МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД МАТРИЧНЫХ ВЕСОВЫХ И СРЕЗЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ В КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ВОЛЬТЕРРОВЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Доц., док. С. ИСКАНДАРОВ
Институт математики НАН Кыргызской Республики

Известно [1, с.302], что качественная теория дифференциальных уравнений изучает такие свойства решений, как колебательность, устойчивость и т.п., не связанные с их конкретным аналитическим выражением. Это относится и к качественной теории интегро-дифференциальных уравнений.

В настоящей работе с использованием идей работ [2, с.199; 3-9] развивается модифицированный метод матричных весовых и срезывающих функций для установления достаточных условий типа немалости членов (комбинации условий типа знака функций и абсолютной сходимости несобственных интегралов) асимптотического представления, ограниченности на бесконечном полуинтервале $J=[t_0, \infty)$, принадлежности пространству $L^p(J,R^n)$ $(p>0)$, стремления к нулю при $t\to\infty$, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, решений и их первых и вторых производных n-мерной системы слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка типа Вольтерра вида

$$\begin{aligned} &A_3(t)x'''(t)+A_2(t)x''(t)+A_1(t)x'(t)+A_0(t)x(t)+\\ &+\int_{t_0}^{t}[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)]d\tau=f(t)+\\ &+F(t,x(t),x'(t),x''(t),\int_{t_0}^{t}H(t,\tau,x(\tau),x'(\tau),x''(\tau))d\tau),\ \ t\ge t_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t)=\{x_i(t)\}$ - $n\times 1$ неизвестная векторная функция, $A_k(t)$ $(k=0,1,2,3)$, $Q_\nu(t,\tau)$ $(\nu=0,1,2)$ – заданные $n\times n$ матричные функции, $f(t)$, $F(t,x,y,z,u)$ – заданные $n\times 1$ векторные функции, $H(t,\tau,x,y,z)$ – заданная $p\times 1$ векторная функция.

Всюду в настоящей работе все фигурирующие функции и функционал являются непрерывными при $t\ge t_0$, $t\ge\tau\ge t_0$, $||x||$, $||y||$, $||z||$, $||u||<\infty$ и соотношения имеют место при $t\ge t_0$, $t\ge\tau\ge t_0$; нормы $||x||$ и $||A||$ для $n\times 1$ вектора $x=\{x_i\}$ и $n\times n$ матрицы $A=[a_{ik}]$ означают (см., например, [10, с.142; 11, с.10]):

$\| x \|=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}$ и $\| A \|=\sqrt{\gamma}$ где γ - наибольшее собственное значение матрицы $A^T A$, причем справедливо соотношение $\gamma \leq \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^2$, A^T - транспонированная для матрицы $A=[a_{ik}]$, т.е. $A^T=[a_{ki}]$; соотношения для матриц понимаются как соотношения для их квадратичных форм с любым ненулевым вектором; под (x,y) понимается скалярное произведение $n\times 1$ векторов $x=\{x_i\}$, $y=\{y_i\}$: $(x,y)=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$; СИДУ – система интегро-дифференциальных уравнений; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение; ДУ – дифференциальное уравнение; ФДУ - функционально-дифференциальное уравнение.

На функции $F(t,x,y,z,u)$, $H(t,\tau,x,y,z)$ налагается следующее условие “слабой нелинейности”:

$$\| F(t,x,y,z,u)\| \leq g_0(t)\|x\|+ g_1(t)\|y\|+ g_2(t)\|z\|+ g_3(t)\|u\|,$$

$$\| H(t,\tau,x,y,z)\| \leq h_0(t,\tau)\|x\|+ h_1(t,\tau)\|y\|+ h_2(t,\tau)\|z\| \qquad \text{(L)}$$

с неотрицательными “коэффициентами” Липшица $g_k(t)$ ($k=0,1,2,3$), $h_\nu(t,\tau)$ ($\nu=0,1,2$).

При выполнении условия (L) СИДУ (1) имеет решение $x(t)\in C^3(J,R^n)$ с любыми начальными данными $x^{(\nu)}(t_0)$ $(\nu=0,1,2)$.

Отметим, что вопрос об асимптотическом представлении, ограниченности и принадлежности пространству $L^2(J,R)$ решений и их первых и вторых производных ИДУ вида (1) ранее изучался в [12-14] методом сравнения с решениями ДУ, в [15] методом возведения уравнений в квадрат и при других условиях. Модифицированный метод срезывающих функций для одного класса ИДУ третьего порядка типа Вольтерра развит в работе автора [16]. В работе автора [17] развит модифицированный метод матричных срезывающих функций для частного случая СИДУ (1) для изучения аналогичных, как в настоящей работе, асимптотических свойств ее решений и их первых и вторых производных.

В настоящей работе обобщаются результаты работы автора [17]. В случае скалярного неоднородного ИДУ вида

$$x'''(t)+\sum_{k=0}^{2}[a_k(t)x^{(k)}(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)Q_k(\tau)x^{(k)}(\tau)d\tau]=f(t)+F_1(t;x),\quad t\geq t_0, \qquad (2)$$

где $a_k(t)$, $K(t,\tau)$, $Q_k(t)$, $f(t)$ $(k=0,1,2)$ – заданные функции, $F_1(t;x)$ - заданный функционал, показывается, что решения и их первые и вторые производные соответствующего ФДУ третьего порядка

$$x'''(t)+\sum_{k=0}^{2}a_k(t)x^{(k)}(t)=f(t)+F_1(t;x),\quad t\geq t_0 \qquad (2_0)$$

и ДУ третьего порядка

$$x'''(t)+\sum_{k=0}^{2}a_k(t)x^{(k)}(t)=f(t),\quad t\geq t_0 \qquad (2_{00})$$

могут не обладать изучаемыми асимптотическими свойствами, т.е. выявляется влияние интегральных возмущений типа Вольтерра на асимптотические свойства решений и их первых и вторых производных линейного ДУ третьего порядка. Этот вопрос ранее никем не изучался.

Пусть $\Phi_0(t)$, $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ – некоторые n×n матричные весовые функции. Пусть существует обратная матрица $\Phi_2^{-1}(t)$, т.е. $\Phi_2(t)$ - неособенная матрица. Тогда аналогично, как в [4], получаем следующее соотношение:

$$Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)=K(t,\tau)[\Phi_0(\tau)x(\tau)+\Phi_1(\tau)x'(\tau)+ \\ +\Phi_2(\tau)x''(\tau)]+Q(t,\tau)x(\tau)+P(t,\tau)x'(\tau), \qquad (3)$$

где $K(t,\tau)\equiv Q_2(t,\tau)\Phi_2^{-1}(\tau)$, $Q(t,\tau)\equiv Q_0(t,\tau)-Q_2(t,\tau)\Phi_2^{-1}(\tau)\Phi_0(\tau)$,

$P(t,\tau)\equiv Q_1(t,\tau)-Q_2(t,\tau)\Phi_2^{-1}(\tau)\Phi_1(\tau)$.

С учетом соотношения (3) СИДУ (1) запишем в следующем эквивалентном виде:

$$A_3(t)x'''(t)+A_2(t)x''(t)+A_1(t)x'(t)+A_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)[\Phi_0(\tau)x(\tau)+ \\ +\Phi_1(\tau)x'(\tau)+\Phi_2(\tau)x''(\tau)]d\tau=f(t)+F(t;x), \quad t\ge t_0, \qquad (4)$$

где

$$F(t;x)\equiv F(t,x(t),x'(t),x''(t),\int_{t_0}^{t}H(t,\tau,x(\tau),x'(\tau),x''(\tau))d\tau), \ \ t\ge t_0.$$

Рассмотрим следующий дифференциальный оператор из СИДУ (4):

$$(Ax)(t)\equiv A_3(t)x'''(t)+A_2(t)x''(t)+A_1(t)x'(t)+A_0(t)x(t). \qquad (5)$$

Теперь идею модифицированного метода преобразования из [5,6] развиваем для оператора (5). Дифференциальный оператор (5) скалярно умножаем на аддитивный вектор $(\Phi x)(t)\equiv\Phi_0(t)x(t)+\Phi_1(t)x'(t)+\Phi_2(t)x''(t)$. Тогда получаем

$$(Ax,\Phi x)(t)\equiv(B_3(t)x(t),x'''(t))+(B_2(t)x(t),x''(t))+(B_1(t)x(t),x'(t))+ \\ +(C_3(t)x'(t),x'''(t))+(C_2(t)x'(t),x''(t))+(C_1(t)x'(t),x'(t))+(A_2^T(t)\Phi_2(t)x''(t),x''(t))+ \\ +(A_0^T(t)\Phi_0(t)x(t),x(t))+(A_3^T(t)\Phi_2(t)x''(t),x'''(t)), \qquad (6)$$

где $B_3(t)\equiv A_3^T(t)\Phi_0(t)$, $B_2(t)\equiv A_2^T(t)\Phi_0(t)+\Phi_2^T(t)A_0(t)$,

$B_1(t)\equiv A_1^T(t)\Phi_0(t)+\Phi_1^T(t)A_0(t)$, $C_3(t)\equiv A_3^T(t)\Phi_1(t)$,

$C_2(t) \equiv A_2^T(t)\Phi_1(t) + \Phi_2^T(t)A_1(t)$, $C_1(t) \equiv A_1^T(t)\Phi_1(t)$.

Интегрированием по частям имеем

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{t}(B_3(s)x(s), x'''(s))ds = (B_3(t)x(t), x''(t)) - (B_3(t_0)x(t_0), x''(t_0)) - \\ -\int_{t_0}^{t}(B_3'(s)x(s), x''(s))ds - \int_{t_0}^{t}(B_3(s)x'(s), x''(s))ds,\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{t}(B_4(s)x(s), x''(s))ds = (B_4(t)x(t), x'(t)) - (B_4(t_0)x(t_0), x'(t_0)) - \\ -\int_{t_0}^{t}(B_4'(s)x(s), x'(s))ds - \int_{t_0}^{t}(B_4(s)x'(s), x'(s))ds,\end{gathered} \tag{8}$$

где $B_4(t) \equiv B_2(t) - B_3'(t),$

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{t}(C_3(s)x'(s), x'''(s))ds = (C_3(t)x'(t), x''(t)) - (C_3(t_0)x(t_0), x''(t_0)) - \\ -\int_{t_0}^{t}(C_3'(s)x'(s), x''(s))ds - \int_{t_0}^{t}(C_3(s)x''(s), x''(s))ds.\end{gathered} \tag{9}$$

Интегрируем соотношение (6) в пределах от t_0 до t и с учетом преобразований (7)-(9) получаем

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{t}(Ax, \Phi x)(s)ds = (B_3(t)x(t), x''(t)) + (B_4(t)x(t), x'(t)) + (C_3(t)x'(t), x''(t)) + \\ +\int_{t_0}^{t}(B_5(s)x(s), x'(s))ds + \int_{t_0}^{t}(B_6(s)x'(s), x''(s))ds + \int_{t_0}^{t}(B_7(s)x'(s), x'(s))ds + \\ +\int_{t_0}^{t}(B_8(s)x''(s), x''(s))ds + \int_{t_0}^{t}(A_0^T(s)\Phi_0(s)x(s), x(s))ds + \int_{t_0}^{t}(A_4(s)x''(s), x'''(s))ds - c,\end{gathered} \tag{10}$$

где

$B_5(t) \equiv B_1(t) - B_4'(t), \quad B_6(t) \equiv C_2(t) - B_3(t) - C_3'(t), \quad B_7(t) \equiv C_1(t) - B_4(t),$

$B_8(t) \equiv A_2^T(t)\Phi_2(t) - C_3(t), \quad A_4(t) \equiv A_3^T(t)\Phi_2(t), \quad c = (B_3(t_0)x(t_0), x''(t_0)) +$
$+ (B_4(t_0)x(t_0), x'(t_0)) + (C_3(t_0)x'(t_0), x''(t_0)).$

Пусть матрицы $B_5(t),\ B_6(t),\ A_4(t)$ - симметрические. Тогда интегрирование по частям дает следующие соотношения:

$$\int_{t_0}^{t}(B_5(s)x(s), x'(s))ds = \frac{1}{2}(B_5(t)x(t), x(t)) - \frac{1}{2}(B_5(t_0)x(t_0), x(t_0)) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(B_5'(s)x(s), x(s))ds, \tag{11}$$

$$\int_{t_0}^{t}(B_6(s)x'(s), x''(s))ds = \frac{1}{2}(B_6(t)x'(t), x'(t)) - \frac{1}{2}(B_6(t_0)x'(t_0), x'(t_0)) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(B_6'(s)x'(s), x'(s))ds, \tag{12}$$

$$\int_{t_0}^{t}(A_4(s)x''(s), x'''(s))ds = \frac{1}{2}(A_4(t)x''(t), x''(t)) - \frac{1}{2}(A_4(t_0)x''(t_0), x''(t_0)) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(A_4'(s)x''(s), x''(s))ds. \tag{13}$$

Введем обозначения: $D_0(t) \equiv 2A_0^T(t)\Phi_0(t) - B_5'(t)$, $D_1(t) \equiv 2B_7(t) - B_6'(t)$, $D_2(t) \equiv 2B_8(t) - A_4'(t).$

С учетом соотношений (11)-(13) и этих обозначений из (10) имеем

$$\int_{t_0}^{t}(Ax, \Phi x)(s)ds = 2(B_3(t)x(t), x''(t)) + 2(B_4(t)x(t), x'(t)) + 2(C_3(t)x'(t), x''(t)) + (B_5(t)x(t), x(t)) + (B_6(t)x'(t), x'(t)) + (A_4(t)x''(t), x''(t)) + \int_{t_0}^{t}\sum_{k=0}^{2}(D_k(s)x^{(k)}(s), x^{(k)}(s))ds - c^*, \tag{14}$$

где

$c^* = 2(B_3(t_0)x(t_0), x''(t_0)) + 2(B_4(t_0)x(t_0), x'(t_0)) + 2(C_3(t_0)x'(t_0), x''(t_0)) +$
$+ (B_5(t_0)x(t_0), x(t_0)) + (B_6(t_0)x'(t_0), x'(t_0)) + (A_4(t_0)x''(t_0), x''(t_0)).$

Введем предположения и обозначения:

$$K(t,\tau)=\sum_{j=1}^{m}K_j(t,\tau),\quad f(t)=\sum_{j=1}^{m}f_j(t), \qquad (K), (f)$$

(S_j) ($j=1...m$) - некоторые срезывающие неособенные $n\times n$ матричные функции, $R_j(t,\tau)\equiv(S_j^{-1}(t))^T\Phi^T(t)K_j(t,\tau)S_j^{-1}(\tau)$ - симметрические матрицы,

$r_j(t)\equiv(S_j^{-1}(t))^T\Phi^T(t)f_j(t)$,

$$R_j(t,t_0)=M_j(t)+T_j(t)\quad (j=1...m), \qquad (R)$$

$c_j(t)$ $(j=1...m)$ - некоторые скалярные функции.

Замечание 1. Отметим, что если $\Phi(t)=[\varphi_i(t)]$ - $n\times n$ диагональная, $S_j(t)=[\psi_{ij}(t)]$ $(j=1...m)$ $n\times n$ диагональные матричные функции, то $R_j(t,\tau)=[\varphi_i(t)K_{ikj}(t,\tau)(\psi_{ij}(t)\psi_{kj}(\tau))^{-1}]$, $r_j(t)=\{\varphi_i(t)f_{ij}(t)(\psi_{ij}(t))^{-1}\}$ $(j=1...m)$ для матрицы $K(t,\tau)=[K_{ik}(t,\tau)]$, вектора $f(t)=\{f_i(t)\}$, соответственно. В этом случае можно показать, что неособенность от срезывающих матричных функций $S_j(t)$ не требуется.

Для произвольно фиксированного решения $x(t)$ умножаем СИДУ (4) скалярно на аддитивный вектор $(\Phi x)(t)\equiv\Phi_0(t)x(t)+\Phi_1(t)x'(t)+\Phi_2(t)x''(t)$, затем интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом учитываем преобразование (14) (для дифференциального оператора (5)), с учетом условий (K), (f), вводим функции $S_j(t),\ R_j(t,\tau),\ r_j(t)$ [7], используем для интегральной формы с матрицей $R_j(t,\tau)$ равенство 2[8], интегрируем по частям интеграл с вектором $r_j(t)$, с учетом условия (R) вводим, аналогично [9], функции $c_j(t)$. Тогда после некоторых преобразований [7] получаем тождество

$$2(B_3(t)x(t),x''(t))+2(B_4(t)x(t),x'(t))+2(C_3(t)x'(t),x''(t))+(B_5(t)x(t),x(t))+$$
$$+(B_6(t)x'(t),x'(t))+(A_4(t)x''(t),x''(t))+\int_{t_0}^{t}\sum_{k=0}^{2}(D_k(s)x^{(k)}(s),x^{(k)}(s))ds+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\{(M_j(t)y_j(t,t_0),y_j(t,t_0))+(T_j(t)y_j(t,t_0),y_j(t,t_0))-2(r_j(t),y_j(t,t_0))+$$

$$+c_j(t)-\int_{t_0}^{t}[(T_j'(s)y_j(s,t_0),y_j(s,t_0))-2(r_j'(s),y_j(s,t_0))+c_j'(s)]ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t}(R_{j\tau}'(t,\tau)y_j(t,\tau),y_j(t,\tau))d\tau\}\equiv c_0^*+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{m}[(M_j'(s)y_j(s,t_0),y_j(s,t_0))+$$

$$+\int_{t_0}^{s}(R_{js\tau}''(s,\tau)y_j(s,\tau),y_j(s,\tau))d\tau]ds-2\int_{t_0}^{t}(\int_{t_0}^{s}Q(s,\tau)x(\tau)d\tau,(\Phi x)(s))ds-$$

$$-2\int_{t_0}^{t}(\int_{t_0}^{s}P(s,\tau)x'(\tau)d\tau,(\Phi x)(s))ds+2\int_{t_0}^{t}(F(s;x),(\Phi x)(s))ds, \qquad (15)$$

где

$$y_j(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}S_j(\eta)(\Phi x)(\eta)d\eta \quad (j=1...m),\ c_0^*=c^*+\sum_{j=1}^{m}c_j(t_0).$$

Пусть

$$B_5(t)=B_{51}(t)+B_{52}(t),\quad B_{51}(t)\ge\alpha(t),\quad \|B_{52}(t)\|\ge\alpha_0(t), \qquad (B_5)$$

$$B_6(t)=B_{61}(t)+B_{62}(t),\quad B_{61}(t)\ge\beta(t),\quad \|B_{62}(t)\|\ge\beta_0(t), \qquad (B_6)$$

$$A_4(t)=A_{41}(t)+A_{42}(t),\quad A_{41}(t)\ge\gamma(t),\quad \|A_{42}(t)\|\ge\gamma_0(t), \qquad (A_4)$$

где $\alpha(t),\ \alpha_0(t),\ \beta(t),\ \beta_0(t),\ \gamma(t),\ \gamma_0(t)$ - скалярные функции,

$$\|B_4(t)\|\le\nu_1(t), \qquad (B_4)$$

$$\|B_3(t)\|\le\nu_2(t), \qquad (B_3)$$

$$\|C_3(t)\|\le\nu_3(t), \qquad (C_3)$$

С учетом условий (B_5), (B_6), (A_4), (B_4), (B_3), (C_3) и условия (L) на *F(t;x)* из тождества (15) приходим к неравенству

$$\alpha(t)\|x(t)\|^2+\beta(t)\|x'(t)\|^2+\gamma(t)\|x''(t)\|^2+\int_{t_0}^{t}\sum_{k=0}^{2}(D_k(s)x^{(k)}(s),x^{(k)}(s))ds+\alpha_0(t)\|x(t)\|^2+$$

$$+\beta_0(t)\|x'(t)\|^2+\gamma_0(t)\|x''(t)\|^2-2\nu_1(t)\|x(t)\|\|x'(t)\|-2\nu_2(t)\|x(t)\|\|x''(t)\|-$$

$$-2v_3(t)\|x'(t)\|\|x''(t)\|+\sum_{j=1}^{m}\{(M_j(t)y_j(t,t_0),y_j(t,t_0))+$$

$$+(T_j(t)y_j(t,t_0),y_j(t,t_0))-2(r_j(t),y_j(t,t_0))+$$

$$+c_j(t)-\int_{t_0}^{t}[(T_j'(s)y_j(s,t_0),y_j(s,t_0))-2(r_j'(s),y_j(s,t_0))+c_j'(s)]ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t}(R'_{j\tau}(t,\tau)y_j(t,\tau),y_j(t,\tau))d\tau\}\le c_0^*+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{m}[(M_j'(s)y_j(s,t_0),y_j(s,t_0))+$$

$$+\int_{t_0}^{s}(R''_{js\tau}(s,\tau)y_j(s,\tau),y_j(s,\tau))d\tau]ds+2\int_{t_0}^{t}\{g_0(s)\|x(s)\|+$$

$$+g_1(s)\|x'(s)\|+g_2(s)\|x''(s)\|+\int_{t_0}^{s}[\|Q(s,\tau)\|+G_0(s,\tau)]\|x(\tau)\|d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{s}[\|P(s,\tau)\|+G_1(s,\tau)]\|x'(\tau)\|d\tau+\int_{t_0}^{s}G_2(s,\tau)\|x''(\tau)\|d\tau\}[\|\Phi_0(s)\|\|x(s)\|+$$

$$+\|\Phi_1(s)\|\|x'(s)\|+\|\Phi_2(s)\|\|x''(s)\|]ds, \qquad (16)$$

де $G_k(t,\tau)\equiv g_3(t)h_k(t,\tau)\quad (k=0,1,2)$.

Теорема 1. Пусть 1) выполняются условия (L), $\det\Phi_2(t)\neq 0$, (K), (f), (R), (B_5), (B_6), (A_4), (B_4), (B_3), (C_3), матрицы $B_5(t)$, $B_6(t)$, $A_4(t)$, $R_j(t,\tau)$ (j=1…m) – симметрические; 2) скалярная функция $\alpha(t)>0$; 3) скалярная функция $\beta(t)>0$; 4) скалярная функция $\gamma(t)>0$; 5) $D_k(t)\ge 0$ (k=0,1,2); 6) скалярные *функции* $\alpha_0(t)$, $\beta_0(t)$, $\gamma_0(t)$, $v_k(t)$ ($k=1,2,3$) такие, что $\alpha_0(t)\ge 0$, $\beta_0(t)\ge 0$, $\gamma_0(t)\ge 0$, для любых $x_0, x_1, x_2\in R$:

$$\alpha_0(t)x_0^2+\beta_0(t)x_1^2+\gamma_0(t)x_2^2-2v_1(t)x_0x_1-2v_2(t)x_0x_2-2v_3(t)x_1x_2\ge 0;$$

7) $M_j(t)\ge 0;\quad R'_{j\tau}(t,\tau)\ge 0$, существуют скалярные функции $\mu_j(t)\in L^1(J,R_+)$,

$\rho_j(t)\in L^1(J,R_+)$ такие, что $M_j'(t)\le\mu_j(t)M_j(t)$,

$R''_{jt\tau}(t,\tau)\le\rho_j(t)R'_{j\tau}(t,\tau)\quad (j=1...m)$;

8) $T_i(t)\ge 0,\ T_i'(t)\le 0$, существуют скалярные функции $c_j(t)$ такие, что для любых $n\times 1$ векторов y_j: $(-1)^k[(T_j^{(k)}(t)y_j,y_j)-2(r_j^{(k)}(t),y_j)+c_j^{(k)}(t)]\ge 0\quad (k=0,1;\ j=1..m)$;

9) $\Delta(t)\equiv\{g_0(t)(\alpha(t))^{-1/2}+g_1(t)(\beta(t))^{-1/2}+g_2(t)(\gamma(t))^{-1/2}+$

$$+\int_{t_0}^{t}[\|Q(t,\tau)\|+G_0(t,\tau)](\alpha(\tau))^{-1/2}d\tau+\int_{t_0}^{t}[\|P(t,\tau)\|+G_1(t,\tau)](\beta(\tau))^{-1/2}+$$

$$+\int_{t_0}^{t}G_2(t,\tau)(\gamma(\tau))^{-1/2}d\tau\}[\|\Phi_0(t)\|(\alpha(t))^{-1/2}+$$

$$+\|\Phi_1(t)\|(\beta(t))^{-1/2}+\|\Phi_2(t)\|(\gamma(t))^{-1/2}]\in L^1(J,R_+).$$

Тогда для любого решения $x(t)=\{x_i(t)\}$ СИДУ (1) справедливы асимптотические представления

$$\|x(t)\|\equiv(\alpha(t))^{-1/2}O(1),\quad \|x'(t)\|=(\beta(t))^{-1/2}O(1),\quad \|x''(t)\|=(\gamma(t))^{-1/2}O(1) \quad (17)$$

и соотношения

$$(D_k(t)x^{(k)}(t),x^{(k)}(t))\in L^1(J,R_+)\quad (k=0,1,2). \quad (18)$$

Доказательство. Пусть

$$V(t)\equiv\alpha(t)\|x(t)\|^2+\beta(t)\|x'(t)\|+\gamma(t)\|x''(t)\|+\int_{t_0}^{t}\sum_{k=0}^{2}(D_k(s)x^{(k)}(s),x^{(k)}(s))ds+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}[(M_j(t)y_j(t,t_0),y_j(t,t_0))+\int_{t_0}^{t}(R'_{j\tau}(t,\tau)y_j(t,\tau),y_j(t,\tau))d\tau,$$

u(t) – левая часть неравенства (16). Тогда в силу условий 2)-5),7),8) имеем $V(t)\geq 0$, а учет условий 6), 8) приводит к соотношением *u(t)≥0, u(t)≥V(t)*. Вследствие этого на основании условий 2)-8) из неравенства (16) получаем интегральное неравенство

$$V(t)\leq c_0^*+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{m}(\mu_j(s)+\rho_j(s))V(s)ds+2\int_{t_0}^{t}\{[g_0(s)(\alpha(s))^{-1/2}+g_1(s)(\beta(s))^{-1/2}+$$

$$+g_2(s)(\gamma(s))^{-1/2}](V(s))^{1/2}+\int_{t_0}^{s}[\|Q(s,\tau)\|+G_0(s,\tau)](\alpha(\tau))^{-1/2}(V(\tau))^{1/2}d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{s}[\|P(s,\tau)\|+G_1(s,\tau)](\beta(\tau))^{-1/2}(V(\tau))^{1/2}d\tau+ \quad (19)$$

$$+\int_{t_0}^{s}G_2(s,\tau)(\gamma(\tau))^{-1/2}(V(\tau))^{1/2}d\tau\}[\|\Phi_0(s)\|(\alpha(s))^{-1/2}+$$

$$+\|\Phi_1(s)\|(\beta(s))^{-1/2}+\|\Phi_2(s)\|(\gamma(s))^{-1/2}]ds.$$

Применяя к интегральному неравенству (19) лемму 1 [18] и учитывая условия 7), 9), имеем

$$V(t) \le c_{00}^{*} \tag{20}$$

где $c_{00}^{*} = c_0^{*} \exp\{\int\limits_{t_0}^{t} [\sum\limits_{j=1}^{m} (\mu_j(t) + \rho_j(t)) + 2\Delta(t)]dt\} < \infty.$

Так как

$$\alpha(t) \| x(t) \|^2 \le V(t), \quad \beta(t) \| x'(t) \| \le V(t), \quad \gamma(t) \| x''(t) \| \le V(t),$$

$\int\limits_{t_0}^{t} \sum\limits_{k=0}^{2} (D_k(s) x^{(k)}(s), x^{(k)}(s)) ds \le V(t)$, то из (20 вытекают утверждения (17), (18) теоремы 1.

Отметим, что при получении утверждений (17), (18) теоремы 1 из (20) применима идея метода эллипсоида (лемма [3, с.25]).

Следствие 1. Если 1) выполняются условия теоремы 1; 2) $(\alpha(t))^{-1/2} = O(1)$, $(\gamma(t))^{-1/2} = O(1)$, то все решения и их первые производные СИДУ (1) ограничены на полуинтервале *J*.

В самом деле, из утверждения (17) теоремы 1 $\Rightarrow$, что $\| x(t) \| = O(1)$, $\| x''(t) \| = O(1)$. Поэтому на основании утверждения из [19, с.236-237] получаем, что $\| x'(t) \| = O(1)$.

Введем обозначения: $(\alpha(t))^{-1/2} \equiv \varepsilon_0(t), (\beta(t))^{-1/2} \equiv \varepsilon_1(t), (\gamma(t))^{-1/2} \equiv \varepsilon_2(t).$

Исходя из соотношений (17), аналогично следствию 3.10 [3, с.133] устанавливается

Следствие 2. Если выполняются условия теоремы 1 и

a) $\varepsilon_k(t) \to \infty \quad (0 \le k \le 2)$ при $t \to \infty$;

b) $\exists \lambda_k - const > 0 \quad (0 \le k \le 2)$ такое, что $\varepsilon_k(t) = e^{-\lambda_k t} O(1)$;

c) $t_0 = 0, \exists \delta_k, \mu_k - const > 0 \quad (0 \le k \le 2)$ такие, что $\varepsilon_k(t) = (t + \delta_k)^{-\mu_k} O(1)$;

d) $\varepsilon_k(t) \in L^{p_k}(J, R_+ \setminus \{0\}) \quad (0 \le k \le 2;\ p_k > 0)$,

то для любого решения $x(t)$ СИДУ (1) справедливы следующие асимптотические свойства:

a) $\| x^{(k)}(t) \| \to 0 \quad (0 \le k \le 2)$ при $t \to \infty$;

b) $\| x^{(k)}(t) \| = e^{-\lambda_k t} O(1) \quad (0 \le k \le 2)$;

c) $\| x^{(k)}(t) \| = (1+\delta_k)^{-\mu_k} O(1) \quad (0 \le k \le 2)$;

d) $\| x^{(k)}(t) \| \in L^{p_k}(J, R_+) \quad (0 \le k \le 2;\ p_k > 0)$.

Исходя из утверждения (18), аналогично следствию 7[17] вытекает

Следствие 3. Если 1) выполняются условия теоремы 1; 2) существуют диагональные $n \times n$ матрицы функции $d_v(t) = [d_{vi}]$ $(v = 0,1,2)$ с $d_{vi}(t) > 0$ $(i = 1...n)$; 3) $d_{vi}(t) \ge d_{vi0} > 0$ (соответственно $(d_{vi}(t))^{-1} \in L^1(J, R_+ \setminus \{0\})$) $(0 \le v \le 2; 1 \le i \le n)$, то для любого решения $x(t) = \{x_i(t)\}$ СИДУ (1) компонента $x_i^{(v)}(t) \in L^2(J, R)$ (соответственно $\in L^1(J, R)$).

Исходя из соотношений (18) установим еще предложение.

Следствие 4. Если 1) выполняются условия 1), 2) следствия 3;

2) $d_{vi}(t) \ge d_{vi0} > 0$ (соответственно $(d_{vi}(t))^{-1} \in L^1(J, R_+ \setminus \{0\})$) $(v = 0,2; i = 1..n)$, то для любого решения $x(t)$ СИДУ (1) $\| x^{(v)}(t) \| \in L^2(J, R_+)$ (соответственно $\in L^1(J, R_+)$) $(v = 0,1,2)$.

В этом случае в силу теоремы 1 (утверждение (18)) сначала имеем $\| x(t) \| \in L^2(J, R_+), \| x''(t) \| \in L^2(J, R_+)$ (соответственно $\| x(t) \| \in L^1(J, R_+)$, $\| x''(t) \| \in L^1(J, R_+)$). Затем применением теоремы 2 [19, с.233] получаем, что $\| x'(t) \| \in L^2(J, R_+)$. Аналогично этому также можно получить утверждение о том, что $\| x'(t) \| \in L^1(J, R_+)$.

Замечание 2. Если $\det \Phi_0(t) \ne 0$, то вместо соотношения (3) можно получить

$$
\begin{aligned}
&Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau) = Q_0(t,\tau)\Phi_0^{-1}(\tau)[\Phi_0(\tau)x(\tau) + \\
&+ \Phi_1(\tau)x'(\tau) + \Phi_2(\tau)x''(\tau)] + [Q_1(t,\tau) - Q_0(t,\tau)\Phi_0^{-1}(\tau)\Phi_1(\tau)]x'(\tau) + \\
&+ [Q_2(t,\tau) - Q_0(t,\tau)\Phi_0^{-1}(\tau)\Phi_2(\tau)]x''(\tau).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Если $\det \Phi_1(t) \ne 0$, то вместо соотношения (3) можно получить

$$
\begin{aligned}
&Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau) = Q_1(t,\tau)\Phi_1^{-1}(\tau)[\Phi_0(\tau)x(\tau) + \\
&+ \Phi_1(\tau)x'(\tau) + \Phi_2(\tau)x''(\tau)] + [Q_0(t,\tau) - Q_1(t,\tau)\Phi_1^{-1}(\tau)\Phi_0(\tau)]x(\tau) + \\
&+ [Q_2(t,\tau) - Q_1(t,\tau)\Phi_1^{-1}(\tau)\Phi_2(\tau)]x''(\tau).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Тогда используя соотношения (21), (22), вместо СИДУ (4) можно получить соответствующие СИДУ, эквивалентные исходной СИДУ (1). Полученные, таким образом, СИДУ можно исследовать методом изложенным выше. Суть изложенного модифицированного метода матричных весовых и срезывающих функций заключается, грубо говоря, в получении СИДУ (4) с использованием преобразования (3), соотношений (9), (14) для дифференциального оператора (5), в умножении СИДУ (4) скалярно на вектор $(\Phi x)(t)$, в получении тождества (15) и соотношения (20), приводящего к утверждениям (17), (18).

Замечание 3. Из оценки (20) в силу $(M_j(t)y_j(t,t_0), y_j(t,t_0)) \le V(t)$, $(j=1..m)$ можно получить следующее утверждение:

$$(M_j(t)y_j(t,t_0), y_j(t,t_0)) \le c_{00}^*. \tag{23}$$

Если предположим, что существует скалярная функция $q_j(t)>0$ $(1\le j\le m)$ такая, что $M_j(t) \ge q_j(t)$, то из (23 вытекает, что

$$\| \int_{t_0}^{t} S_j(\tau)[\Phi_0(\tau)x(\tau)+\Phi_1(\tau)x'(\tau)+\Phi_2(\tau)]d\tau \| \le \sqrt{c_{00}^*(q_j(t))^{-1}}. \tag{24}$$

К изучению асимптотических свойств решений интегро-дифференциального неравенства (ИДН) можно развить метод, разработанный в [20]. О необходимости изучения асимптотических свойств решений ИДН вида (24) сказано в [3, с.171].

Замечание 4. Условие (6) теоремы 1 будет выполняться, если выполняются условия обобщенного критерия Сильвестра [21, с.137]:

$$\alpha_0(t) \ge 0, \quad \alpha_0(t)\beta_0(t)-(\nu_1(t))^2 \ge 0, \quad \alpha_0(t)\beta_0(t)\gamma_0(t)-2\nu_1(t)\nu_2(t)\nu_3(t)-$$
$$-\beta_0(t)(\nu_2(t))^2-\gamma_0(t)(\nu_1(t))^2-\alpha_0(t)(\nu_3(t))^2 \ge 0.$$

Замечание 5. Если в условиях (B_5), (B_6), (A_4) вместо условий $B_{51}(t)\ge\alpha(t)$, $B_{61}(t)\ge\beta(t)$, $A_{41}(t)\ge\gamma(t)$ потребовать следующие условия: существуют $n\times n$ диагональные матричные функции

$\alpha(t)=[\alpha_i(t)], \beta(t)=[\beta_i(t)], \gamma(t)=[\gamma_i(t)]$ с $\alpha_i(t)>0, \beta_i(t)>0, \gamma_i(t)>0$ $(i=1..n)$,

то будем иметь соотношения

$$(B_{51}(t)x(t),x(t)) \ge \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)(x_i(t))^2, \quad (B_{61}(t)x'(t),x'(t)) \ge \sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)(x_i'(t))^2,$$

$$(A_{41}(t)x''(t),x''(t)) \ge \sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)(x_i''(t)^2. \tag{25}$$

Тогда, если $V(t)$ - та же функция, что в начале доказательства теоремы 1, где вместо слагаемых с $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ соответственно стоят суммы n слагаемых с $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)$ $(i=1...n)$ из (25), то использование соотношений

$\alpha_i(t)(x_i(t))^2 \le V(t), \quad \beta_i(t)(x_i'(t))^2 \le V(t), \quad \gamma_i(t)(x_i''(t))^2 \le V(t) \quad (i = 1...n)$
дает возможность изучить аисптотические свойства части переменных (компонент) $x_k(t)$ $(k < n)$ и их первых и вторых производных для решений $x(t) = \{x_i(t)\}$ СИДУ (1) в соответствии с определениями из [22].

Теперь приведем результаты для скалярного ИДУ (2). Поступаем аналогично как для СИДУ (4).

Для произвольного фиксированного решения $x(t)$ умножаем ИДУ (2) на $Q_0(t)x(t) + Q_1(t)x'(t) + Q_2(t)x''(t)$ и интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям. Тогда получаем тождество

$$\alpha(t)(x(t))^2 + \beta(t)(x'(t))^2 + Q_2(t)(x''(t))^2 + 2\gamma(t)x(t)x'(t) + 2Q_0(t)x(t)x''(t) +$$
$$+2Q_1(t)x'(t)x''(t) + \int_{t_0}^{t}\sum_{k=0}^{2} D_k(s)(x^{(k)}(s))^2 ds + \tag{26}$$
$$+2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} K(s,\tau)y(s)y(\tau)d\tau ds \equiv c_{**} + 2\int_{t_0}^{t}[f(s) + F_1(s;x)]y(s)ds,$$

где $\alpha(t) \equiv Q_0(t)a_1(t) + Q_1(t)a_0(t) - \gamma'(t)$, $\gamma(t) \equiv Q_0(t)a_2(t) + Q_2(t)a_0(t) - Q_0'(t)$,

$\beta(t) \equiv Q_1(t)a_2(t) + Q_2(t)a_1(t) - Q_0(t) - Q_1'(t)$, $D_0(t) \equiv 2Q_0(t)a_0(t) - \alpha'(t)$,

$D_1(t) \equiv 2Q_1(t)a_1(t) - 2\gamma(t) - \beta'(t)$, $D_2(t) \equiv 2Q_2(t)a_2(t) - 2Q_1(t) - Q_2'(t)$,

$y(t) \equiv Q_0(t)x(t) + Q_1(t)x'(t) + Q_2(t)x''(t)$,

$$c_{**} = \alpha(t_0)(x(t_0))^2 + \beta(t_0)(x'(t_0))^2 + Q_2(t_0)(x''(t_0))^2 +$$
$$+ 2\gamma(t_0)x(t_0)x'(t_0) + 2Q_0(t_0)x(t_0)x''(t_0) + 2Q_1(t_0)x'(t_0)x''(t_0).$$

Пусть

$$\alpha(t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t), \tag{α}$$
$$\beta(t) = \beta_1(t) + \beta_2(t), \tag{β}$$
$$Q_2(t) = Q_{21}(t) + Q_{22}(t), \tag{Q_2}$$

для функций $K(t,\tau)$, $f(t)$ выполняются условия (K), (f), (R), $\psi_j(t)$ ($j=1...m$) – некоторые срезывающие функции, $R_j(t,\tau) \equiv K_j(t,\tau)(\psi_j(t)\psi_j(\tau))^{-1}$, $E_j(t) \equiv f_j(t)(\psi_j(t))^{-1}$, $c_j(t)$ $(j = 1...m)$ - некоторые функции.

Учитывая условия (α), (β), (Q_2), делая преобразования вида $a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=a_{11}[x_1+a_{12}a_{11}^{-1}x_2]^2+[a_{22}-a_{12}^2a_{11}^{-1}]x_2^2 \quad (a_{11}\neq 0)$, т.е. используя идею метода Гаусса о выделении полного квадрата [23, с.153], затем вводя условия (K), (f), функции $\psi_j(t),\ R_j(t,\tau),\ E_j(t),\ c_j(t) \quad (j=1...m)$, условие ($R$) с применением леммы 1.1 [24; 3, с.44], леммы 1.2 [3, с.44-45], после некоторых преобразований из (26) будем иметь следующий аналог тождества (15):

$$\sum_{k=0}^{2}N_k(t)(x^{(k)}))^2+\alpha_2(t)[x(t)+\gamma(t)(\alpha_2(t))^{-1}x'(t)]^2+\beta(t)[x'(t)+Q_1(t)(\beta_2(t))^{-1}x''(t)]^2+$$

$$+Q_{22}(t)[x''(t)+Q_0(t)(Q_{22}(t))^{-1}x(t)]^2+\int_{t_0}^{t}\sum_{k=0}^{2}D_k(s)(x^{(k)}(s))^2ds+\sum_{j=1}^{m}\{M_j(t)(Y_j(t,t_0))^2+$$

$$+\int_{t_0}^{t}R'_{j\tau}(t,\tau)(Y_j(t,\tau))^2d\tau+T_j(t)(Y_j(t,t_0))^2-2E_j(t)Y_j(t,t_0)+c_j(t)-\int_{t_0}^{t}[T'_j(s)(Y_j(s,t_0))^2-$$

$$-2E'_j(s)Y_j(s,t_0)+c'_j(s)]ds\}\equiv c_{***}+2\int_{t_0}^{t}F_1(s;x)y(s)ds+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{m}[M'_j(s)(Y_j(s,t_0))^2+$$

$$+\int_{t_0}^{s}R''_{js\tau}(s,\tau)(Y_j(s,\tau))^2d\tau]ds, \tag{27}$$

где

$$N_0(t)\equiv\alpha_1(t)-(Q_0(t))^2(Q_{22}(t))^{-1},\ N_1(t)\equiv\beta_1(t)-(\gamma(t))^2(\alpha_2(t))^{-1},$$

$$N_2(t)\equiv Q_{21}(t)-(Q_1(t))^2(\beta_2(t))^{-1},\ Y_j(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_j(s)y(s)ds \quad (j=1...m),$$

$$c_{***}=\sum_{k=0}^{2}N_k(t_0)(x^{(k)}(t_0))^2+\alpha_2(t_0)[x(t_0)+\gamma(t_0)(\alpha_2(t_0))^2x'(t_0)]^2+\beta(t_0)[x'(t_0)+$$

$$+Q_1(t_0)(\beta_2(t))^{-1}x''(t_0)]^2+Q_{22}(t_0)[x''(t_0)+Q_0(t_0)(Q_{22}(t_0))^{-1}x(t_0)]^2+\sum_{j=1}^{m}c_j(t_0).$$

Переходя к интегральному неравенству из тождества (27) аналогично теореме 1 доказывается

Теорема 2. Пусть 1) выполняются условия (α), (β), (Q_2), (K), (f), (R), $\alpha_2(t)>0$, $\beta_2(t)>0$, $Q_{22}(t)>0$, $|F_1(t;x)|\le F_0(t)$; 2) $N_k(t)>0 \quad (k=0,1,2)$; 3)

$D_k(t)\ge 0 \quad (k=0,1,2)$; 4) $M_j(t)\ge 0,\ \ R'_{j\tau}(t,\tau)\ge 0,\quad T_j(t)\ge 0,\ \ T'_j(t)\le 0$, существуют функции $M^*_j(t)\in L^1(J,R_+),\quad R^*_j(t)\in L^1(J,R_+),\quad c_j(t)$ такие, что $M'_j(t)\le M^*_j(t)M_j(t)$, $R''_{jt\tau}(t,\tau)\le R^*_j(t)R'_{j\tau}(t,\tau),\quad (E^{(k)}_j(t))^2\le T^{(k)}_j(t)c^{(k)}_j(t)$ $(j=1...m;\ k=0,1)$. 5) $F_0(t)\sum_{k=0}^{2}|\,Q_k(t)\,|\,(N_k(t))^{-1/2}\in L^1(J,R_+)$. Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (2) справедливы соотношения

$$x^{(k)}(t)=(N_k(t))^{-1/2}O(1),\quad D_k(t)(x^{(k)}(t))^2\in L^1(J,R_+)\quad (k=0,1,2). \tag{28}$$

Замечание 6. Из соотношений (28) можно вывести аналоги следствий 1-4. Из теоремы 2 с учетом замечания 6 при $F_1(t;x)\equiv 0$ получаем некоторые результаты работы [16].

Пример 1. Для ИДУ

$$x'''(t)+(t+1)x''(t)+(2t+5)x'(t)+2x(t)+\int_{0,9}^{t}\frac{t+\tau+1}{t+\tau+2}(8t^3+21t^2+6t+6)(8\tau^3+21\tau^2+6\tau+$$
$$+6)[2x(\tau)+5x'(\tau)+(\tau+2)x''(\tau)]d\tau=8t^3+21t^2+6t+6+e^{-t}\sin[(x(t)-t^3)x(t/2)]\times$$
$$\times\cos\Big(\int_{0,9}^{t}\sqrt{t^2+\tau^2+3}\cdot x^2(\tau-1)d\tau\Big),\ t\ge 0,9$$

выполняются все условия теоремы 2 при $m=1,\quad \psi_1(t)\equiv 8t^3+21t^2+6t+6$, здесь

$R_1(t,\tau)\equiv(t+\tau+1)(t+\tau+2)^{-1},\quad M_1(t)\equiv(t+1)(t+2)^{-1}-\frac{1}{4},\quad T_1(t)\equiv\frac{1}{4},\quad E_1(t)\equiv 1,$

$c_1(t)\equiv 4,\quad M^*_1(t)\equiv 4(t+2)^{-2},\quad R^*_1(t)\equiv 0,\quad \alpha(t)\equiv 4t+16,\quad \beta(t)\equiv 2t^2+14t+13,$

$\gamma(t)\equiv 4t+6,\quad D_0(t)\equiv 4,\quad D_1(t)\equiv 8(t+3),\quad D_2(t)\equiv 2t^2+6t-7,\quad N_0(t)\ge t+4,$

$N_1(t)\ge(t+2)^2,\quad N_2(t)\ge t+2,\quad F_0(t)\equiv e^{-t}$, поэтому для любого решения $x(t)$ этого ИДУ справедливы соотношения

$x(t)=(t+4)^{-1/2}O(1),\quad x'(t)=(t+2)^{-1}O(1),\quad x''(t)=(t+2)^{-1/2}O(1),\quad x(t)\in L^2(J,R)$,

$x'(t)\in L^2(J,R),\quad (2t^2+6t-7)(x''(t))^2\in L^1(J,R_+)$, где $J=[\frac{9}{10},\infty)$.

Замечание 7. При выполнении условий теоремы 2 решения и их первые и вторые производные ФДУ (2_0) могут не обладать изучаемыми асимптотическими свойствами для ИДУ (2). Это подтверждается, например, ФДУ

$$x'''(t)+(t+1)x''(t)+$$

$$+(2t+5)x'(t)+2x(t)=8t^3+21t^2+6t+6+e^{-t}\sin[(x(t)-t^3)x(t/2)],$$

$t\ge 0{,}9$, соответствующего для ИДУ примера 1. Это ФДУ имеет, в частности, решение $x(t)=t^3$.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 5. Если выполняются условия (α), (β), (Q_2), $\alpha_2(t)>0$, $\beta_2(t)>0$, $Q_{22}(t)>0$ и условия 2), 3) теоремы 2, то для любого решения $x(t)$ линейного однородного ДУ третьего порядка

$$x'''(t)+\sum_{k=0}^{2}a_k(t)x^{(k)}(t)=0,\quad t\ge 0 \tag{2_{000}}$$

справедливы соотношения (28).

Пример 2. ИДУ примера 1 без слагаемого

$$e^{-t}\sin[x(t)-t^3]\cos\left(\int_{0,9}^{t}\sqrt{t^2+\tau^2+3}\,x^2(\tau-1)d\tau\right)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 2 при $F_1(t;x)\equiv 0$. Это есть иллюстративный пример для теоремы 2 в случае ИДУ (2) без функционала $F_1(t;x)$.

Замечание 8. Все решения и их первые и вторые производные линейного неоднородного ДУ третьего порядка

$$x'''(t)+(t+1)x''(t)+(2t+5)x'(t)+2x(t)=8t^3+21t^2+6t+6,\quad t\ge 0{,}9 \quad (*)$$

имеют вид $x(t)=(t+4)^{-1/2}O(1)+t^3$, $x'(t)=(t+2)^{-1}O(1)+3t^2$, $x''(t)=(t+2)^{-1/2}O(1)+6t$, что вытекает из структуры общего решения ДУ (*) с учетом следствия 5, так как $x(t)=t^3$ - частное решение исходного неоднородного ДУ (*) и из следствия 5 следует, что $\forall$ решение $x(t)$ и его $x'(t)$, $x''(t)$ соответствующего однородного ДУ

$x'''(t)+(t+1)x''(t)+(2t+5)x'(t)+2x(t)=0,\quad t\ge 0{,}9$ имеют вид $x(t)=(t+4)^{-1/2}O(1)$ $x'(t)=(t+2)^{-1}O(1),\quad x''(t)=(t+2)^{-1/2}O(1)$. Следовательно, все решения и их первые и вторые производные линейного неоднородного ДУ (*) стремятся к бесконечности при $t\to\infty$ и, значит, не обладают теми асимптотическими свойствами, которыми обладают все решения и их первые и вторые производные ИДУ примера 2.

Таким образом, выявлено влияние линейных вольтерровых интегральных возмущений на асимптотические свойства решений и их первых и вторых производных ФДУ (2_0) и линейного неоднородного ДУ (2_{00}).

ЛИТЕРАТУРА

1. БЛЕХМАН И.И., МЫШКИС А.Д., ПАНОВКО Я.Г. **Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики**. – М.: Наука, 1983. – 328 с.
2. КРАСОВСКИЙ Н.Н. **Некоторые задачи теории устойчивости движения**. – М.: Физматгиз, 1959. – 212 с.
3. ИСКАНДАРОВ С. **Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра**. – Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.
4. ИСКАНДАРОВ С. **Асимптотическое представление решений слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка типа Вольтерра** //Изв.НАН Кыргызской Республики. – 1998. – №2-3. – С. 9-13.
5. ИСКАНДАРОВ С. **Об одном методе исследования асимптотического поведения решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка** //Республ.конф. «Теория и численные методы решения краевых задач дифференц. уравнений», Юрмала, дек. 1988 г.: Тез.докл. – Рига: Латв. гос.ун-т им. П.Стучки, 1988. – С. 67.
6. ИСКАНДАРОВ С. **О некоторых методах для вольтерровых уравнений на полуоси** //Весенняя Воронежская мат.школа «Понтрягинские чтения-V», Воронеж, апр. 1994 г.: Тез.докл. – Воронеж: ВГУ, 1994. – С.63.
7. ИСКАНДАРОВ С. **Метод матричных весовых и срезывающих функций в асимптотической теории вольтерровых систем на полуоси** //Вестн. КГНУ. Сер.естественно-техн. науки. – 1995. – Вып.1, Ч.1. –С. 163-171.
8. ЦАЛЮК З.Б. **Замечание по поводу метода Ляпунова для интегро-дифференциальных уравнений** //Мат. анализ.-Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1978. – С. 103-107.
9. ВИНОКУРОВ В.Р. **Асимптотические поведение решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра** //Дифференц. уравнения. – 1967. – Т.3, №10. – С.1732-1744.
10. БАРБАШИН Е.А**. Введение в теорию устойчивости**. – М.: Наука, 1967. – 224с.
11. ТЫШКЕВИЧ В.А. **Некоторые вопросы теории устойчивости функ-ционально-дифференциальных уравнений**. – Киев: Наук. думка, 1981. – 80с.
12. ВЕДЬ Ю.А. **О возмущениях линейных однородных дифференциальных уравне-ний с переменными коэффициентами** // Исслед.по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1965. – Вып.3. – С.93-121.
13. РАЖАПОВ Г. **Об устойчивости свойства ограниченности решений линейных однородных дифференциальных уравнений в пространствах**

$L^p(t_0,\infty)$ $(p = 1,2)$ //Мат-лы XIII науч. конф. проф. – препод. состава физ.-мат. фак-та Киргиз. гос. ун-та (секция матем.).- Фрунзе: Мектеп, 1965. –С. 72-74.

14. РАЖАПОВ Г. **Об асимптотических свойствах решений одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений** //Исслед.по итегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1967. – Вып. 4. – С.118-128.
15. ХАЛИЛОВ А.Т. **Об асимптотических свойствах слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка типа Вольтерра** // Исслед. по интегро-дифференц.уравнениям. – Бишкек: Илим, 1997. – Вып.26. – С. 81-85.
16. ИСКАНДАРОВ С. **Об асимптотических представлениях и свойствах решений и их первых и вторых производных одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка типа Вольтерра** //Там же. – Бишкек: Илим, 1991. – Вып. 23. – С. 15-21.
17. ИСКАНДАРОВ С. **Модифицированный метод матричных срезывающих функций для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка типа Вольтерра** //Там же. – Бишкек: Илим, 2002. – Вып. 31. – С. 24-27.
18. ВЕДЬ Ю.А., ПАХЫРОВ З. **Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений** //Исслед.по интегро-дифференц.уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1973. – Вып.9. – С. 68-103.
19. БЕККЕНБАХ Э., БЕЛЛМАН Р. **Неравенства**. – М.: Мир, 1965. – 276 с.
20. ИСКАНДАРОВ С. **Лемма об интегро-дифференциальном неравенстве и ее некоторые применения** // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2001. – Вып.30. – С. 29-34.
21. ЗУБОВ В.И. **Теория уравнений управляемого движения**: Учеб.пособие. – Л.: Изд-во Ленингр.ун-та, 1980. – 288 с.
22. РУМЯНЦЕВ В.В., ОЗИРАНЕР А.С. **Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных**. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
23. ВОЛЬТЕРРА В. **Математическая теория борьбы за существование**: Пер.с фр./Под ред.Ю.М.Свирежева. – М.: Наука, 1976. – 288с.
24. KIFFE T.R. **On Nonlinear Volterra Equations of Nonconvolution Type**// J.different equat. – 1976. – Vol.22. – P. 349-367.