МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Доц. И. КАРАСАЕВ
Технологический университет «Дастан»

К линейным динамическим системам примыкают явление параметрического резонанса и теория электрических машин с параметрическим возбуждением.

В данной работе ставится задача об асимптотической и неограниченной устойчивости, что позволяет установить динамическую устойчивость параметрического резонанса и работ электрических машин.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha\frac{dx}{dt}+\left(1+\lambda\cos\frac{2\pi}{T}t\right)x=0 \qquad (\alpha>0,\quad 0<\lambda<1), \tag{1}$$

которое встречается при изучении теорий параметрического резонанса и электрических машин с параметрическим возбуждением [1]. К уравнению такого вида сводятся многие задачи динамической устойчивости упругих систем, когда учитывается трение, пропорциональное скорости [2].

Вводим новое независимое переменное $\tau = 2\pi t / T$. Тогда уравнение (1) имеет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dy}{dt}+c(1+\lambda\cos\tau)y=0, \tag{2}$$

где

$$a=\frac{T\alpha}{2\pi},\quad c=\frac{T^2}{4\pi^2}. \tag{*}$$

С помощью следующей подстановки

$$y=z\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t p(t_1)dt_1\right)$$

уравнение (2) сведём к виду

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\left[\frac{c\lambda}{2}e^{-i\tau}+\left(c-\frac{a^2}{4}\right)+\frac{c\lambda}{2}e^{i\tau}\right]z=0.$$

Этому уравнению соответствует следующий главный минор 3–го порядка бесконечной нормальной матрицы

$$\left\|\begin{matrix} 1-c+\frac{a^2}{4} & -\frac{c\lambda}{2} & 0 \\ -\frac{c\lambda}{2} & \frac{a}{4}-c & -\frac{c\lambda}{2} \\ 0 & -\frac{c\lambda}{2} & 1-c+\frac{a^2}{4} \end{matrix}\right\|,$$

определитель которой имеет следующий вид

$$d=\left(1-c+\frac{a^2}{4}\right)\left[\left(\frac{a^2}{4}-c\right)^2+\left(\frac{a^2}{4}-c\right)-\frac{c^2\lambda^2}{2}\right].$$

От параметров α, λ требуем, чтобы выполнялись следующие условия

$$\pi^2\left(1-c+\frac{a^2}{4}\right)>1, \tag{3}$$

$$\left(\frac{a^2}{4}-c\right)^2+\left(\frac{a^2}{4}-c\right)-\frac{\lambda^2c^2}{2}>1, \tag{4}$$

Из (3) получаем

$$\frac{4\pi^2-T^2}{T^2}+\frac{\alpha^2}{4}>\frac{4}{T^2}$$

или

$$\alpha^2>4+\frac{16}{T^2}\left(1-\pi^2\right),\quad 1-\pi^2<0. \tag{5}$$

Пользуясь тем, что α произвольное положительное число, потребуем, чтобы $\alpha^2>4$.

Тогда неравенство (5) будет выполнено, следовательно, будет выполнено и (3).

Далее, неравенство (4) будет выполнено, если потребуем, чтобы выполнялось

$$\frac{a^2}{4}-c>\frac{1}{2}\left(\sqrt{5+2\lambda^2c^2}-1\right)$$

или

$$\alpha^2>4+\frac{8\pi^2}{T^2}\left(\frac{\sqrt{80\pi^4+2\lambda^2T^4}}{4\pi^2}-1\right).$$

Легко заметить, что

$$2<\frac{\sqrt{80\pi^4+2\lambda^2T^4}}{4\pi^2}<3,$$

или

$$1 < \frac{\sqrt{80\pi^4 + 2\lambda^2 T^4}}{4\pi^2} - 1 < 2.$$

Можно потребовать, чтобы

$$\alpha^2 > 4 + \frac{16\pi^2}{T^2}. \tag{6}$$

Тогда будет выполнено неравенство (4).

При выполнении (6) будут выполнены (4) и $\alpha^2 > 4,$ следовательно и (3).

Таким образом, достаточно потребовать от α выполнение неравенства (6). Тогда имеем

$$\pi^2\left(1 - c + \frac{a^2}{4}\right)\left[\left(\frac{a^2}{4} - c\right)^2 + \left(\frac{a^2}{4} - c\right) - \frac{\lambda^2 c^2}{2}\right] > 1$$

или

$$\pi^2\left(1 - c + \frac{a^2}{4}\right)\left[\left(\frac{a^2}{4} - c\right)^2 + \left(\frac{a^2}{4} - c\right) - \frac{\lambda^2 c^2}{2}\right] - 1 > 0.$$

Очевидно, что

$$0 < \sqrt{\pi^2 d} - \sqrt{\pi^2 d - 1} = \sqrt{\pi^2\left(1 - c + \frac{a^2}{4}\right)\left[\left(\frac{a^2}{4} - c\right)^2 + \left(\frac{a^2}{4} - c\right) - \frac{\lambda^2 c^2}{2}\right]} - \\ - \sqrt{\pi^2\left(1 - c + a^2\right)\left[\left(\frac{a^2}{4} - c\right)^2 + \left(\frac{a^2}{4} - c\right) - \frac{\lambda^2 c^2}{2}\right]} < 1. \tag{7}$$

Тогда показатели Ляпунова [4]

$$\lambda_1 = \frac{1}{\pi}\ln\left[\sqrt{\pi^2\left(1 - c + a^2\right)\left[\left(\frac{a^2}{4} - c\right)^2 + \left(\frac{a^2}{4} - c\right) - \frac{\lambda^2 c^2}{2}\right]} - \right. \\ \left. - \sqrt{\pi^2\left(1 - c + a^2\right)\left[\left(\frac{a^2}{4} - c\right)^2 + \left(\frac{a^2}{4} - c\right) - \frac{\lambda^2 c^2}{2}\right] - 1}\right]$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1 = -\frac{1}{\pi}\ln\left[\sqrt{\pi^2\left(1-c+a^2\right)\left[\left(\frac{a^2}{4}-c\right)^2+\left(\frac{a^2}{4}-c\right)-\frac{\lambda^2c^2}{2}\right]}-\right.$$
$$\left.-\sqrt{\pi^2\left(1-c+a^2\right)\left[\left(\frac{a^2}{4}-c\right)^2+\left(\frac{a^2}{4}-c\right)-\frac{\lambda^2c^2}{2}\right]-1}\right]$$

для уравнения (1).

Тогда показателями для данного уравнения (1) будут $\lambda_1-\frac{\alpha}{2}$ и $-\lambda_2-\frac{\alpha}{2}$.

Так как $\alpha>0$ - произвольное число, удовлетвораяющее неравенству (6), то мы можем потребовать, чтобы

$$\lambda_1-\frac{\alpha}{2}<0, \qquad -\lambda_2-\frac{\alpha}{2}<0,$$

откуда имеем

$$-\frac{\alpha}{2}<\lambda_1<\frac{\alpha}{2} \tag{8}$$

или

$$-\frac{\alpha}{2}<\frac{1}{\pi}\ln\left\{\sqrt{\pi^2\left(1-c+a^2\right)\left[\left(\frac{a^2}{4}-c\right)^2+\left(\frac{a^2}{4}-c\right)-\frac{\lambda^2c^2}{2}\right]}-\right.$$
$$\left.-\sqrt{\pi^2\left(1-c+a^2\right)\left[\left(\frac{a^2}{4}-c\right)^2+\left(\frac{a^2}{4}-c\right)-\frac{\lambda^2c^2}{2}\right]-1}\right\}<\frac{\alpha}{2}$$

$$\exp\left(-\frac{\pi\alpha}{2}\right)<\sqrt{\pi^2\left(1-c+a^2\right)\left[\left(\frac{a^2}{4}-c\right)^2+\left(\frac{a^2}{4}-c\right)-\frac{\lambda^2c^2}{2}\right]}-$$
$$-\sqrt{\pi^2\left(1-c+a^2\right)\left[\left(\frac{a^2}{4}-c\right)^2+\left(\frac{a^2}{4}-c\right)-\frac{\lambda^2c^2}{2}\right]-1}<\exp\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), \tag{9}$$

и наоборот, из (9) следует (8).

Таким образом, неравенство (9) есть необходимое и достаточное условие неограниченной устойчивости, а это перекрывает асимптотическую устойчивость [5].

Отметим, что доказательство устойчивости в данном случае оказалось намного проще, чем в случае [3], где доказано только необходимое условие асимптотической устойчивости, причем проведено нудно и громоздко.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА. В области $V(a,c,\lambda,)$ пространства, определяемой неравенствами

$$\begin{cases} 0<\lambda<1, \\ \left(\dfrac{a^2}{4}-c\right)^2+\left(\dfrac{a^2}{4}-c\right)-\dfrac{\lambda^2c^2}{2}>1, \\ \pi^2\left(1-c+\dfrac{a^2}{4}\right)>1, \\ \alpha^2>4+\dfrac{16\pi^2}{T^2} \end{cases}$$

необходимым и достаточным условием асимптотической и неограниченной устойчивостей является выполнение неравенства

$$\exp\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)<\sqrt{\pi^2\left(1-c+\frac{a^2}{4}\right)\left[\left(\frac{a^2}{4}-c\right)^2+\left(\frac{a^2}{4}-c\right)-\frac{\lambda^2c^2}{2}\right]}-$$

$$-\sqrt{\pi^2\left(1-c+\frac{a^2}{4}\right)\left[\left(\frac{a^2}{4}-c\right)^2+\left(\frac{a^2}{4}-c\right)-\frac{\lambda^2c^2}{2}\right]-1}<\exp\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right).$$

Следуя Айзерману М.А. [5], нестационарную линейную динамическую систему, описываемую уравнением свободных колебаний (1) будем называть неограниченно устойчивой, если

$$x\to 0,\qquad \frac{dx}{dt}\to 0 \text{ при } t\to+\infty.$$

Для данной динамической системы, описываемой уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha\frac{dx}{dt}+\left(1+\lambda\cos^2\frac{2\pi t}{T}\right)x=0,$$

это следует из общего решения

$$x=c_1e^{\left(\lambda_1-\frac{\alpha}{2}\right)t}+c_2e^{\left(-\lambda_2-\frac{\alpha}{2}\right)t},$$

где

$$\lambda_1-\frac{\lambda}{2}<0,\qquad -\lambda_2-\frac{\alpha}{2}<0.$$

Известно, что по методу Ляпунова, асимтотическая устойчивость в первом приближении, в пространстве параметров $ac\lambda$ определялась неравенством ([3], м.с.488 – 511):

$$\pi c \leq acth\, \pi a. \tag{10}$$

Заметим, что область неограниченной устойчивости $V(a, c, \lambda,)$ вложена в область асимптотической устойчивости, определяемой неравенством (10), но зато, $V(a, c, \lambda,)$ есть область неограниченной устойчивости, а это перекрывает асимтотическую устойчивость [3] см. (3.78). При нарушении неравенства (8), т.е. когда старший показатель положителен, имеет место неустойчивость [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. АНДРОНОВ А.А. **Собрание трудов**, АН СССР, 1956.
2. БЕЙЛИН Е.А., ДЖАНЕЛИДЗЕ Г.Ю. **Обзор работ по динамической устойчивости упругих систем**// ПММ, 1952, **16. –** Вып.5. – с. 635-648.
3. ЯКУБОВИЧ В.А., СТАРЖИНСКИЙ В.М. **Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения**. М.:Наука, 1972. – с. 511–512 .
4. КАРАСАЕВ И.К. **Поведение характеристических показателей Ляпунова в зависимости от малого параметра**// Функционально-дифференциальные и операторные уравнения смешанного типа. Сборник научных трудов. Фергана. Издательство ФЕРГУ. 2000. г. С.33-41.
5. АЙЗЕРМАН М.А. **Достаточное условие устойчивости одного класса динамических систем с переменными параметрами**// ПММ, 1951, 15. – Вып.3. – с. 382-384.