ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ АСИМТПОТИКИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Доц., док. А.С. ОМУРАЛИЕВ

Кыргызско-Турецкий университет «Манас»

E-mail: asan@manas.kg

Изучается следующая задача:

$$L_{\varepsilon}u \equiv \partial u/\partial t-\varepsilon^2 a(x)\partial^2 u/\partial x^2+b(x,t)u=f(x,t),\quad (x,t)\in\Omega \tag{1}$$

$$u(x,t,\varepsilon)\,|_{t=0}=h(x),\;\; u\,|_{x=0}=u|_{x=1}=0, \tag{2}$$

где $\Omega=\{(x,t): x\in(0,1),\ t\in(0,T]\}$.

Эта задача ранее изучалась нами в работе [2], где строилась регуляризованная асимптотика решения, содержащая функцию типа параболического пограничного слоя, определяемая из параболического уравнения. Там дополнительно вводилась регуляризующая функция зависящая от переменной t. Подход предлагаемый в данной работе значительно упрощает алгоритм построения асимптотики решения поставленной задачи, предлагаемый подход избавляет нас от доказательства законности дифференцирования под знаком некоторого интеграла на каждом шаге итерации. Как известно [1], обычный пограничный слой описывается экспоненциальной или степенной функцией, в данной работе установлена, что параболический пограничный слой описывается специальной функцией

$$erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{\xi}{2\sqrt{t}}}^{\infty}\exp(-s^2)ds,\quad \xi=\frac{1}{\varepsilon}\varphi(x)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x\frac{ds}{\sqrt{a(s)}}$$

и имеет оценку

$$\left|erfc\left(\frac{\xi}{2\varepsilon\sqrt{t}}\right)\right|\le c\exp\left(-\frac{\xi^2}{8\varepsilon t}\right).$$

Задачу (1), (2) будем изучать при следующих предположениях:

1. функции $h(x),a(x)\in C^{\infty}[0,1]$, $b(x,t),f(x,t)\in C^{\infty,0}(\overline{\Omega})$;
2. $\forall x\in[0,1]$ функция $a(x)>0$;
3. выполняются согласования начальных и граничных условий $h(0)=h(1)=0$.

II. Регуляризация задачи. Если предположить $a(x)\equiv 1$, то решение задачи

$$\partial_t u=\varepsilon^2\, \partial_x^2 u+f(x,t),\ (0<t\le T,\ 0<x<\infty)$$
$$u|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=h=const$$

можно выписать явно

$$u(x,t,\varepsilon)=\frac{x}{2\varepsilon\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{h}{\sqrt{(t-s)^3}}\, exp(-\frac{x^2}{4\varepsilon^2(t-s)})ds+$$
$$+\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^\infty \frac{f(s,t)}{\sqrt{t-\tau}}\, [\, exp(-\frac{(x-s)^2}{4\varepsilon^2(t-\tau)})-exp(-\frac{(x+s)^2}{4\varepsilon^2(t-\tau)})]ds\, d\tau. \qquad (3)$$

Отметим, что к таким задачам приводятся итерационные задачи (см. ниже).

Из структуры полученного решения (3) задачи (1), (2) заключаем, что решение сингулярно возмущенной задачи (1), (2) зависит от переменных $x,\ t,\ \xi=\frac{x}{2\varepsilon\ \sqrt{t}}$: $u(x,t,\varepsilon)=F(x,t,\xi,\varepsilon)$. Структура третьего аргумента $\xi=\frac{x}{2\varepsilon\ \sqrt{t}}$ говорит о том, что значение $\varepsilon=0$ порождает существенно особую точку функции $F(x,t,\xi,\varepsilon)$ по третьему аргументу. В силу сказанного, сохраняя этот аргумент как единое целое, мы можем построить асимптотику решения задачи (1),(2) в виде разложения по неотрицательным степеням малого параметра ε.

При $\varepsilon\to 0$ теряются условия в точках $x=0$ и $x=1$, поэтому пограничный слой возникает вдоль границ $x=0$ и $x=$ В силу сказанного и следуя методу С.А.Ломова, наряду с независимыми переменными $x,\ t$ вводим регуляризующие переменные по формулам

$$\xi_j=\varphi_j(x,\varepsilon),\ j=1,\ 2,\ \varphi_1(0,\varepsilon)=\varphi_2(1,\varepsilon)=0 \qquad (5)$$

и будем изучать вместо искомого решения $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1), (2) некоторую расширенную функцию $\widetilde{u}\ (x,t,\xi,\varepsilon),\ \xi=(\xi_1,\xi_2)$.

От расширенной функции потребуем, чтобы её сужение на множество $\xi=\varphi(x,\varepsilon),\ \varphi=(\varphi_1,\varphi_2),\ x\in[0,1]$ тождественно совпадало с решением исходной задачи (1), (2), т.е.

$$\widetilde{u}\ (x,t,\xi,\varepsilon)|_{\xi=\varphi(x,\varepsilon)}\equiv u(x,t,\varepsilon) \qquad (6)$$

В этих условиях найдем

$$\partial_x u(x,t,\varepsilon)\equiv(\partial_x\, \widetilde{u}\ (x,t,\xi,\varepsilon)+\sum_{j=1}^{2}\varphi'_j(x,\varepsilon)\,\partial_{\xi_j}\widetilde{u}\ (x,t,\xi,\varepsilon))|_{\xi=\varphi(x,\varepsilon)},$$

$$\partial^2 u/\partial x^2\equiv(\partial^2\widetilde{u}/\partial x^2+D_\xi\widetilde{u}\ +L_\xi\,\widetilde{u})|_{\xi=\varphi(x,\varepsilon)},\qquad D_\xi\equiv\sum_{j=1}^{2}(\varphi'_j(x,\varepsilon))^2\,\partial^2_{\xi_j},$$

$$L_\xi\equiv\sum_{j=1}^{2}L_{\xi,j},\qquad L_{\xi,j}\equiv[2\varphi'_j(x,\varepsilon)\partial^2/(\partial x\partial\xi_j)+\varphi_j''(x,\varepsilon)\partial/\partial\xi_j].$$

Учитывая соотношения (5), (6) и задачу (1), (2), для определения $\tilde{u}$ естественно поставить следующую задачу:

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u} \equiv \partial_t \tilde{u}(M,\varepsilon) - \varepsilon^2 a(x) D_\xi \tilde{u}(M,\varepsilon) + b(x,t)\tilde{u}(M,\varepsilon) - \varepsilon L_1 \tilde{u}(M,\varepsilon) -$$

$$-\varepsilon^2 L_x \tilde{u}(M,\varepsilon) = f(x,t),\ M=(x,t,\xi_1,\xi_2) \in \tilde{Q} = (0,1)\times(0,T]\times(0,+\infty)\times(0,+\infty), \tag{7}$$

$$\tilde{u}\,|_{t=0} = h(x),\ \tilde{u}\,|_{x=j-1,\ \xi_j=0} = 0,\ j=1,2, \tag{8}$$

где

$$L_1 \equiv a(x) L_\xi,\ L_x \equiv a(x)\partial^2/\partial x^2$$

Расширенное уравнение (7) должно наследовать структуру исходного уравнения (1), это обеспечивается главным членом, который задаётся выражением:

$$\varepsilon^2 a(x)\, D_\xi \tilde{u}\,.$$

Здесь присутствует произволы в виде производной регуляризующей функции $\varphi'(x,\varepsilon)$, которую мы можем выбрать так, чтобы уравнение, с приведенным главным членом, приняло самый простейший вид. Это обеспечивается, если регуляризующая функция будет выбрана, как решение следующей задачи:

$$\varepsilon^2 a(x)(\varphi'_j(x,\varepsilon))^2 = 1,\ \varphi(j-1,\varepsilon) = 0,\ j=1,2,$$

т.е.

$$\varphi_1(x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \frac{ds}{\sqrt{a(s)}} \equiv \psi_1(x)/\varepsilon,\ \varphi_2(x,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_1^x \frac{ds}{\sqrt{a(s)}} \equiv \psi_2(x)/\varepsilon.$$

Только таким образом определенные регуляризующие функции позволяют регуляризовать сингулярно возмущенную задачу (1), (2), причем задача регуляризована так, что выполняется условие

$$(\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u})|_{\xi=\varphi(x,\varepsilon),\ \tau=t/\varepsilon} \equiv L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon) \tag{9}$$

Используя явный вид регуляризующих функций, уравнение (7) перепишем

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u} \equiv T\tilde{u} - \varepsilon L_1 \tilde{u} - \varepsilon^2 L_x \tilde{u} = f(x,t), \tag{10}$$

$$T \equiv \partial_t - \sum_{j=1}^{2} \partial^2_{\xi_j} + b(x,t),\ L_1 \equiv a(x)\sum_{j=1}^{2} L_{\xi_j},\ L_{\xi_j} \equiv [\psi'_j(x)\partial^2_{x,\xi_j} + \psi''_j(x)\partial_{\xi_j}]$$

Задача (10), (8) регулярна по ε при $\varepsilon \to 0$, поэтому мы вправе искать решение этой задачи в виде разложения

$$\tilde{u}(M,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i u_i(M) + R_{\varepsilon n}(x,t,\xi) \tag{11}$$

Подставим это разложение в задачу (10),(8) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε, тогда для коэффициентов разложения (11) получим следующие итерационные задачи:

$$Tu_0 = f(x,t), \qquad u_0|_{t=0} = h(x), \qquad u_0|_{x=j-1,\ \xi_j=0} = 0,$$

$$Tu_1 = L_1\, u_0(M) \quad u_1|_{t=0} = 0,\ u_1|_{x=j-1,\ \xi_j=0} = 0,$$

$$Tu_i = L_1\, u_{i-1} + L_x u_{i-2}, \qquad u_i|_{t=0} = 0, \qquad u_i|_{x=j-1,\ \xi_j=0} = 0, \tag{13$_i$}$$

$$\widetilde{L}_\varepsilon R_{\varepsilon n} = \varepsilon^{n+1} g_{n\varepsilon}(x,t,\xi),\ R_{\varepsilon n}|_{t=0} = R_{\varepsilon n}|_{x=j-1,\ \xi_j=0} = 0,\ j=1,2, \tag{14}$$

$$g_{n\varepsilon}(x,t,\xi) = L_1\, u_n + L_x(u_{n-1} + \varepsilon\, u_n).$$

П.2. Класс разрешимости итерационных задач. Каждая из итерационных задач имеет бесчисленное множество решений, поэтому мы выделим класс функций, в котором каждая из этих задач однозначна разрешима. Структура выписанного выше решения (3), простейшей задачи теплопроводности наталкивает на то, что естественным классом функции, в котором будут решаться итерационные задачи, является

$$U = \{u(x,t,\xi): u(x,t,\xi) = v(x,t) + \sum_{j=1}^{2} c_j(x,t)\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}}\right),\ v(x,t), c_j(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega}),\ \forall (x,t,\xi_j) \in \widetilde{Q}\},$$

Каждое из итерационных уравнений в общем виде можно записать

$$Tu(M) = p(M). \tag{15}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1)-2) и правая часть*

$$p(M) = p_1(x,t) + \sum_{j=1}^{2} p_{2j}(x,t)\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}}\right) \in U.$$

Тогда уравнение (15) разрешимо в классе функций U, тогда и только тогда, когда разрешимы уравнения

$$\partial_t v = b(x,t)v(x,t)v + p_1(x,t),\ \partial_t c_j(x,t) = b(x,t)c_j(x,t) + p_{2,j}(x,t) \tag{16}$$

Доказательство. Пусть правая часть $p(M)$ уравнения (15) принадлежит классу U, т.е. представима в виде

$$p(M) = p_1(x,t) + \sum_{j=1}^{2} p_{2j}(x,t)\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}}\right) \tag{17}$$

и пусть выполнено тождества (16). Покажем, что функция

$$u(M) = v(x,t) + \sum_{j=1}^{2} c_j(x,t)\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}}\right) \tag{18}$$

будет решением уравнения (15). Подставим функцию (18) в уравнение (15) и учитывая тождества (16), получим $Tu(M)\equiv p(M)$.

Пусть теперь функция (18) является решением уравнения (15). Покажем выполнения тождеств (16). Подставим (18) в уравнение (15), затем принимая во внимание представление правой части (17), получим тождества (16). Теорема доказана.

Решение уравнения (15), построенное в теореме 1, содержит произвол. В следующей теореме устанавливается однозначность построенного в U решения.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда при дополнительных условиях*

a) $u|_{t=0}=h(x),\ u|_{x=j-1,\ \xi_j=0}=0,\ j=1,2,$

b) $L_{1,}u(M)=0$

уравнение (15) однозначно разрешимо в U.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда уравнение (15) имеет решение представимое в виде (18). Подчиним эту функцию условию *a)* теоремы

$$v(x,0)+\sum_{j=1}^{2} c_j(x,t)\ erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}})|_{t=0}=h(x),$$

$$v(0,t)+c_1(x,t)\,|_{x=0,}=0,\ v(1,t)+c_2(x,t)|_{x=1}=0.$$

Здесь пренебрегли экспоненциально малыми членами. Заметив, что при $t=0$ функция $erfc(\frac{\xi_j^2}{4t})=0,$ из этих соотношений определим

$$v(x,0)=h(x),\ c_j(x,t)|_{t=0}=c^0_j(x),\ c_j(x,t)|_{x=j-1}=-v(j-1,t),\ j=1,2, \tag{19}$$

где $c^0_j(x)$– произвольная функция.

Удовлетворим теперь условию *b)* теоремы 2, для чего вычислим $L_1u,$ имеем

$$L_1u=a(x)\sum_{j=1}^{2} L_{\xi_j}c_j(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}})=a(x)\sum_{j=1}^{2} D_{x,j}c_j(x,t)\,\partial_{\xi_j}\,(erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}})),$$

$$D_{x,j}\equiv 2\psi'_j(x)\partial_x+\psi''_j(x).$$

Обеспечивая выполнения условия *b),* положим

$$D_{x,j}c_j(x,t))=0. \tag{20}$$

Этим мы обеспечили выполнения второго условия из *b).* Решим второе уравнение из (16) относительно $c_j(x,t)$ при начальном условии (19) найдем $c_j(x,t)=c^0_j(x)exp(B(x,t))+H_j(x,t),$ где $c^0_j(x)$- произвольная функция, $B(x,t)$ и $H_j(x,t)$ известные функции. Подставим найденное выражение в уравнение (20), тогда относительно $c^0_j(x)$ получим уравнение, решая которого при начальном условии определяемого из (19):

$$c^0_j(x)|_{x=j-1}=-exp(-B(j-1,t)[v(j-1,t)+H_j(j-1,t)],\ j=1,2$$

однозначным образом определим решение уравнения (15) в виде (17). Здесь t принимается как параметр. Теорема доказана.

П.3. Определения коэффициентов разложения (11). Используя теоремы 1 и 2 последовательно найдем решения итерационных задач (13_i), $i\geq 0$. Правая часть уравнения (13_0) принадлежить классу U, поэтому, на основании теоремы 1, оно имеет решение представимое в виде

$$u_0\ (M)=v_0(x,t)+\sum_{j=1}^{2}\ c_{0,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}}). \tag{21}$$

Соотношения (16) примут вид

$$\partial_t v_0(x,t)=b(x,t)v_0(x,t)+f(x,t),\quad \partial_t c_{0,j}(x,t)=b(x,t)c_{0,j}(x,t)$$

а из краевых условий для этих уравнений определяются

$$v_0(x,t)|_{t=0}=h(x),\ \ c_{0,j}(x,t\ |_{t=0}=c^0_{0,j}\ (x), \qquad c_{0,j}(x,t)|_{x=j-1}=-v_0(j-1,t).$$

Из этих задач определяем $v_0(x,t)$, а также функцию $c_{0,j}(x,t)=\ c^0_{0,j}\ (x)exp(B(x,t)),$ которая содержит произвольную функцию $c^0_{0,j}\ (x),$ обеспечивающая выполнения условия *b)* теоремы 2. Решая полученное уравнение относительно $c^0_{0,j}\ (x),$ при соответствующих начальных условиях однозначным образом определим главный член асимптотики.

Тогда следующее итерационное решение (13_1) будет однородным, поэтому однородными будут и уравнения из (16), а начальные условия для этих уравнений запишутся

$$v_1(x,t)|_{t=0}=0,\qquad c_{1,j}(x,t\ )|_{t=0}=c^0_{1,j}\ (x),\qquad c_{1,j}(x,t)|_{x=j-1}=-v_1(j-1,t).$$

Решая задачу относительно $v_1(x,t)$ получим $v_1(x,t)\equiv 0$, тогда и начальное условие для $c^0_{1,j}\ (x)|_{x=j-1}=0$. Поэтому и $c_{1,j}(x,t\ )\equiv 0,$ следовательно, мы получим $u_1(M)\equiv 0.$

Далее повторяя описанный процесс можно определить все коэффициенты разложения (11), причем коэффициенты с нечетными индексами обращаются в нуль:

$$u_{\varepsilon,n}(M)=\sum_{i=0}^{n}\ \varepsilon^{2i}[v_{2i}(x,t)+\sum_{j=1}^{2}\ c_{2i,j}\ (x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}})] \tag{22}$$

Производя сужение частичной суммы на векторе $\xi=(\xi_1,\xi_2)=(\varepsilon^{-1}\varphi_1(x),\ \varepsilon^{-1}\varphi_2(x))$ получим

$$u_{\varepsilon,n}(x,t,\frac{1}{\varepsilon}\varphi(x))=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{2i}\{v_{2i}(x,t)+\sum_{j=1}^{2}c_{2i,j}(x,t)erfc(\frac{\varphi_j(x)}{2\varepsilon\sqrt{t}})\} \qquad (23)$$

П.4. Оценка остаточного члена. При регуляризации исходной задачи было использовано соотношение (9), оно использовалось при переходе от задачи (1),(2) к расширенной задаче (10),(8). Нетрудно показать, что сужение (23) частичной суммы (22) является формальным асимптотическим решением исходной задачи (1),(2).

Лемма. *Пусть выполнены условия 1)-3). Тогда при достаточно малых $\varepsilon>0$ сужение разложения (11) является формальным асимптотическим решением задачи (1), (2).*

Доказательство. Классическим способом можно показать, что для решения задачи (1), (2) справедлива оценка

$$|u(x,t,\varepsilon)-u_{\varepsilon,n}(x,t,\frac{1}{\varepsilon^2}\varphi(x),\frac{1}{\varepsilon^2}t)|<c\varepsilon^{2n}.$$

В наших предположениях о гладкости мы можем улучшить оценку по ε на порядок с помощью известного приема [1]. Для этого получим следующий член разложения (11). Тогда по предыдущему справедлива оценка

$$|u(x,t,\varepsilon)-u_{\varepsilon,n}(x,t,\frac{1}{\varepsilon^2}\varphi(x),\frac{1}{\varepsilon^2}t)-\varepsilon^{2n+2}u_{n+1}(x,t,\frac{1}{\varepsilon^2}\varphi(x),\frac{1}{\varepsilon^2}t)|<c\varepsilon^{2n+2}$$

или

$$|u(x,t,\varepsilon)-u_{\varepsilon,n}(x,t,\frac{1}{\varepsilon^2}\varphi(x),\frac{1}{\varepsilon^2}t)|<\varepsilon^{2n+2}|u_{n+1}(x,t,\frac{1}{\varepsilon^2}\varphi(x),\frac{1}{\varepsilon^2}t)|+c\varepsilon^{2n+2}\leq c_1\varepsilon^{2n+2}$$

На основании последнего, учитывая (9), (11), (13) и производя сужение посредством регуляризующих функций мы получаем, что

$$L_\varepsilon u_{\varepsilon n}(x,t,\varphi(x,\varepsilon))=f(x,t)+O(\varepsilon^{2n+2}),\ \forall n=0,1,2,\ldots$$

при достаточно малых $\varepsilon>0$. Лемма доказана.

Для остаточного члена $R_{\varepsilon n}(x,t,\xi)=\widetilde{u}(x,t,\xi,\varepsilon)-u_{\varepsilon n}(x,t,\xi)$ имеем задачу (14), производя там сужение при $\xi_j=\varphi_j(x,\varepsilon)$, $j=1,2$ и учитывая (9), получим задачу

$$L_\varepsilon R_{\varepsilon n}(x,t,\varphi(x,\varepsilon))=\varepsilon^{2n+2}g_{\varepsilon n}(x,t,\varphi(x,\varepsilon)),\ R_{\varepsilon n}|_{t=0}=R_{\varepsilon n}|_{x=0}=R_{\varepsilon n}|_{x=1}=0,$$

$$g_{\varepsilon n}(.)=L_x[u_{n-1}+\varepsilon^2 u_n].$$

Используя вид функций u_{n-1}, u_n нетрудно установить $|g_{\varepsilon n}(x,t,\varphi(x,\varepsilon))|<c$ $\forall(x,t)\in\overline{\Omega}$. Далее применяя принцип максимума [1] можно получить оценку

$$|R_{\varepsilon n}(x,t,\varphi(x,\varepsilon))|<c\varepsilon^{2n+2}\ \ \forall(x,t)\in\overline{\Omega}.$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия 1)-3). Тогда для достаточно малых* $\varepsilon>0$ *имеет место оценка*

$$|u(x,t,\varepsilon)-u_{\varepsilon n}(x,t,\varphi(x,\varepsilon))|<c\varepsilon^{2n+2}$$

$\forall n=0,1,2,\ldots$, *т.е. разложение (11) является асимптотичемким решением задачи (1),(2).*

ЛИТЕРАТУРА

1. ЛОМОВ С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.-М.: Наука, 198 -400 с.
2. ОМУРАЛИЕВ А.С. Регуляризация сингулярно возмущенной параболической задачи при отсутствии спектра предельного оператора.//Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.-1989.- вып. 22.-С.39-42.