LİNEER OLMAYAN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERE BAĞLI İNTEGRAL KARESEL FONKSİYONELİNİN MİNİMİZASYON PROBLEMİNDE EK DEĞİŞKENLER METODU

Ramiz Rafatov

Kırgızistan–Türkiye Manas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Bişkek, Kırgızistan, E-mail: ramiz.rafatov@manas.kg

M. Haluk Çelik

Kırgızistan–Türkiye Manas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Bişkek, Kırgızistan, E-mail: haluk_manas@hotmail.com

Özet

Bu makalede yönetim süreci incelenmiştir ve çözülmüştür. Adı geçen yönetim süreci ise birinci mertebeden lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem yardımıyla verilmiştir. Bu diferansiyel denkleme t=o noktasında başlangıç şart ve n noktalarında $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

Sınır koşullar verilmiştir. Burada yönetim kriteryumu intergral kare fonksiyoneldir, bu fonksiyonel sistemin durumunun son haline ve n tane yönetim parametrelerine bağlıdır. Optimallığının şartlarını belirtmek için fonksiyonelin artması metodu uygulanmaktadır [1] ve burada elde edilen lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemleri çözmek için ek argümanlar metodu uygulanmaktadır [2]

Anahtar kelimeler: yönetim süreci, kısmi türevli diferansiyel denklem, fonksiyonelin artması metodu, ek argümanlar metodu.

METHOD OF ADDITIONAL (SUPPLEMENTARY) ARGUMENT IN THE PROBLEM OF MINIMIZATION OF INTEGRAL, QUADRATIC FUNCTIONAL IN CORRELATIONS IN THE FORM OF NONLINEAR EQUATION WITH PARTIAL DERIVATIVES

Abstract

The problem of operation of process, which is described in the form of nonlinear differential equation with partial derivatives of the first serious, to which the initial hypothesis (t = 0) and the serious of sequence n points $x_1 < x_2 < ... < x_n$ are associated are being solved. The quadratic functional is the criterion of quality of control which depends of final state of system and total combination n of controlling parameters. The method of increment of functional for getting of hypothesis of optimum is being used [1], and the Method of additional argument (MAA) [2] for determination of nonlinear equations.

Key words: operation of process, nonlinear differantional equatior, metod of additional argument.

Problem hakkında. Lineer olmayan kısmi denklem

$$\frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t} + \psi(t,x)\frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} u_i(t) f_i(t,x), \; t \in [0,T], \; x \in R \tag{1.1}$$

formuluyla yönetilebilen nesneyi

$$\psi(0,x) = \psi_0(x), x \in R \tag{1.2}$$

başlangıç şartını, ve

$$\psi(t,x_j) = g_j(t), \; t \in [0,T], x_1 < x_2 < ... < x_n \tag{1.3}$$

sınır şartlarını tanımlasın. Bu nesneyi $\psi_0(x) \in L^2(R)$ uzayında; $[0,T]xR$ bölgesindeki tanımlanan fonksiyonlar: $f_i(t,x), i = 1,2,...,n, \; g_i(t) \; i = 1,2,...,n,$

$$\psi_0(x_j) = g_j(0), j = 1,2,...,n. \tag{1.4}$$

olsunlar.

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t),...,u_n(t)) \in U \subset L^2[0,T] \tag{1.5}$$

şartını $u_i(t), i = 1,2,...,n,$ kabuledilebilen yönetici fonksiyonları sagladığını ileri sürelim.

Yukarıda ifade edilen şartlar da kabuledilebilen her yönetici fonksiyonu u(t) için $[0,T]$ aralığının her noktasında (1.1) denklemini sağlayan ve $x \in R$ (1.2), (1.3) koşullarına uyan tekanlamlı $\psi(t,x)$ fonksiyonu karşılanmaktadır.

Problemin öz Yapısı

(1.1) – (1.3) ifadesinin çözümü $\psi^0(t,x)$, ve $u = u^0(t)$ için

$$J[u]=\int_R [\psi(T,x)-\psi_1(x)]^2 dx+\beta\int_0^T\sum_{i=1}^n u_i^2(t)dt \tag{1.6}$$

karesel integral fonksiyonelinin en az değere sahip olması için; kabul edilebilen yönetici fonksiyonların $u^0(t)=(u_n^0(t),u_n^0(t),...,u_n^0(t))$ vektör- fonksiyonunun teşkili edilmesi.

Burada $T-$yönetim zamanını ifade eden bir sabit, $\psi_1(x)$ verilen fonksiyon, $L^2(R)$ Hilbert fonksiyonel uzayına aittir.

Çözüm teklifi

Optimallığın şartları

Keyfi olarak $u(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_n(t))$ kabul edilebilen yönetici vektör-fonksiyonunu olarak seçelim, $(1.1)-(1.3)$ bağıntılarında verilen problemin çözüm ifadesini $\psi(t,x)$ ile gösterelim. Yönetici $u(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_n(t))$ vektör-fonksiyonuna bir $\Delta u=(\Delta u_1,\Delta u_2,...,\Delta u_n)$ artması önerelim, buna karşılık gelen $\psi(t,x)$ fonksiyonun artmasını da $\Delta\psi$ ile ifade edelim. Bu durumda; $\Delta\psi(t,x)$

$$\Delta\psi_t+\psi\Delta\psi_x+\Delta\psi\psi_x+\Delta\psi\Delta\psi_x-\sum_{i=1}^n\Delta u_i(t)f_i(t,x)=0 \tag{2.1}$$

denkleminin çözümü olur.

(1.5) no'lu ifade dikkate alınırsa, $J[u]$ fonksiyonelinin artması ise:

$$\Delta J[u]=2\int_R[\psi(T,x)-\psi_1(x)]\Delta\psi(T,x)dx+2\beta\sum_{i=1}^n u_i(t)\Delta u_i(t)dt+$$

$$+\int_R[\Delta\psi(T,x)]^2dx+\beta\sum_{i=1}^n[\Delta u_i(t)]^2dt \tag{2.2}$$

Şeklinde olur.

Şimdi aşağıda verilen şartlara tabi olan

$$\lim_{x\to-\infty}\Phi(t,x)=\lim_{x\to+\infty}\Phi(t,x)=0,\forall t\in[0,T] \tag{2.3}$$

keyfi olarak seçilen $\Phi(t,x)\in W_2^{0,1}([0,T]xR)$ fonksiyonunu inceleyelim: Bu durumda

$$\int_0^T\int_R \Phi(t,x)\left[\psi_t(t,x)+\psi(t,x)\psi_x(t,x)-\sum_{i=1}^n u_i(t)f_i(t,x)\right]dxdt=0 \qquad (2.4)$$

no'lu ifadeyi tesis ederiz. Bu eşitliğin sol tarafını $A[\Phi,\psi,u]$ ile gösterirsek; buradan

$$\Delta A[\Phi,\psi,u]=\int_0^T\int_R \Phi(t,x)\{\Delta\psi_t+\psi\Delta\psi_x+\Delta\psi\psi_x+\Delta\psi\Delta\psi_x-$$

$$-\sum_{i=1}^n \Delta u_i(t)f_i(t,x)\ \}dxdt=0$$

yazabiliriz. (2.1) ve (2.3) no'lu ifadenin yardımıyle kısmi integrasyon yaparak yukarıda verilen tanımı;

$$\Delta A[\Phi,\psi,u]=\int_R \Phi(T,x)\Delta\psi(T,x)dx-\int_0^T\int_R \Delta\psi(t,x)\{\Phi_t(t,x)+$$

$$+\psi(t,x)\Phi_x(t,x)+\frac{1}{2}\Delta\psi(t,x)\Phi_x(t,x)\ \}dxdt-$$

$$-\int_0^T\int_R \Phi(t,x)\sum_{i=1}^n \Delta u_i(t)f_i(t,x)dxdt=0 \qquad (2.5)$$

olarak tanımı yeniden yazarız ve (2.2) no'lu ifadeyle toplarsak

$$\Delta J[u]=\int_R \{2[\psi(T,x)-\psi_1(x)]+\Phi(T,x)\}\Delta\psi(T,x)dx+$$

$$+\int_0^T\sum_{i=1}^n \Delta u_i(t)\left\{2\beta u_i(t)-\int_R f_i(t,x)\Phi(t,x)dx\right\}dt-$$

$$-\int_0^T\int_R \Delta\psi(t,x)[\Phi_t+\psi\Phi_x]dxdt+\int_R[\Delta\psi(T,x)]^2dx+$$

$$+\beta\int_0^T\sum_{i=1}^n[\Delta u_i(t)]^2dt-\frac{1}{2}\int_0^T\int_R \Phi_x(t,x)[\Delta\psi(t,x)]^2dxdt. \qquad (2.6)$$

eşitlik bulunur.

Buraya kadar, $\Phi(t,x)\in W_2^{0,1}([0,T]xR)$ bir keyfi fonksiyon olarak ileri sürülmüştü, ama şimdi bu fonksiyon

$$\Phi_t(t,x)+\psi(t,x)\Phi_x(t,x)=0, t\in[0,T], x\in R, \tag{2.7}$$

$$\Phi(T,x)=-2[\psi(T,x)-\psi_1(x)], x\in R, \tag{2.8}$$

probleminin genelleştirilmiş çözümüdür diyebiliriz. Burada $\psi(t,x)-$ (1.1) ve (1.3) ifadede verilen problemin $u(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_n(t))$ yönetici vektör- fonksiyonuna karşılık gelen çözümüdür. $\psi_1(x)$ ise (1.5) no'lu ifadenin fonksiyonudur. Burada (2.7),(2.8) probleminin genelleştirilmiş çözümü diye her $\Phi^*(t,x)\in W_2^{0,1}([0,T]xR)$ için

$$\int_R \{2[\psi(T,x)-\psi_1(x)]+\Phi(T,x)\}\Phi^*(T,x)dx-$$

$$-\int_0^T\int_R \Phi^*(t,x)[\Phi_t(t,x)+\psi(t,x)\Phi_x(t,x)]dxdt=0 \tag{2.9}$$

integral eşitligini sağlıyan $\Phi(t,x)\in W_2^{0,1}([0,T]xR)$ fonksiyonuna denir.

Diğer taraftan $\Phi^*=\Delta\psi$ olarak ileri sürülürse (2.6) ve (2.9) ifadelerinden

$$\Delta J[u]=\int_0^T\sum_{i=1}^n\left[2\beta u_i(t)-\int_R f_i(t,x)\Phi(t,x)dx\right]\Delta u_i(t)dt+\int_R[\Delta\psi(T,x)]^2dx+$$

$$+\int_0^T\int_R\left\{\beta\sum_{i=1}^n[\Delta u_i(t)]^2-\frac{1}{2}\Phi_x(t,x)[\Delta\psi(t,x)]^2\right\}dxdt \tag{2.10}$$

eşitligini yazarız.

Buraya kadar; $u(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_n(t))$ gelişi güzel bir yönetici vektör-fonksiyon idi, $\psi(t,x)$ ise (1.1) ve (1.3) probleminin ona karşılık gelen çözüm şekiliydi. Şimdi, (2.10) ifadede $u=u^0, \psi=\psi^0, \Phi=\Phi^0$, dersek, kabul edilebilen her yönetici fonksiyonun artması olan $\Delta u(t)=(\Delta u_1(t),\Delta u_2(t),...,\Delta u_n(t))$ ve, buna karşılık gelen $\psi(t,x)$ fonksiyonun artması $\Delta\psi(t,x)$ için

$$-\int_0^T\sum_{i=1}^n\Delta u_i(t)\left[\int_R f_i(t,x)\Phi^0(t,x)dx-2\beta u_i^0(t)\right]dt+$$

$$+\int_R[\Delta\psi(T,x)]^2dx+\int_0^T\int_R\left\{\beta\sum_{i=1}^n[\Delta u_i(t)]^2-\frac{1}{2}\Phi_x(t,x)[\Delta\psi(t,x)]^2\right\}dxdt\ge 0 \tag{2.11}$$

eşitsizliğini kurabiliriz. Bu eşitsizliğin sol tarafındaki 2 inci ve 3 üncü terimlei $\Delta u_i, (i = 1,2,...,n)$ ve $\Delta\psi$ ifadelerinin ikinci derecelerine bağlı olduklarından (2.11) eşitsizlinin işareti onun 1 inci teriminin işaretine denktir.

O halde; $u^0(t) = (u_1^0(t), u_2^0(t),..., u_n^0(t))$ yönetici fonksiyonunun ve (1.1) – (1.3) de verilen problemin çözümünün de $\psi^0(t,x)$ 'in optimal olmasının gerek şartı:

$\psi^0(t,x)$ fonksiyonuna eşlenik fonksiyon olan $\Phi^0(t,x)$ 'in ve her kabuledilebilen $\Delta u(t) = (\Delta u_1(t), \Delta u_2(t),..., \Delta u_n(t))$ için aşağıda verilen eşitsizlik sağlansın:

$$\int_0^T \sum_{i=1}^n \Delta u_i(t) \left[\int_R f_i(t,x)\Phi^0(t,x)dx - 2\beta u_i^0(t) \right] dt \le 0. \tag{2.12}$$

Bu ifade de verilen eşitsizliğin keyfi her artışı için $\Delta u(t) = (\Delta u_1(t), \Delta u_2(t),..., \Delta u_n(t))$ sağlandığından sırasıyla $\Delta u = (\Delta u_1, 0,0,...,0)$, $\Delta u = (0, \Delta u_2, 0,...,0)$,..., $\Delta u = (0,0,0,..., \Delta u_n)$ artmalarını (2.12) deki yerine koyarsak;

$$\int_R f_i(t,x)\Phi^0(t,x)dx - 2\beta u_i^0(t) \le 0, \forall i = 1,2,...,n. \tag{2.13}$$

Şeklinde yazmış oluruz.

Şimdi

$$H_i(\Phi^0, u_i^0) = u_i^0 \int_R \Phi^0 f_i dx - \beta(u_i^0)^2, \quad i = 1,2,...,n, \tag{2.14}$$

yazar, ve bunu (2.13) eşitsizliklerinin yerine her kabul edilebilen yönetici fonksiyonlar için

$$\int_0^T \left[H_i(\Phi^0, u_i) - H(\Phi^0, u_i^0) \right] dt \le 0, \quad i = 1,2,...,n \tag{2.15}$$

eşitsizliklerini tesis edeiz.

Bu meyanda; (2.15) no'lu eşitsizlik ifadesi

$$H_i(\Phi^0, u_i^0) = \max_{u_i} H_i(\Phi^0, u_i), i = 1,2,...,n, \tag{2.16}$$

'ya denktir. Burada eşitlik her indis $i(i = 1,2,...,n)$ için $[0,T]$ aralığının hemen hemen her noktasında geçerli olup, maksimum olması halinde (1.5) ifadesine tabi olan her $u_i, (i = 1,2,...,n)$ yönetici fonksiyonları için alınabilir.

Teorem (Maksimum Prensibi). *Kabul edilebilen yönetici fonksiyonun ve* $(1.1)-(1.3)$ *probleminin ona karşılık gelen* $\psi^0(t,x)$ *çözümünün optimal olmaları için gerek şartı* $H_i, i=1,2,...,n,$ *fonksiyonlarının (2.16) eşitliklerini sağlandırmalarıdır. Burada* $\Phi^0(t,x)$ *ise (2.7), (2.8) probleminin* $\psi=\psi^0(t,x)$ *e karşılık gelen çözümüdür.*

Optimal Yöneticinin Düzenlenmesi

Keyfi olarak alınan

$-\infty < u_i(t) < +\infty \ , \ i=1,2,...,n \ , \ t\in[0,T]$

bölgesinde kabul edilebilen fonksiyonlar bulunsun. Bu durumda (2.16) no'lu ifadedeki eşitlikten u_i^0 optimal yönetici fonksiyonlarının

$$u_i(t)=\frac{1}{2\beta}\int_R f_i(t,x)\Phi(t,x)dx, i=1,2,...,n.$$

eşitliğini sağlar.

Bu durumda problemimiz $u^0=(u_1^0,u_2^0,...,u_n^0)$, ψ^0 ve Φ^0 fonksiyonlarını (1.1), (1.3) ve (2.17) şartının yardımıyla:

$$\Phi_t(t,x)+\psi(t,x)\Phi_x(t,x)=0, t\in[0,T], x\in R, \tag{2.18}$$

$$\Phi(T,x)=-2[\psi(T,x)-\psi_1(x)], x\in R \tag{2.19}$$

problemine dönüşmüş olur.

Problemin Lineer olmayan İntegral Denklem Sistemine Dönüşü

(1.1), (1.3) ve (2.17), (2.19) ifadesine dönüşmesi için ek değişkenler metodunu – EDM $[2,3]$ ele alalım. Bu amaçla (1.2) no' lu ifadede verilen eşitlikte t ' nin yerne ρ ' yu ve x ' in yerine $v(t,\rho,x)$ formülünü

$$v(t,\rho,x)=x-\int_\rho^t \psi(\tau,v(t,\tau,x))d\tau \tag{2.20}$$

Yerleştirirsek ve elde edilen denklemden ρ ' ya göre 0 dan s ye kadar ($0\le s\le T$) integralıni alırsak sonuçta:

$$\psi(s,v(t,s,x))=\psi_0(x-\int_0^t \psi(\tau,v(t,\tau,x))d\tau)+$$

$$+\int_0^s \sum_{i=1}^n u_i(\rho) f_i(\rho, x - \int_\rho^t \psi(\tau, v(t,\tau,x)) d\tau) d\rho \, . \qquad (2.21)$$

Buluruz, ve:

$$W(t,s,x) = \psi(s, v(t,s,x)) \qquad (2.22)$$

olarak gösterirsek (2.21) no'lu ifade de verilen denklemi lineer olmayan integral denklemi şeklinde yazabiliriz, ve:

$$\psi(s, v(t,s,x)) = \psi_0(x - \int_0^t W(t,\tau,x) d\tau) +$$

$$+\int_0^s \sum_{i=1}^n u_i(\rho) f_i(\rho, x - \int_\rho^t W(t,\tau,x) d\tau) d\rho \, . \qquad (2.23)$$

$W(t,s,x)\big|_{s=t} = \psi(t,x)$ olduğundan (2.23) no'lu eşitlikten:

$$\psi(t,x) = \psi_0(x - \int_0^t W(t,\tau,x) d\tau) +$$

$$+\int_0^t \sum_{i=1}^n u_i(\rho) f_i(\rho, x - \int_\rho^t W(t,\tau,x) d\tau) d\rho \qquad (2.24)$$

yazılır.

Benzer düşüncelerle (2.18), (2.19) no'lu problemin çözümü bulunabilir.

(2.18), (2.19) ifadelerde t 'yi ρ ile x ' i ise $v(t,\rho,x)$ ile (2.20) ifadenin yardımıyla, değişimden sonra meydana gelen denklemi ρ' ya göre: 0 'dan s ye kadar $(0 \le s \le T)$ integral alırsak:

$$\Phi(s, v(t,s,x)) = -2\left[\psi(T, v(t,T,x)) - \psi_1(v(t,T,x))\right]$$

eşitliğini yazarız. Buradan (2.20) no'lu ifade de verilenleri dikkate alır ve $s = t$ olarak yazarsak

$$\Phi(t,x) = -2\left[W(t,T,x) - \psi_1(x + \int_t^T W(t,\tau,x) d\tau \right] \qquad (2.25)$$

eşitliğini buluruz. (2.17) den ve (2.25) ten

$$u_i(t) = -\frac{1}{\beta}\int_R f_i(t,x)\left[W(t,T,x) - \psi_1(x + \int_t^T W(t,\tau,x)d\tau\right]dx \tag{2.26}$$

ifadesini buluruz. $s = T$ koyarsak (2.23) ten

$$W(t,T,x) = \psi_0(x - \int_0^t W(t,\tau,x)d\tau) +$$

$$+\int_0^T \sum_{i=1}^n u_i(\rho) f_i(\rho, x - \int_\rho^t W(t,\tau,x)d\tau)d\rho\,. \tag{2.27}$$

eşitliğini buluruz. (1.3) ve (2.24) ten yine n eşitliklerini alırız:

$$g_j(t) = \psi_0(x_j - \int_0^t W(t,\tau,x_j)d\tau) +$$

$$+\int_0^t \sum_{i=1}^n u_i(\rho) f_i(\rho, x_i - \int_\rho^t W(t,\tau,x_j)d\tau)d\rho\,,\ j = 1,2,...,n. \tag{2.28}$$

Böylece n + 2 tane bilinmeyen $W(t,s,x), W(t,T,x), u_1(t), u_2(t),..., u_n(t)$ fonksiyonlarını belirtmek için n + 2 tane (2.23), (2.26), (2.27) ve (2.28) no'lu eşitliklerden oluşan lineer olmayan denklemleri alınmıştır.

Sonuç

Teorem 2. *Diyelimki:*

1) $\psi_0(x), \psi_1(x) \in L^2(R) \cap \overline{C}^1(R)$;

2) $f_1(t,x), f_2(t,x),..., f_n(t,x) \in L^2([0,T]xR) \cap \overline{C}^{0,1}([0,T]xR)$;

3) $F(t) = (f_i(t,x_j))_{i,j=1}^n$ *matrisinin her* $t \in [0,T]$ *için tersi var, yani* $\exists\ F^{-1}(t)$.

O zaman yeterli derecede küçük olan $T > 0$ *için (2.23), (2.26), (2.27) ve (2.28) lineer olmayan integral denklem sisteminin* $L^2([0,T]x[0,T]xR)xL^2([0,T]xR)xL^2[0,T]$ *uzayına ait olan bir tek çözümü var.*

İspat etmek için Banah'ın kısıtlanan dönüşümler teoremi uygulanır.

Kaynaklar

1. Egorov A.İ. Optimalnoe upravleniye teplovımi i diffuzionnımi prosessami. Moskva: Nauka, 1978. – 468 s.

2. İmanaliyev M.İ., *Alekseenko C.N.* // DAN SSSR,1992, cilt 323, No 3, - S. *410-415.*

3. Rafatov R.R., Asanov A. // Vestnik KGNU, 2001. Ser.3. Vıpusk Mejdunar. Nauçnaya konf., posvyaşennaya 70 – letiyu Akademika M.İ. –S. 100 – 104.

4. Egorov A.İ., Rafatov R.R. Matematiçeskiye metodı optimizasii prosessov teploprovodnosti i diffuzii. Frunze: İlim, 1990. – 337 s.

5. A. Hebibzade. Funksiyonel analiz. ‘Maarif’ Neşriyatı. Bakı. 1978.- 390 s.