса *U*. Поэтому произвольные функции $\omega_l^0(x,t)$, $z_{ji}^{l0}(x,t)$, $u_l^0(x,t)$ могут быть выбраны как решение уравнений

$$L_2\omega_l^0(x,t)=0,\ L_2z_{ji}^{l0}(x,t)=0,\ \ L_2u_l^0(x,t)=0$$

при начальном условии (15).

Таким образом, решение уравнения (9) определяется условиями (12) в классе *U* однозначно. Теорема доказана.

П. Определение коэффициентов разложения (6). Проведем его по индукции. Правая часть уравнения (7_0) принадлежит классу *U* и имеет место условие (10), т.е. $h_2(x,t)\equiv 0$ и $h_{ji}(x,t)\equiv 0$. Поэтому по теореме 1 существует решение уравнения (7_0) в *U* и оно запишется в виде

$$u_0(M)=v_0(x,t)+c_0(x,t)\exp(\tau_2)+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}Y_{ji}^{0}(x,t)\sigma_{ji}+$$

$$+\sum_{l=1}^{2}\left\{\omega_{0l}(M_l)\exp(\tau_2)+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}z_{ji}^{0l}(M_l)\sigma_{ji}+u_{0l}(M_l)\right\},$$

где функция $v_0(x,t)$, на основании условия 5), а имеет решение, определяемое из уравнения (см. (10))

$$b(x)v_0(x,t)=-f(x,t).$$

Кроме того, функции $c_0(x,t)$, $y_{ji}^0(x,t)$ произвольны, а остальные коэффициенты функции $u_0(M)$ должны удовлетворять уравнениям

$$T_1\omega_{0l}=0,\ T_1 z_{ji}^{0l}=0,\ T_1 u_{0l}-b(t)u_{0l}=0,\ T_1=\partial_{\tau_1}-\partial_{\xi_l}^2.$$

Как показано в теореме, решения этих уравнений

$$\omega_{0l}(M_l)=\frac{\xi_l}{2\sqrt{\pi}}\omega_{0l}^0(x,t)\int_0^{\tau_1}\frac{1}{\sqrt{(\tau_1-s)^3}}\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(\tau_1-s)}\right)ds,$$

$$z_{ji}^{0l}(M_l)=\frac{\xi_l}{2\sqrt{\pi}}z_{jil}^{00}(x,t)\int_0^{\tau_1}\frac{1}{\sqrt{(\tau_1-s)^3}}\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(\tau_1-s)}\right)ds,$$

$$u_{0l}(M_l)=u_{0l}^0(x,t)I_4(\xi_l,t,\tau_1).$$

также зависят от произвольных функций. Для разрешимости уравнения (7_1) в U мы должны потребовать, чтобы L_1u_0 принадлежала классу U. По теореме 2 это условие приведет к выбору произвольных функций $c_0(x,t)$, $y^0_{j,l}(x,t)$, $\omega^0_{ol}(x,t)$, $z^{00}_{j,i,l}(x,t)$, $u^0_{0l}(x,t)$, как решение задач

$$L_2\omega_{0l}^0=0,\ L_2 z_{jil}^{00}(x,t)=0,\ L_2 u_{ol}^0(x,t)=0,$$

$$\omega_{0l}^0\big|_{x=l-1}=-c_0(l-1,t),\qquad z_{jil}^{00}(x,t)\big|_{x=l-1}=-Y_{ji}^0(l-1,t),$$

$$u_{ol}(x,t)\big|_{x=l-1}=-v_0(l-1,t),$$

$$\partial_t c_0(x,t)=0,\ c_0\big|_{t=0}=h(x)-v_0(x,0).$$

Нам осталось определить начальное условие для уравнения

$$\partial_t y^0_{ji}(x,t)=0,$$

которое достигается, если мы удовлетворим условию c) из (12). По теореме 1, условие разрешимости уравнения (7_1) в U приводит к решению уравнения

$$b(t)v_1(x,t)=\partial_t v_0+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}k_{ji}(t)y^0_{ji}(x,t). \qquad (19)$$

Чтобы обеспечить разрешимость этого уравнения, мы должны добиться выделения в правой части множителя $\prod_{j=0}^{r}(t-t_j)^{k_j}$. Это утверждение эквивалентно выполнению условия c) из (12), т.е.

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\frac{\partial^i}{\partial t^i}\left(k_{ji}(t)Y^0_{ji}(x,t)\right)\Big|_{t=t_j}=\frac{\partial^i v_0(x,t)}{\partial t^i}\Big|_{t=t_j}.$$

Последнее условие, согласно лемме Лагранжа-Сильвестра, обеспечивает разрешимость уравнения (19), а также позволяет определить $y^0_{ji}(x,t)\big|_{t=t_j}=y^{00}_{ji}(x)$ начальное условие для уравнения $\partial_t y^0_{ji}(x,t)=0$. Этим мы полностью однозначно определили главный член асимптотики.

Таким образом, мы обеспечили разрешимость уравнения (7_2), по теореме 1 его решение представимо в виде

$$u_1(M) = v_1(x,t) + C_1(x,t)\exp(\tau_2) + \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} y_{ji}^1(x,t)\sigma_{ji} +$$

$$+\sum_{l=1}^{2}\left\{\omega_{1l}(M)\exp(\tau_2) + \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} z_{ji}^{1l}(M_l)\sigma_{ji} + u_{1l}(M_l)\right\},$$

по той же теореме функции $\omega_{1l}(M_l)$, $z_{ji}^{1l}(M_l)$, $u_{1l}(M_l)$ должны удовлетворять уравнениям

$$T_1\omega_{1l} = -\partial_t \omega_{ol}^0(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}\right),\ \omega_{1l}\Big|_{t=\tau_1=0} = 0,$$

$$\omega_{1l}\Big|_{\xi_l=0} = \omega_{1l}^0(x,t) \qquad (20)$$

$$T_1 z_{ji}^{1l}(M_l) = -\partial_t z_{jil}^0(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}\right), \qquad z_{ji}^{1l}\Big|_{\tau_1=0} = 0,$$

$$z_{ji}^{1l}\Big|_{\xi_l=0} = z_{jil}^{01}(x,t),$$

$$T_1 u_{1l}(M_l) - b(t)u_{1l} = -\partial_t\left(u_{0l}^0(x,t)I_4(t,\xi_l,\tau_1)\right) - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} z_{jil}^{00}(x,t)k_{ji}(t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}\right).$$

Первые два уравнения совершенно идентичны, поэтому явный вид решения выпишем только для первой задачи

$$\omega_{1l}(M_l)=\frac{\omega^0_{1l}(x,t)}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau_1}\frac{\xi_l}{\sqrt{(\tau_1-s)^3}}\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{4(\tau_1-s)}\right)ds-$$

$$-\frac{\partial_t\omega^0_{ol}(x,t)}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau_1}\frac{erfc\left(\frac{Y}{2\sqrt{s}}\right)}{\sqrt{\tau_1-s}}ds\int_0^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{(\xi_l-Y)^2}{4(\tau_1-s)}\right)-\exp\left(-\frac{(\xi_l+Y)^2}{4(\tau_1-s)}\right)\right]dY,$$

и по необходимости, при анализе решения второй задачи, будем подразумевать $z^{1l}_{ji}(M_l)$ вместо $\omega_{1l}(M_l)$.

Вспоминая вид $I_4(t,\xi_l,\tau_1)$ и учитывая, что интеграл сходится абсолютно, мы можем дифференцировать под знаком интеграла

$$\partial_t I_4(t,\xi_l,\tau_1)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}}^{\infty}\left(\frac{\xi_l}{2s}\right)^2 b'(t)\exp\left(-s^2+b(t)\left(\frac{\xi_l}{2s}\right)^2\right)ds.$$

Оценим этот интеграл.

Лемма . Пусть выполнено условие 4). Тогда справедлива оценка

$$\left|\partial_t I_4\right|<c\,exp(-\frac{\xi_l^2}{8\tau_1}).$$

<u>*Доказательство.*</u> $\forall s\in[\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}},\infty)$ имеем, что

$\exp(-s^2) \le \exp(-\frac{\xi_l^2}{4\tau_1})$,

тогда мы получим

$$\left|\partial_t I_4\right| \le \left| \frac{2}{\sqrt{\pi}} b'(t) \exp(-\frac{\xi_l^2}{4\tau_1}) \int_{\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}}^{\infty} \left(\frac{\xi_l}{2s}\right)^2 \exp\left(b(t)\left(\frac{\xi_l}{2s}\right)^2\right) ds \right|.$$

Произведем замену

$$\frac{\xi_l}{2s} = z, s = \frac{\xi_l}{2z}, ds = -\frac{\xi_l}{2z^2} dz$$

получим

$$\left|\partial_t I_4\right| \le c\xi_l \exp(-\frac{\xi_l^2}{4\tau_1}) \int_0^{\tau_1} \exp(b(t)z^2) dz$$

По условию 4) функция $b(t) \le 0$, поэтому отсюда получим требуюмую оценку. Лемма доказана.

Используя подстановку

$$u_{1l}(M_l) = \exp\left(b(t)\tau_2\right) n_{1l}(M_l),$$

и обозначая через $H_{2l}(M_l)$ правую часть уравнения для $u_{1l}(M_l)$, относительно $n_{1l}(M_l)$ получим задачу

$$T_1 n_{1l}(M_l) = \exp\left(-b(t)\tau_1\right) H_{2l}(M_l), \qquad n_{1l}\Big|_{t=\tau_1=0} = 0,$$

$$n_{1l}\Big|_{\xi_l=0} = \exp\left(-b(t)\tau_1\right) u_{1l}^0(x,t),$$

решение которой запишется

$$n_{1l}(M_l) = \frac{u_{1l}^0(x,t)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau_1} \frac{\xi_l \exp\left(-b(t)s - \dfrac{\xi_l^2}{4(\tau_1 - s)}\right)}{\sqrt{(\tau_1 - s)^3}} ds +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau_1} \frac{\exp(-b(t)s)}{\sqrt{\tau_1 - s}} ds \int_0^{\infty} H_{2l}(x,t,Y,s) \left[\exp\left(-\frac{(\xi_l - Y)^2}{4(\tau_1 - s)}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi_l + Y)^2}{4(\tau_1 - s)}\right)\right] dY.$$

Произведя замену

1) $$z = \frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1 - s}}, \qquad dz = \frac{\xi_l ds}{4\sqrt{(\tau_1 - s)^3}},$$

$$s = \tau - \left(\frac{\xi_l}{2z}\right)^2,$$

2) $$z = \frac{\xi \pm Y}{2\sqrt{\tau_1 - s}}, \qquad dz = \pm \frac{dY}{2\sqrt{\tau_1 - s}},$$

$$Y = \xi - 2\sqrt{\tau_1 - s},$$

имеем

$$n_{1l}(M_l) = \frac{2u_{1l}^0(x,t)}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}}^{\infty} \exp\left(-b(t)\left[\tau_1 - \left(\frac{\xi_l}{2x}\right)^2\right] - z^2\right) - dz +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\tau_1}\exp(-b(t)s)ds\left[-\int_{\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1-s}}}^{-\infty}H_{2l}(\cdot)\exp(-z^2)dz-\int_{\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1-s}}}^{\infty}H_{2l}(\cdot)\exp(-z^2)dz\right].$$

Используя лемму и $\exp\left(b(t)\left(\frac{\xi_l}{2x}\right)^2\right)<1$, $\exp(-b(t)s)<\exp(-b(t)\tau_1)$, $\forall s\le\tau_1$ для функции $n_{1l}(M_l)$ не трудно установить оценку

$$|n_{1l}(M_l)|<c\exp\left(-b(t)\tau_1-\frac{\xi_l^2}{8\tau_1}\right),$$

тогда для искомой функции $u_{1l}(M_l)$ справедлива

$$|u_{1l}(M_l)|<c\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{8\tau_1}\right).$$

Далее процесс повторяется, в правых частях итерационных уравнений появится слагаемое $L_x\equiv a(x)\partial_x^2$, которое войдет дополнительным слагаемым в правые части уравнений вида (20) для $\omega_{2l}(M_l)$, $z_{ji}^{2l}(M_l)$, $u_{2l}(M_l)$ и других функций. Такая добавка в правую часть не повлияет на процесс построения решений итерационных задач для всех номеров $l\ge 2$. Методом математической индукции полностью определим все члены частичной суммы

$$u_{\varepsilon n}(M)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k\left\{v_k(x,t)+c_k(x,t)\exp(\tau_2)+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}y_{ji}^k(x,t)\sigma_{ji}+\sum_{l=1}^{2}\left[\omega_{kl}(M_l)\exp(\tau_2)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}z_{ji}^{kl}(M_l)\sigma_{ji}+u_{kl}(M_l)\right]\right\}.$$

Из оценки

$$\left|\omega_{kl}\left(M_l\right)\exp(\tau_2)\right| < c\ \exp\left(-\alpha\left(\tau_2+\frac{\xi_l^2}{8\tau_1}\right)\right),\ \ l=1{,}2,$$

устанавливаемых для функции $\omega_{k,l}(M_l)\exp(\tau_2)$, замечаем, что она описывает угловой пограничный слой в точках (0,0) и (0,1) или в исходных переменных

$$\left|\omega_{kl}(\cdot)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t b(s)ds\right)\right| < c\ \exp\left(-\alpha\left(\frac{t}{\varepsilon}+\frac{x^2}{8\varepsilon t}\right)\right).$$

Чтобы получить асимптотику решения исходной задачи произведем сужение частичной суммы при $\theta=\theta(x,t,\varepsilon)$, $\sigma = p(t,\varepsilon)$, мы получим

$$u_{\varepsilon n}\left(x,t,\theta(x,t,\varepsilon),p(t,\varepsilon)\right)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k\left\{v_k(x,t)+c_k(x,t)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t b(s)ds\right)+\right.$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}Y_{ji}^k(x,t)\int_0^t\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s b(\tau)d\tau\right)k_{ji}(s)ds+\sum_{p=1}^{2}\left[\omega_{kl}\left(x,t,\theta(x,t,\varepsilon)\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t b(s)ds\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}z_{ji}^{kl}\left(x,t,\theta(x,t,\varepsilon)\right)\int_0^t\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s b(\tau)d\tau\right)k_{ji}(s)ds+u_{kl}\left(x,t,\theta(x,t,\varepsilon)\right)\right]\right\}$$

(21)

Используя (5) и производя сужение в задаче (8), для остаточного члена

$$R_{\varepsilon n}\left(x,t,\theta(x,t,\varepsilon),p(t,\varepsilon)\right)\equiv R_{\varepsilon n}(x,t,\varepsilon)=u(x,t,\varepsilon)-u_{\varepsilon n}(x,t,\theta,p)$$

получим задачу

$$L_\varepsilon R_{\varepsilon n}(x,t,\varepsilon)=\varepsilon^{n+1}g_{\varepsilon n}(x,t,\varepsilon),$$

$$R_{\varepsilon n}\Big|_{t=0}=R_{\varepsilon n}\Big|_{x=0}=R_{\varepsilon n}\Big|_{x=1}=0.$$

Так как

$$\left|g_{\varepsilon n}(x,t,\varepsilon)\right|\le\left|\partial_t u_n\right|+\left|L_\xi u_n\right|+\left|L_x\left(u_{n-1}+\varepsilon u_n\right)\right|\le C,$$

то используя принцип максимума, получим оценку

$$\left|R_{\varepsilon n}(x,t,\varepsilon)\right| < c\varepsilon^{n+1}.$$

так, нами доказана

<u>Теорема</u> *Пусть выполнены условия 1)-5). Тогда построенное решение (21) является асимптотическим решением исходной задачи (1), т.е. для достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\left|u(x,t,\varepsilon) - u_{\varepsilon n}\big(x,t,\theta(x,t,\varepsilon), p(t,\varepsilon)\big)\right| < c\varepsilon^{n+1}, \quad \forall n = 0,\ 1,\ 2,\ldots$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Елисеев А.Г.,Ломов С.А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного опеатора.//Матем.сб. Т.131(173), № 4(12). 1986. С.544-557.

2. А.Г.Елисеев, В.Ф.Сафонов Методы асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений.-М.:МЭИ, 1990. 59 с.

3. А.Б.Васильева, В.Ф.Бутузов Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.-М.:Высшая школа,1990.-208 с.

4. А.С. Омуралиев. Регуляризованная асимптотика решения параболической задачи с двумя вязкими границами.//Наука и новые технологии. №4,1998. С.22-25.

5. Ф.Р.Гантмахер Теория матриц.-М.:ГИТТЛ,1953.-491 с.