

PARÇACIKLARI TAŞIMA İŞLERİNDE KONTROL EDEBİLME PROBLEMİNİN BİR ÇÖZÜMÜ

Prof. Dr. Ramiz R. RAFATOV

Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü-Bişkek/KIRGIZİSTAN

Doç. Dr. Vedat ASİL

Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü-Elazığ/TÜRKİYE

Dr. Mustafa AYDOĞDU

Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü-Elazığ/TÜRKİYE

1. GİRİŞ

Nükleer reaktör düzgün geometrik $G = \{-a \leq x \leq a\}$ yapılışına sahip olsun, $t \leq 0$ olduğu taktirde reaktörde zamandan bağımsız hareket olur. Bu hareketin denklemi,

$$\mu \frac{\partial \psi_0(x, \mu)}{\partial x} + \psi_0(x, \mu) = \sum_{i=0}^N S_i \int_{-1}^1 \psi_0(x, \nu) d\nu \quad (1.1)$$

ve sınır şartları

$$\psi_0(a, \mu) = 0, -1 \leq \mu < 0; \psi_0(-a, \mu) = 0, 0 \leq \mu < 1 \quad (1.2)$$

ile tanımlanır [1, 2].

Kabul edelim ki, $t = 0$ anında reaktörün aktif bölgesine kontrol çubukları yerleştirilsin [1, 2]. O zaman nötronların kritik çoğalma katsayısı K_{kT} değişir, artma olur (fazla reaktiflik) ve reaktörde zamana bağlı hareket başlar. Bu hareket $-a \leq x \leq a$, $-1 \leq \mu \leq 1$, $0 \leq t \leq T$ bölgesinde zamana bağlı lineer integro - diferansiyel denklemi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(x, \mu, t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial \psi(x, \mu, t)}{\partial x} + \psi(x, \mu, t) &= F(x, \mu, t, u) + S_0 \int_{-1}^1 \psi(x, \mu', t) d\mu' + \\ &+ \sum_{i=1}^N \lambda_i S_i \int_a^\infty e^{-\lambda_i \tau} d\tau \int_{-1}^1 \psi(x, \mu', t - \tau) d\mu' \end{aligned} \quad (1.3)$$

sınır şartları;

$$\psi(a, \mu, t) = 0, -1 \leq \mu < 0; \psi(-a, \mu, t) = 0, 0 < \mu \leq 1 \quad (1.4)$$

ve başlangıç şartı,

$$\psi(x, \mu, t) |_{t \leq 0} = \psi(x, \mu, 0) = \psi_0(x, \mu) \quad (1.5)$$

ile tanımlanır [1, 2].

Burada $\psi_0(x, \mu)$, (1.1) ve (1.2) denklemlerinin bir çözümüdür. Yani, (1.1), (1.2) zamandan bağımsız homojen sınır probleminin (x, μ) noktasındaki nötronların yoğunluğunu belirten çözümdür. $\psi(x, \mu, t)$ nötronların (x, μ) noktasında ve t anındaki yoğunluğudur, S_i , i -inci takım gecikme nötronlarının miktarları ile birlikte nükleer reaksiyonların yoğunluğu, λ_i^{-1} , i -inci takım gecikme nötronlarının yaşama süresi, $F(x, \mu, t, u)$, (x, μ) noktasında t anındaki nötron kaynaklarının yoğunluğudur. Buradaki $u = u(t)$ fazla reaktifliğe göre bağımlıdır.

Burada kolayca görülüyor ki, $t \leq 0$ olduğu zaman $u(t) = 0$, $\psi(x, \mu, t) = \psi_0(x, \mu)$ ve

$F(x, \mu, t, 0) = 0$ dir. O halde (1.3) denklemi (1.1)'e denktir. Böylece (1.4) sınır şartları (1.2) sınır şartlarına dönüşür.

Burada kabul edilen kontrol fonksiyonları $u(t) \in U \subset L^2[0, T]$ dir. (1.3) ve (1.5) sistemi için kontrol edebilme problemi en genel halde aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Problem 1.1. Kabul edelim ki, $\psi_1(x, \mu)$, nötronların zamandan bağımsız yoğunluğu ve $\psi_0(x, \mu)$ den farklı, ayrıca (1.1) denklemini ve (1.2) sınır şartını sağlasın.

Öyle bir $u(t) \in U \subset L^2[0, T]$ kontrol fonksiyonu bulmak istiyoruz ki, bu fonksiyona karşılık, (1.3) - (1.5) probleminin çözümü aşağıdaki son şartı sağlasın,

$$\psi(x, \mu, T) = \psi_1(x, \mu) \quad (1.6)$$

Ayrıca T - anından itibaren meydana gelen $\psi_1(x, \mu)$ dağılımı $u(t) = 0$ olduğu zaman her $t > T$ için sabit kalsın.

2. Zamandan Bağımsız Homojen Taşıma Probleminin Çözümü:

(1.1) denklemini

$$\mu \frac{\partial \psi_0(x, \mu)}{\partial x} + \psi_0(x, \mu) = \frac{\sigma}{2} \int_{-1}^1 \psi_0(x, \mu') d\mu' \quad (2.1)$$

şeklinde yazalım. [3] de gösterilmiştir ki, $\sigma = \sum_{i=0}^N S_i < 1$ halinde (2.1) ve (1.2) denklemlerinin aşikar olmayan çözümü yoktur.

Bundan dolayı $\sigma > 1$ halini inceleyeceğiz ve [1, 2] in sonuçlarından faydalanacağız.

Dolayısıyla,

$$\int_{-a}^a \int_{-1}^1 \psi_0(x, \mu) \psi_1(x, \mu) d\mu dx \neq 0$$

dir ve

$$\psi_0(x, \mu) = C_0 \varphi_0(x, \mu), \psi_1(x, \mu) = C_1 \varphi_0(x, \mu)$$

dir. Burada $C_0, C_1 > 0$ sabitleri;

$$\varphi_0(x, \mu) = e^{\frac{x}{\alpha_1}} \varphi_{\alpha_1}(\mu) + e^{\frac{x}{\alpha_2}} \varphi_{\alpha_2}(\mu) + \int_{-1}^1 A(\alpha) e^{\frac{-x}{\alpha}} \varphi_{\alpha}(\mu) d\alpha \quad (2.2)$$

dir.

$$\varphi_{\alpha_k}(\mu) = \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{\alpha_k}{\alpha_k - \mu}, k = 1, 2, \alpha_k \notin [-1, 1] \quad (2.3)$$

$$\varphi_{\alpha}(\mu) = \frac{\sigma}{2} P \frac{\alpha}{\alpha - \mu} + \lambda(\alpha) \delta(\alpha - \mu) \quad (2.4)$$

Burada δ - Dirak fonksiyonu, P, Cauchy anlamında fonksiyonun esas değeridir.

$$\lambda(\alpha) = 1 - \frac{\sigma}{2} P \int_{-1}^1 \frac{\alpha}{\alpha - \mu} d\mu$$

$\alpha_k, k = 1, 2$ için aşağıdaki denklemin

$$\lambda(\alpha) = 1 - \frac{\sigma}{2} \alpha \ln \left| \frac{1 + \frac{1}{\alpha}}{1 - \frac{1}{\alpha}} \right| = 1 - \sigma \alpha \operatorname{Arcth} \left(\frac{1}{\alpha} \right) = 0$$

farklı çözümleridir. Yani homojen (2.1) ve (1.2) sınır probleminin farklı özdeğerleridir. Bunlara karşılık gelen farklı öz fonksiyonlar da (2.3) formülleri ile verilmiştir. $\alpha \in [-1, 1]$ ise (2.1) ve (1.2) problemin sürekli özdeğer spektridir. Bunlara karşılık gelen öz fonksiyonlarda (2.4) formülü ile verilmiştir.

(2.3) ve (2.4) fonksiyonları $[-1, 1]$ aralığında μ çekimi ile ortogonaldırlar;

$$\int_{-1}^1 \mu \varphi_{\alpha_k}(\mu) \varphi_{\alpha_j}(\mu) d\mu = N_k \delta_{jk}, j, k = 1, 2$$

$$\int_{-1}^1 \mu \varphi_{\alpha}(\mu) \varphi_{\beta}(\mu) d\mu = N_{\alpha} \delta(\alpha - \beta)$$

dir.

Burada $N_k (k = 1, 2), N_{\alpha} (\alpha \in [-1, 1])$ norm bağlama katsayılarıdır $[1, 2]$.

Bu denklemler reaktörü kritik yapılaşa dönüştüren " σ ve α " değerleri ile belirtilir $[1, 2]$. Eğer nötron kaynaklarının yoğunluğu $F(x, \mu, t, u)$

$$F(x, \mu, t, u) = \int_{-1}^1 \exp\left(\frac{-x}{\alpha}\right) \varphi_{\alpha}(\mu) F_{\alpha}(t, u) d\alpha + \sum_{k=1}^2 \exp\left(\frac{-x}{\alpha_k}\right) \varphi_{\alpha_k}(\mu) F_{\alpha_k}(t, u) \quad (2.5)$$

ise (1.3) ve (1.6) probleminin çözümü [1 ,2]'de benzer şekilde ispatlanmıştır. Burada $F_{\alpha}(t,u), \alpha \in F_{\alpha_k}(t,u), (k = 1, 2)$ belirli fonksiyonlardır. $\alpha_{1,2} = \pm\alpha_0, \langle i\beta, \beta \rangle = 0, i = \sqrt{-1}$ olduğu zaman

$$\Psi(x, \mu, t) = \int_{-1}^1 \exp\left(\frac{-x}{\alpha}\right) \varphi_{\alpha}(\mu) \psi_{\alpha}(t) d\alpha + \sum_{k=1}^2 \exp\left(\frac{-x}{\alpha_k}\right) \varphi_{\alpha_k}(\mu) \psi_{\alpha_k}(t)$$

olur. Burada $\varphi_{\alpha_k}(\mu), (k = 1, 2), \varphi_{\alpha}(\mu), (\mu, \alpha \in [-1, 1])$ (2.3) ve (2.4) formülleri ile belirtilirler. $\Psi_{\alpha_k}(t), (k = 1, 2), \psi_{\alpha}(t), (\alpha \in [-1, 1])$ halen bilinmeyen fonksiyonlardır.

3. Nötron Kaynaklar Yoğunluğunun Basit Halde Kontrol Edebilme Probleminin Çözümü:

Kabul edelim ki (2.5) fonksiyonun katsayıları,

$$F_{\alpha}(t, u) = F_{\alpha} u(t), F_{\alpha_1}(t, u) = F_{\alpha_2}(t, u) = F_{0+} u(t)$$

şeklinde olsun. Problem 1 in aşağıdaki moment eşitliklerine dönüştüğünü göstermek istiyoruz.

$$\int_0^T W_{0+}(T-t)u(t)dt = \eta_{0+} = \frac{g_{0+}}{F_{0+}} \quad (3.1)$$

$$\int_0^T W_{\alpha}(T-t)u(t)dt = \eta_{\alpha} = \frac{g_{\alpha}}{F_{\alpha}}$$

Burada $g_{0+} \neq 0$ belirli miktar, $F_{\alpha} \neq 0$ belirli fonksiyondur.

$$g_{0+} = \tilde{C} - q_{0+}(T), g_{\alpha} = \tilde{C}A(\alpha) - q_{\alpha}(T), (\alpha \in [-1, 1])$$

$$q_{0+}(T) = W_{0+}(T) + \sum_{i=1}^N m_j^+ \int_0^T W_{0+}(T-\tau) e^{-\lambda_j \tau} d\tau,$$

$$q_{\alpha}(T) = A(\alpha) \left[W_{\alpha}(T) - \sum_{i=1}^N m_j \int_0^T W_{\alpha}(T-\tau) e^{-\lambda_j \tau} d\tau \right], \alpha \in [-1, 1]$$

Burada, $\tilde{C} = \frac{C_1}{C_0}$ sabit, $W_{\alpha+}(T) = \sum_{k=0}^N \sigma_k^+ e^{p_k^+ T}, W_{\alpha}(T) = \sum_{k=0}^N \sigma_k e^{p_k T}$, ve

m_j^+, σ_k^+, p_k^+ belirli sabitlerdir. m_j, σ_k, p_k α dan bağımsız belirli fonksiyonlardır.

Böylece problemimiz aşağıdaki probleme dönüşür.

Parçacıkları Taşıma İşlerinde Kontrol Edebilme Probleminin Bir Çözümü

Problem 3.1. Öyle bir $u(t) \in U \subset L^2 [0, T]$ kontrol fonksiyonu bulmak istiyoruz ki, (3.1) moment eşitliklerini sağlasın,

Bu problemi çözmek için $L^2 [0, T]$ uzayında L_α lineer cümlesi seçelim. Öyle ki bu cümlelerin elemanları

$$u(t) = C_{0+} W_{0+}(T-t) + \int_{-1}^1 C_\alpha W_\alpha(T-t) dt \quad (3.2)$$

şeklinde olsunlar. Burada $C_{0+}, C_\alpha (\alpha \in [-1, 1])$,

$$\int_0^T u^2(t) dt = C_{0+}^2 \gamma_{0+} + 2C_{0+} \int_{-1}^1 \gamma_{\alpha_{0+}} C_\alpha + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma_{\alpha\alpha'} C_\alpha C_{\alpha'} d\alpha d\alpha' < \infty$$

eşitsizliğini sağlamak zorundadır. Buradaki

$$\gamma_{0+} = \int_0^T W_{0+}^2(t) dt, \alpha_{0+} = \int_0^T W_{0+}(t) W_\alpha(t) dt$$

ve

$$\gamma_{\alpha\alpha'} = \int_0^T W_\alpha(t) W_{\alpha'}(t) dt \quad (3.3)$$

dir. L_α lineer cümlesi $L^2 [0, T]$ uzayı tarafından kapsansın. O zaman meydana gelen uzayı $H_\alpha \subset L^2 [0, T]$ ile gösterelim.

Dolayısıyla H_α uzayının elemanları L_α nın (3.2.) şeklindeki elemanlarıdır. Ayrıca her $\tilde{U} \in L^2 [0, T]$ için $d(\tilde{U}, U_n) \rightarrow 0$ şartını sağlayan \tilde{U} da H_α nın elemanıdır. Burada $\{U_n\} \in L_\alpha, L^2 [0, T]$ uzayında L_α lineer cümlesinin keyfi bir dizisidir.

$H_\alpha \subset L^2 [0, T]$ fakat $H_\alpha \notin L^2 [0, T]$ dir [3, 4].

Dolayısıyla öyle bir $g(t) \in L^2 [0, T]$ vardır ki,

$$\int_0^T g(t) W_{0+}(T-t) dt = \int_0^T g(t) W_\alpha(T-t) dt = 0, \alpha \in [-1, 1]$$

onun için her $u(t) \in L_\alpha$ için,

$$\int_0^T g(t) u(t) dt = 0 \quad (3.4)$$

dir. Buradan $u(t) \in H_\alpha$ dir.

Fonksiyonel analiz bir teoreminin sonucu gereğince [4] her $u(t) \in L^2 [0, T]$ için tek anlamda

$$u(t) = u_0(t) + g(t) \quad (3.5)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada da $u_0(t) \in H_\alpha$ dır. $g(t)$ ise $u_0(t)$ 'ye ortogonaldır ve (3.4)'ü sağlar.

Kabul edelim $u_0(t)$ (3.2) ifadesi ile tanımlanmış olsun. O zaman (3.5) ifadesini (3.1)'de yerine yazarsak

$$\int_0^T W_{0+}(T-t)u(t)dt = \int_0^T W_{0+}(T-t)u_0(t)dt,$$

$$\int_0^T W_\alpha(T-t)u(t)dt = \int_0^T W_\alpha(T-t)u_0(t)dt$$

elde ederiz. Yani (3.5) de ki $g(t)$ (3.1) denklemlerinin sol tarafına etki etmiyor. Dolayısıyla incelenen momentler problemin çözümü varsa, bu çözüm H_α ya aittir.

Şimdi (3.2) ifadesini (3.1) sisteminde yerlerine koyarsak aşağıdaki,

$$\gamma_{0+} C_{0+} + \int_{-1}^1 \gamma_{\alpha_0+} C_\alpha d\alpha = \eta_{0+} \quad (3.6)$$

$$\gamma_{\alpha_0+} C_{0+} + \int_0^T \gamma_{\alpha\alpha'} C_{\alpha'} d\alpha' = \eta_\alpha, \alpha \in [-1, 1]$$

sistemi elde ederiz. Burada γ_{0+} , γ_{α_0+} (3.3) formülleri ile tanımlanan belirli integrallerdir.

$$C = \{C_{0+}, C_\alpha\}, \eta = \{\eta_{0+}, \eta_\alpha\}, \alpha \in [-1, 1] \quad (3.7)$$

özel vektörlerini ve

$$\Gamma(.) = \begin{bmatrix} \gamma_{0+} & \int_{-1}^1 \gamma_{\alpha_0+} (.) d\alpha \\ \gamma_{\alpha_0+} & \int_{-1}^1 \gamma_{\alpha\alpha'} (.) d\alpha' \end{bmatrix}$$

matris operatörü olarak alalım. O zaman (3.2) veya (3.6) sistemi tek matris operatör denklemi olarak,

$$\Gamma C = \eta \quad (3.8)$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi (3.7) şeklinde olan ve

$$|C_{0+}|^2 + \int_{-1}^1 |C_{\alpha_0+}|^2 d\alpha < \infty$$

eşitsizliğini sağlayan elemanlardan oluşan $L_+^2[-1, 1]$ Hilbert uzayını inceleyelim. $L_+^2[-1, 1]$ de skalar çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsunlar.

$$\langle C, \eta \rangle = C_{0+} \eta_0 + \int_{-1}^1 C_\alpha \eta_\alpha$$

$$\|C\|^2 = |C_{0+}|^2 + \int_{-1}^1 |C_\alpha|^2 d\alpha$$

gösterilir ki,

$$\Gamma : L_+^2[-1, 1] \rightarrow L_+^2[-1, 1]$$

dönüşümü simetrik ve pozitif tanımlıdır. Yani her $0 \neq C \in L_+^2[-1, 1]$ için $\langle \Gamma C, C \rangle \geq 0$ ve burada eşitlik sadece $C = 0 \in L_+^2[-1, 1]$ olduğu zaman sağlanır. Bundan dolayı (3.8) operatör denklemini çözmek için varyans metotlarını uygulayacağız.

Sonuçta aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.: Eğer (3.1) veya (3.8)'de $\eta = \{\eta_{0+}, \eta_\alpha\}$, $\alpha \in [-1, 1]$, $L_+^2[-1, 1]$ uzayına ait ise, o zaman (3.7) momentler problemi,

$$u(t) = C_{0+} W_{0+}(T-t) + \int_{-1}^1 C_\alpha W_\alpha(T-t) d\alpha$$

fonksiyonunun bulunması problemine dönüşür.

Burada $C = \{C_{0+}, C_\alpha\}$, $\alpha \in [-1, 1]$, $L_+^2[-1, 1]$ uzayının elemanıdır ve aşağıdaki fonksiyoneli minimum yapar.

$$D(C) = \langle \Gamma C, C \rangle - 2\langle \eta, C \rangle$$

Böyle bir elemanın mevcut olması için gerek ve yeter şart

$$|\langle \eta, C \rangle| \leq M \sqrt{\langle \Gamma C, C \rangle}$$

eşitliğini sağlayan $M > 0$ sabitinin mevcut olmasıdır.

KAYNAKLAR

- [1] Ramiz RAFATOV, Parçacıkları Taşıma ve Difüzyon İşlerindeki optimal Yönetimin dinamik Programlaması. // Kırgızistan – Türkiye Manas Üniversitesi, Fen Bilimleri Dergisi, Sayı 3, Bişkek, 2002, S.108 -140.
- [2] EGOROV A.İ., RAFATOV R.R., "Termik ve Difüzyon İşleri Optimizasyonunun Matematiksel Metotları", Frunze, Kırgızistan, 1990.
- [3] KEYZ K., TSVAYFEL P., "Taşınmanın Lineer Teorisi", M. Mir, 1972.
- [4] LÜSTERNİK L.A., SOBOLEV V.İ., "Fonksiyonel Analizin Elemanları", M. 1965.