MİNİMUM ENERJİ İLE LİNEER SİSTEMDE YÖNETİM METODU

Prof. Dr. Ramiz RAFATOV
Kırgızistan – Türkiye Manas Üniversitesi

1. Minimum Enerji ile Yönetim Probleminin Tanımı. Kabul edelim ki bir yönetim süreci aşağıdaki

$$L[x] \equiv x^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)x^{(n-i)} = f(t)u(t) + l\int_0^1 \sum_{i=0}^{n} M_i(t,s)x^{(i)}(s)ds \qquad (1)$$

Fredholm tipindeki lineer integro-diferensiyel denklemi ve

$$x(t_1) = a_1,\ x(t_2) = a_2,..., x(t_n) = a_n \qquad (2)$$

gibi sınır şartları ile tanımlanıyor. Burada l bir parametredir, $p_i(t), f(t), M_i(t,s) -$ verilen fonksiyonlardır, $0 \le t \le 1; 0 \le s \le 1; 0 \le t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n \le 1$ dir, $u(t) \in L^2[0,1]$- kabul edilebilir yönetim fonksiyonlarıdır.

Minimum enerji ile yönetim problemi aşağıdaki şekilde tanımlanıyor.

Kabul edelim ki $[0,1]$ aralığında yine bir $\{t_i\}, i = 1,..., n,$ noktaları verilmiştir: $0 \le t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = 1$, ve bu noktalarda aşağıdaki

$$x(t_1) = b_1,\ x(t_2) = b_2,..., x(t_n) = b_n \qquad (3)$$

şartlar gösterilmiştir. Kabul edilebilir $u(t) \in L^2[0,1]$ yönetim fonksiyonlarının arasında öyle bir $u = u^0(t)$ fonksiyonunu bulmak gerekir ki ona karşılık gelen ve (1), (2) sınır probleminin çözümü olan x = x(t) fonksiyonu (3) şartlarını sağlasın ve aynı zamanda

$$J[u] = \|u\|^2_{L^2[0,1]} = \int_0^1 u^2(t)dt = \min \qquad (4)$$

fonksiyonu en küçük değere sahip olsun.

2. Sınır Probleminin Çözümü hakkında. (1), (2) sınır Probleminin çözümünü bulmak için $[1]$ eserinde gösterilen yöntemleri uygulayacağız.

Eğer $p_i(t) \in C[0,1]$ ise

$$L[x] = 0 \qquad (5)$$

n-inci mertebeden lineer diferensiyel denkleminin $[0,1]$ aralığında lineer bağımsız $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ çözümleri, yani **baz** çözümleri vardır. Bu baz çözümlere karşılık gelen $W[s]$ Wronski determinantını aşağıdaki sembolle gösterelim:

$$W[s]=\begin{vmatrix} x_1(s), x_2(s), \dots\dots\dots\dots, x_n(s) \\ x_1'(s), x_2'(s), \dots\dots\dots\dots, x_n'(s) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1^{(n-1)}(s), x_2^{(n-2)}(s), \dots, x_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

$W[s]$ determinantının i – inci $x_1^{(i-1)}(s), x_2^{(i-1)}(s), \dots, x_n^{(i-1)}(s)$ satırının yerıne (5) denkleminin $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ baz çözümlerinden oluşan satırı koyarsak yeni bir determinantı elde ederiz. Bu determinantı $W_i[t,s]$ ile gösterelim. O zaman

$$W_i[t,s]=\begin{vmatrix} x_1(s), x_2(s), \dots\dots\dots\dots, x_n(s) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1^{(i-2)}(s), x_2^{(i-2)}(s), \dots\dots, x_n^{(i-2)}(s) \\ x_1(t), x_2(t), \dots\dots\dots\dots\dots, x_n(t) \\ x_1^{(i)}(s), x_2^{(i)}(s), \dots\dots\dots\dots, x_n^{(i)}(s) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1^{(n-1)}(s), x_2^{(n-2)}(s), \dots, x_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}, \; i=1,2,\dots,n \qquad (7)$$

olur.

Şimdi aşağıdaki Cauchy fonksiyonlarını ele alalım:

$$K_i(t,s)=W^{-1}[s]\cdot W_i[t,s], \quad i=1,2,\dots,n\ . \qquad (8)$$

Kolayca göstermek olur ki (6) – (8) formülleri yardımıyla tanımlanan Cauchy fonksiyonları

$$K_i^{(j)}(s,s)=\begin{cases} 1, j=i-1, ise \\ 0, j\neq i-1, ise, j=0,1,\dots,n-1 \end{cases} \qquad (9)$$

eşitliklerini sağlamaktadırlar.

Şimdi de (1),(2) sınır probleminin *özel fonksiyonlarını* inceleyelim[1]:

$$j_i(t)=\Delta^{-1}\cdot\Delta_i(t), i=1,2,\dots,n. \qquad (10)$$

Burada

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1(t_1), x_2(t_1), \dots\dots, x_n(t_1) \\ x_1(t_2), x_2(t_2), \dots\dots, x_n(t_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1(t_n), x_2(t_n), \dots\dots, x_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (11)$$

dır, $\Delta_i(t), i=1,2,\dots,n,$ ise Δ determinantının i – inci $x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_n(t_i)$ satırının yerine (5) denkleminin $x_1(t\ ), x_2(t\ ), \dots, x_n(t\ )$ baz çözümlerinden oluşan satırı koyduktan sonra meydana gelen determinanttır.

Yukarıdaki (10) eşitliklerinden

$$j_i(t_j) = d_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, ise \\ 0, i \neq j, ise \end{cases} \tag{12}$$

oldukları kolayca gösterilebilir. Burada d_{ij} - Kronecker semboludur.

Şimdi (1),(2) probleminin çözümünü

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k j_k(t) + \int_0^1 K_n(t,s)\Phi(s)ds \tag{13}$$

şeklinde yazalım. Burada $j_k(t), k = 1,2,...,n,$ (1),(2) sınır probleminin (10) formülleri ile tanımlanan özel fonksiyonlarıdır, $K_n(t,s)$ ise Cauchy'nin n-inci fonksiyonudur, $c_1, c_2, ..., c_n -$ bilinmeyen sabitlerdir, $\Phi(t)$ sembolu ile (1) integro-diferensiyel denkleminin sağ tarafı gösterilmiştir:

$$\Phi(t) = f(t)u(t) + l \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} M_i(t,s)x^{(i)}(s)ds. \tag{14}$$

$x(t)$ fonksiyonunu (13)'ten (14) eşitliğindeki yerine koyarsak $\Phi(t)$ bilinmeyen fonksiyonuna göre aşağıdaki Fredholm integral denklemini alırız:

$$\Phi(t) = f(t)u(t) + l \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(t) + l \int_0^1 H(t,s)\Phi(s)ds \, . \tag{15}$$

Burada

$$a_k(t) = \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} M_i(t,t) j_k^{(i)}(t)dt \, , k = 1,2,...,n \, , \tag{16}$$

dır,

$$H(t,s) = \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} M_i(t,t) K_n^{(i)}(t)dt \tag{17}$$

ise (15) Fredholm integral denkleminin **Çekirdeğidir.**

Kabul edelim ki l sayısı (17) eşitliği ile belirtilen $H(t,s)$ çekirdeğinin **Öz Değeri** değildir ve $R(t,s,l)$ fonksiyonu ise bu çekirdeğin **Resolventidir.** O zaman (14) Fredholm integral denkleminin çözümünü aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\Phi(t) = f(t)u(t) + l \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(t) + l \int_0^1 R(t,s,l) \left[f(s)u(s) + l \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(s) \right] ds \, .$$

Buradan da

$$\Phi(t) = f(t)u(t) + l\sum_{k=1}^{n} c_k b_k(t) + l\int_0^1 R(t,s,l)f(s)u(s)ds \tag{18}$$

eşitlğini elde ederiz. Burada

$$b_k(t) = a_k(t) + l\int_0^1 R(t,s,l)a_k(s)ds, k = 1,2,...,n \tag{19}$$

dir, $a_k(t)$, $k = 1,2,...,n,$ fonksiyonları ise (16) eşitlikleri ile gösterilmişlerdir.

$\Phi(t)$ fonksiyonunu (18)' den (13) eşitliğindeki yerine koyarsak (1), (2) sınır probleminin çözümünü aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k g_k(t) + \int_0^1 Q_n(t,t,l)f(t)u(t)dt \; . \tag{20}$$

Burada

$$g_k(t) = j_k(t) + l\int_0^1 K_n(t,s)b_k(s)ds \tag{21}$$

dir ve

$$Q_n(t,t,l) = K_n(t,t) + l\int_0^1 K_n(t,s)R(s,t,l)ds \tag{22}$$

dir.

Şimdi (20) – (22) formülleri ile belirtilen $x(t)$ fonksiyonunu (2) sınır şartlarındaki yerlerine koyarsak ve (12) eşitliklerini göz önüne alırsak aşağıdaki lineer denklem sistemini elde ederiz:

$$\sum_{k=1}^{n} (d_{ik} + l\Delta_{ik})c_k = a_i - Q_{ni}(l), i = 1,2,...,n. \tag{23}$$

Burada d_{ij} - Kronecker semboludur, Δ_{ik} aşağıda verilmiştir:

$$\Delta_{ik} = \int_0^1 K_n(t_i,s)b_k(s)ds, i,k = 1,2,...,n\,,$$

$b_k(t), k = 1,2,...,n,$ fonksiyonları ise (19) eşitlikleri ile belirtilmişlerdir,

$$Q_{ni}(l) = \int_0^1 Q_n(t_i,s,l)f(s)u(s)ds$$

dir. Buradaki $Q_n(t,s,l)$ fonksiyonu (22) formülü ile verilmiştir.

Kabul edelim ki $w = \{(d_{ik} + l\Delta_{ik})\}_{i,k}^{n}$ matrisinin determinantı $\det w \neq 0$ dır, yani w^{-1} ters matrisi vardır. Bu matrisin k-ıncı satırı ve j-inci kolonunun kesişmesinde yerleşen terimini w_{kj} ile gösterelim. O zaman (23) lineer denklem sisteminin çözümünü aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$c_k = \sum_{j=1}^{n} (a_j - Q_{nj}(l))w_{kj}, k = 1,2,...,n.$$

Şimdi bu c_k değerlerini (20) 'deki yerlerine koyarsak (1),(2) sınır probleminin çözümünü aşağıdaki şekle dönüştürürüz:

$$x(t) = \sum_{j,k=1}^{n} a_j w_{kj} g_k(t) + \int_0^1 Q_n(t,t,l) f(t) u(t) dt -$$

$$- \sum_{j,k=1}^{n} w_{kj} g_k(t) \int_0^1 Q_n(t_j,t,l) f(t) u(t) dt . \qquad (24)$$

3. Sınır Problemindeki Optimal Yönetim Düzenlemesi hakkında. Yukarıda (1),(2) sınır probleminin çözümü (24) şeklinde olduğu ispatlanmıştır ve $g_k(t), Q_n(t,s,l)$ fonksiyonlarının da (21),(22) formülleri yardımıyla tanımlandıkları gösterilmiştir. Şimdi de gösterelim ki (4) şartını ve aynı zamanda (3) sınır şartlarını sağlayan bir yönetim fonksiyonu $u(t) \in L^2[0,1]$ vardır.

Bu amaçla (24) eşitliği ile belirtilen $x(t)$ fonksiyonunu (3) şartlarındaki yerlerine koyalm. O zaman

$$b_i - \sum_{i,k=1}^{n} g_k(t_i) a_j w_{kj} =$$

$$= \int_0^1 \left\{ Q_n(t_i,s,l) - \sum_{j,k=1}^{n} g_k(t_i) w_{kj} Q_n(t_j,s,l) \right\} f(s) u(s) ds \qquad (25)$$

denklem sistemini elde ederiz. İlerideki hesaplamalarda kolaylık sağlamak için

$$A_i = b_i - \sum_{i,k=1}^{n} g_k(t_i) a_j w_{kj}, i = 1,2,...,n,$$

$$h_i(s,l) = \left\{ Q_n(t_i,s,l) - \sum_{j,k=1}^{n} g_k(t_i) w_{kj} Q_n(t_j,s,l) \right\} f(s), \ i = 1,2,...,n \qquad (26)$$

sembollerini kullanalım. O zaman (25) denklem sistemini

$$\int_0^1 h_i(s,l) u(s) ds = A_i, i = 1,2,...,n \qquad (27)$$

şekilde ,veya kısaca

$$(h_i, u) = A_i, i = 1,2,...,n \qquad (28)$$

şeklinde de yazabiliriz. Burada $(*,*)$ sembolu $L^2[0,1]$ Hilbert uzayında (27) eşitliğinin sol tarafı şeklinde tanımlanan **Skaler Çarpımdır.**

Şimdi $x_1, x_2, ..., x_n$ - keyfi reel sayılar ve $h_1, h_2, ..., h_n$ fonksiyonları ise (26) formülleri ile belirtilmiş olsunlar.

$$h = \sum_{i=1}^{n} x_i h_i \tag{29}$$

şeklinde olup da $L^2[0,1]$ uzayında bulunan **Lineer Kombinezon'**ların cümlesini H^0 ile gösterelim. Kolayca gösterile bilir ki H^0 uzayı $L^2[0,1]$ uzayınyn bir **Altuzay'**ıdır $[2,3]$.O zaman her $u \in L^2[0,1]$ elemanını tek anlamda

$$u = h + g, h \in H, g \perp H \tag{30}$$

şeklinde yazmak olur. Hem de

$$\|u\| = \|h\|^2 + \|g\|^2 \tag{31}$$

dir $[2,3]$. (28) ve (30) ifadelerinden

$$(h_i, u) = (h_i h), i = 1,2,...,n$$

eşitliklerini alırız. Burada u elemanının g bileşeni u elemanının (28) eşitliklerini sağlamasına hiçbir etki yapamaz, ama (31)'den gördüğümüz gibi g bileşeni u elemanının normunun büyümesine etki yapa bilir.

Demek minimum enerji ile yönetim probleminin çözümü $u = u^0(t)$, eğer varsa, H^0 uzayına aittir ve (29) formülü, yani

$$u^0 = \sum_{i=1}^{n} x_i h_i \tag{32}$$

formülü şeklinde gösterile bilir.

H^0 uzayının (32) şeklindeki elemanının (28) şartlarını sağladığından $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ vektörü

$$Mx = A \tag{33}$$

matris denkleminin çözümüdür. Burada $M = \{(h_i, h_j)\}_{i,j=1}^{n}$ bilinen matristir.

Gözle görülür ki (33) denkleminin bir tek çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $\{h_i(t, l)\}, i = 1,2,...,n$ fonksiyonlarının $[0,1]$ aralığında lineer bağımsız olmalarıdır. Böylece aşağıdaki teorem ıspatlanmıştır.

Teorem 1. Kabul edelim ki :

1) $p_i(t), f(t), M_i(t,s) \in C(D), (D = (0 \le t \le 1; 0 \le s \le 1))$;

2) l - parametresi (15) Fredholm integral denkleminin çekirdeği olan H(t,s) fonksiyonunun öz değeri değildir ;

3) (11) formülü ile belirtilen Δ determinantı ve (23) denklem sistemindeki bilinmeyenlerin katsayılarından oluşan w matrisinin determinantı sıfırdan farklıdırlar.

O zaman her verilen $(a_1, a_2, ..., a_n)$ ve $(b_1, b_2, ..., b_n)$ vektörleri için (2),(3) ve (4) şartlarını sağlayan (1) integro-diferensiyel denkleminin çözümünün , yani minimum enerji ile yönetim probleminin çözümünün varlığının ve tekliğinin gerek ve yeter şartı $[0,1]$ aralığında $\{h_i(t, l)\}, i = 1,2,...,n$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olmalarıdır.

4. Cauchy Problemindeki Minimum Enerji ile Yönetim hakkında. Şimdi (1) lineer integro-diferensiyel denklem için Cauchy problemini inceleyelim. Diyelim ki

$$x(0) = a_1, x'(0) = a_2, ..., x^{(n-1)}(0) = a_n \tag{34}$$

şartları verilmiş olsun. Bu (1),(34) Caushy probleminin çözümü aşağıdaki gibidir $[1]$:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j K_j(t,0) + \int_0^t K_n(t,s)\Phi(s)ds \cdot \tag{35}$$

Burada $\Phi(t)$ (14) formülü ile verilmiştir, $K_j(t,s), j = 1,2,...,n$ ise (5) denklemi için Cauchy fonksiyonlarıdırlar ve (8) formülleri ile tanımlanmışlandır.

Eğer (35) fonksiyonunu (14)‘ teki yerine koyarsak, $\Phi(t)$ fonksiyonu için

$$\Phi(t) = f(t)u(t) + l\sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} (t,s) K_j^{(i)}(s,0)ds +$$
$$+ l\int_0^1 \int_0^s \sum_{i=0}^{n} M_i(t,s) K_n^{(i)}(s,t)\Phi(t)dtds \tag{36}$$

integral denklemini alırız.

$$\tilde{a}_j(t) = \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} M_i(t,s) K_j^{(i)}(s,0)ds, j = 1,2,...,n,$$
$$\tilde{H}(t,t) = \int_t^1 \sum_{i=0}^{n} M_i(t,s) K_n^{(i)}(s,t)ds \tag{37}$$

dir. O zaman (36) integral denklemini aşağıdaki Fredholm integral denklemi şeklinde yazabiliriz:

$$\Phi(t) = f(t)u(t) + l\sum_{j=1}^{n} a_j \tilde{a}_j(t) + l\int_0^1 \tilde{H}(t,t)\Phi(t)dt. \tag{38}$$

Burada $\Phi(t)$ bilinmeyen bir fonksiyondur. Kabul edelim ki l sayısı (37) eşitliği ile belirtilen $\tilde{H}(t,t)$ çekirdeğinin öz değeri değildir, $\tilde{R}(t,t,l)$ fonksiyonu ise bu çekirdeğe karşılık gelen **Resolvent'**tir. O zaman (38) denkleminin çözümünü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\Phi(t) = l\sum_{j=1}^{n} a_j\left[\tilde{a}_j(t) + l\int_0^1 \tilde{R}(t,t,l)\tilde{a}_j(t)dt\right] +$$
$$+ f(t)u(t) + l\int_0^1 \tilde{R}(t,t,l)f(t)u(t)dt$$

veya

$$\Phi(t) = l\sum_{j=1}^{n} a_j\tilde{b}_j(t) + f(t)u(t) + l\int_0^1 \tilde{R}(t,t,l)f(t)u(t)dt \,. \tag{39}$$

Burada

$$\tilde{b}_k(t) = \tilde{a}_k(t) + l\int_0^1 \tilde{R}(t,s,l)\tilde{a}_k(s)ds,\, k = 1,2,\ldots,n$$

dir. Eğer (39) formülü yardımıyla belirtilen $\Phi(t)$ fonksiyonunu (35)' teki yerine kondurursak

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j K_j(t,0) + \int_0^t K_n(t,s)\{\ \ l\sum_{j=1}^{n} a_j\tilde{b}_j(s) +$$
$$+ f(s)u(s) + l\int_0^1 \tilde{R}(s,t,l)f(t)u(t)dt\ \ \}ds$$

yi veya

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j\left\{K_j(t,0) + l\int_0^t K_n(t,s)\tilde{b}_j(s)ds\right\} +$$
$$+ \int_0^t K_n(t,s)f(s)u(s)ds + \tag{40}$$
$$+ l\int_0^t K_n(t,s)\int_0^1 \tilde{R}(s,t,l)f(t)u(t)dtds$$

eşitliğini alırız.

$$K_j(t,0) + l\int_0^t K_n(t,s)\tilde{b}_j(s)ds = \tilde{g}_j(t)$$

dersek (40) eşitliği

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j\tilde{g}_j(t) + \int_0^t K_n(t,s)f(s)u(s)ds +$$
$$+ l\int_0^t K_n(t,s)\int_0^1 \tilde{R}(s,t,l)f(t)u(t)dtds \tag{41}$$

eşitliğine dönüşür.

5. Cauchy Problemi için Minimum Enerji ile Yönetim. Kabul edelim ki $[0,1]$ aralığının sağ ucunda, yani $t=1$ noktasında

$$x(1)=b_1, x'(1)=b_2, ..., x^{(n-1)}(1)=b_n \tag{42}$$

şartları gösterilmiştir. Buradaki minimum enerji ile yönetim problemini aşağıdaki şekilde tanımlaya biliriz:

$u(t)\in L^2[01]$ kabul edilebilir yönetim fonksiyonlarının arasında öyle bir $u=u^0(t)$ yönetim fonksiyonunu bulmak gerekir ki ona karşılık gelen (1), (34) Cauchy probleminin çözümü olan ve (41) formülü ile verilen $x=x(t)$ fonksiyonu (42) şartlarını sağlasın hem de aynı zamanda (4) fonksiyonu en küçük değere sahip olsun.

Gereken ifadeleri elde etmek için (41) eşitliğinin her iki tarafından (n-1) – inci mertebeden türevlerini bulduktan sonra $K_n(t,s)$' in, yani Cauchy fonksiyonlarının (9) eşitlikleriyle verilen özelliklerini göz önüne alırsak, aşağıdaki eşitliklere sahip oluruz:

$$x^{(i)}(t)=\sum_{j=1}^{n} a_j\widetilde{g}_j^{(i)}(t)+\int_0^t K_n^{(i)}(t,s)f(s)u(s)ds+$$
$$+l\int_0^t K_n^{(i)}(t,s)\int_0^1 \widetilde{R}(s,t,l)f(t)u(t)dtds,\ i=1,2,...,n-1.$$

Buradan ve (41), (42) eşitliklerinden

$$\widetilde{b}_i-\sum_{j=1}^{n} a_j\widetilde{g}_j^{(i-1)}(1)=\int_0^1 K_n^{(i-1)}(1,s)f(s)u(s)ds+$$
$$+l\int_0^1 K_n^{(i-1)}(1,s)\int_0^1 \widetilde{R}(s,t,l)f(t)u(t)dtds,\ i=1,2,...,n$$

veya

$$\widetilde{A}_i=\int_0^1\left[K_n^{(i-1)}(1,s)+l\int_0^1 K_n^{(i-1)}(1,t)\widetilde{R}(t,s,l)dt\right]f(s)u(s)ds \tag{43}$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada

$$\widetilde{A}_i=\widetilde{b}_i-\sum_{j=1}^{n} a_j\widetilde{g}_j^{(i-1)}(1),\ \ i=1,2,...,n$$

dir. Şimdi

$$\widetilde{h}_i(s,l)=\left[K_n^{(i-1)}(1,s)+l\int_0^1 K_n^{(i-1)}(1,t)\widetilde{R}(t,s,l)dt\right]f(s),\ i=1,2,...,n$$

alırsak (43) eşitliklerini aşağıdaki integral eşitlikleri şeklinde yaza biliriz:

$$\int_0^1 \tilde{h}_i(s, l)u(s)ds = \tilde{A}_i, \quad i = 1,2,...,n \tag{44}$$

Yukarıdaki (44) şartlarını

$$(\tilde{h}_i, u) = \tilde{A}, \quad i = 1,2,...,n \tag{45}$$

gibi **Moment** eşitlikleri şeklinde de yaza biliriz. Burada $(\tilde{h}_i, u) = \int_0^1 \tilde{h}_i(s, l)u(s)ds$, $L^2[0,1]$ Hilbert uzayındaki **Skaler Çarpımdır**.

Yukarıda 3. Madde'deki düşüncelere benzer şekilde buradaki (1),(34) Cauchy problemi için de minimum enerji ile yönetimi bulabiliriz. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 2. Kabul edelim ki:

1) $p_i(t), f(t), M_i(t,s) \in C(D), (D = (0 \le t \le 1; 0 \le s \le 1))$;

2) l - parametresi (38) Fredholm integral denkleminin çekirdeği olan $\tilde{H}(t,s)$ fonksiyonunun öz değeri değildir;

O zaman her verilen $(a_1, a_2,..., a_n)$ ve $(b_1, b_2,..., b_n)$ vektörleri için (34), (40) ve (4) şartlarını sağlayan (1) integro-diferensiyel denkleminin çözümünün , yani minimum enerji ile yönetim probleminin çözümünün varlığının ve tekliğinin gerek ve yeter şartı $[0,1]$ aralığında $\{\tilde{h}_i(t, l)\}, i = 1,2,...,n$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olmalarıdır.

Bu halde yukarıdaki (45) moment denklem sisteminin çözümü

$$u = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{h}_i$$

gibidir. Burada $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2,..., \tilde{x}_n)$ vektörü

$$\tilde{M}\tilde{x} = \tilde{A}$$

matris denkleminin çözümüdür,

$$M = \{(\tilde{h}_i, \tilde{h}_j)\}_{i,j=1}^{n}$$

matrisi ise bilinen matristir.

KAYNAKLAR

1. K. KASIMOV. Vestnik KGNU. **Asimptotiçeskiye, topologiçeskiye i komp'yuternıye metodı v matematike**.Trudı Mejdunarodnoy nauçhnoy konferensii,posvyşhennoy 70-letiyu akademika M.İ. İmanaliyeva. Seriya 3. Vıpusk 6. Bishkek . 2001. p. 21- 23.
2. A. EGOROV, R. RAFATOV. **Matematiçeskiye metodı optimizasii Prosessov Teploprovodnosti i Difuzii**. İzd. İlim, Bişkek, 1990. 337.
3. E. HABIBZADE. **Fonksiyonel Analiz**. 'Maarif' neşriyatı. Bakı – 1978. s.86-122.